第一章 行列式

定义1.1 由1,2,…,n 组成的一个有序数组称为一个 n级排列

定义1.2 在一个排列中的两数，如果排在前面的数大于排在后面的数，则称它们为一个逆序。一个排列中的逆序的总数就称为这个排列的逆序数。排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数记为 $\tau(j_1j_2\cdots j_n)$

定义1.3 逆序数为偶数的排列称为偶排列；逆序数为奇数的排列称为奇排列。

定理1.1 对换改变排列的奇偶性。

(该定理证明过程中用取特殊情况的方法化简了证明，再用逐级靠近的思想——有点像数学归纳法——完成证明)

定理1.2 任意一个 n级排列与排列 12…n 都可以经过一系列的对换互变，并且所作对换的个数与这个排列有相同奇偶性。

(利用定理1.1直接证明) (数学归纳法)

推论1.1 当 $n\geq 2$ 时，全部 n级排列中奇偶排列各占一半，且为 $n!/2$ 个。

(用夹逼思想) (把等式证明化为两个不等式，即“=”⇔“≥∧≤”)

定义1.4 由 n^2 个元素 a_{ij} $(i,j=1,2,\cdots,n)$ 排成 n行 n列 (a_{ij} 是位于第 i行第 j列的元素)，在其两边各画一条竖线来表示n阶行列式，并把它定义为

这个等式怎么来的?

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

即它等于所有取自不同行不同列的n个元素的乘积 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}\cdots a_{nj_n}$ 的代数

性质1.1: 行列互换，行列式的值不变，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质1.1表明,在行列式中,行与列是对等的(对称的),所有有关行的性质,对列均成立。

性质1.2

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

特例:当K=0时,即行列式中某一行(或列)的各元素都为零,则此行列式的值为零.

(用定义展开,变换,用定义还原.

性质1.3

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1}+a'_{i1} & a_{i2}+a'_{i2} & \cdots & a_{in}+a'_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a'_{i1} & a'_{i2} & \cdots & a'_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

文字表述:如果行列式中某一行(或列)是两组数的和,则它等于两个行列式的和,而这两个行列式分别以这组数作为该行,其余各行与原行列式对应各行相同.

性质1.4 对换行列式中两行(或列)的位置,行列式的值变号.

推论1.2 若行列式中有两行(或列)的对应元素相同,则它等于零.

性质1.5 如果行列式中有两行(或列)成比例,则它等于零。

性质1.6 如果把某一行(或列)的倍数加到另一行(或列)上去,则行列式的值不变.

综述:利用行列式的性质将行列式化为上三角行列式进行计算的方法,是计算数字行列式的最基本方法。

No.

Date

证明：对某确定的n，其所有的n级奇排列的前两位互换后产生的偶排列中总有一个与原来一个奇排列中第一位与第三位互换产生的排列相同、

$$\begin{matrix} a_{i_1} & a_{i_2} & \cdots & a_{i_n} \\ a_{j_1} & a_{j_2} & \cdots & a_{j_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{p_1} & a_{p_2} & \cdots & a_{p_n} \end{matrix}$$

第一个排列的第一、三位互换后，假设在前两位互换后的排列无相同项，那么此现在所有的偶排列的第一、二位互换后，又重新得到了所有的n级奇排列以及一个新排列，同样是奇排列，但原则上在前者中应该没有与之相同的项，与事实不符，矛盾。所以得证

三阶行列式是由三个二阶行列式加成的：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

定义 1.5　在n阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

（注：D代表 determinate）

中，划去元素 a_{ij} 所在的第i行 第j列，剩下的元素按原相对次序排列成一个 n-1 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1\,j-1} & a_{1\,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-1\,1} & \cdots & a_{i-1\,j-1} & a_{i-1\,j+1} & \cdots & a_{i-1\,n} \\ a_{i+1\,1} & \cdots & a_{i+1\,j-1} & a_{i+1\,j+1} & \cdots & a_{i+1\,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n\,j-1} & a_{n\,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 a_{ij} 的余子式，记为 M_{ij}. ←余子式的英文？

令　$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$，$A_{ij}$ 称为 a_{ij} 的代数余子式.

No.

Date

定理 1-3　设n阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

A_{ij} 表示元素 a_{ij} 的代数余子式，则成立下列公式

$$\sum_{j=1}^{n} a_{kj}A_{ij} = \delta_{ki}D$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{jk}A_{ji} = \delta_{ki}D.$$

其中，$\delta_{ki}=\begin{cases}1, & k=i \\ 0, & k\neq i\end{cases}$，称为克罗内克尔符号，或克氏符号。

文字表述：D的任一行(列)的所有元素与它们对应的代数余子式乘积之和等于D；

D的某行(列)的所有元素与另一行(列)元素的代数余子式乘积之和等于零。

证明：① $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\Big[a_{ij}(-1)^{i+j}\sum_{j_1j_2\cdots j_{i-1}j_{i+1}\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_{i-1}j_{i+1}\cdots j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{i-1\,j_{i-1}}a_{i+1\,j_{i+1}}\cdots a_{nj_n}\Big]$

$$= \sum_{j=1}^{n}\sum_{j_1j_2\cdots j_{i-1}j_{i+1}\cdots j_n}(-1)^{i+j+\tau(j_1j_2\cdots j_{i-1}j_{i+1}\cdots j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{i-1\,j_{i-1}}a_{ij}a_{i+1\,j_{i+1}}\cdots a_{nj_n}$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\sum_{j_1j_2\cdots j_{i-1}j_{i+1}\cdots j_n}(-1)^{(i-1)+(j-1)+\tau(j_1j_2\cdots j_{i-1}j_{i+1}\cdots j_n)}\Delta$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\sum_{\Delta}(-1)^{(i-1)+\tau(jj_1j_2\cdots j_{i-1}j_{i+1}\cdots j_n)}\Delta$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\sum_{\Delta}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_{i-1}jj_{i+1}\cdots j_n)}\Delta$$

$$= D.$$

② $\sum_{j=1}^{n} a_{kj}A_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1s} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{ks} & \cdots & a_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{ks} & \cdots & a_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ns} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ (第i行) (第k行)

No.

Date

$= 0.$

(第二步证明过程中直接用上了第一步证明的结论，那个妙啊！数学里面的结论通常像骨牌一样，倒了一个就会倒出下一个，或者像第二数学归纳法，倒了前 $n-1$ 个，第 n 个就会倒出来，前 n 个倒了，第 $n+1$ 个又会倒出来……。这样的思想如同堆积木，是一种很高层次的转化与化归思想，即把更进一步的结论转化为现在已经解决的问题。)

在运用数学归纳法或第二数学归纳法时，应当注意在证明过程中用到了前几项或前 n 项的归纳假纳，从而考虑让证明过程成立的 n 的初始值（最小值）以及归纳法的类别（即"第一"还是"第二"）。另外，前面的项全都要算出来分别说明其正确性，无论有一项、两项还是几项。

一般来说看到 n 就首先把 n 往足够大的方向想，但在考虑了 n 足够大的情形下的证明以后，要思考 n 的最小值，然后起笔证明，从 $n=1$ 到最小值之前的数，分项说明，再用（第一/第二）数学归纳法。

对于任一个用数表示的行列式而言，有一个基本的解题思路，它的目的是构造上三角。从第一列开始，用第一列中的最小的数（最好是这列数的公约数）的倍数，分别去减其余行的第一列数，构造出 $n-1$ 个零，并将非零的数的行换至第一行；对第二列，从第二行开始，用上一步的方法使之有 $(n-2)$ 个零；对以后的行同理构造，最终出现上三角行列式。这个思路主要是用先前产生的零去保护已构造出来的其余的零，使零的数目增加，位置符合上三角。

范德蒙行列式：

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\le j<i\le n}(a_i-a_j) = \prod_{j=1}^{n-1}\prod_{i=j+1}^{n}(a_i-a_j)$$

语言表达：这样的行列式的值为 $a_1 \sim a_n$ 所有"大下标"与"小下标"的差的乘积。

证明过程中，考虑到等式两边是不同的运算方式，直接转化可能有困难，故避开正面证明，利用有递推性质的数学归纳法，把证明过程中的大块过程用"归纳假设"的义代替，把大问题化为小块的具有一般性质的递推过程。

No.

Date

定理 1.4（克兰姆（Cramer）法则）

如果线性方程组
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

的系数行列式
$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

则这个方程组有唯一解，解为
$$x_j = \frac{D_j}{D}, \quad j = 1, 2, \cdots, n$$

其中 D_j 是把 D 中第 j 列换成常数项 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 所得的行列式，即
$$D_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & b_1 & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j-1} & b_2 & a_{2j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & b_n & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad j = 1, 2, \cdots, n$$

证明：（证明原方程式组有解，且所给解是一组解）

将 D_j 按第 j 列展开，得
$$D_j = b_1 A_{1j} + b_2 A_{2j} + \cdots + b_n A_{nj} = \sum_{s=1}^{n} b_s A_{sj}$$

将 $x_j = \frac{D_j}{D}, j = 1, 2, \cdots, n$ 代入第 i 个方程得
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot \sum_{s=1}^{n} \frac{1}{D} b_s A_{sj}$$
$$= \frac{1}{D} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \sum_{s=1}^{n} A_{sj} \cdot b_s$$
$$= \frac{1}{D} \sum_{s=1}^{n} b_s \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{sj}$$
$$= \frac{1}{D} \sum_{s=1}^{n} b_s \delta_{is} D$$
$$= b_i = \text{第 } i \text{ 个方程的右边}.$$

（证明所给解是方程组的唯一解）

设 $x_j = c_j, j = 1, 2, \cdots, n$ 是方程组的任一解.

从第一个方程到第 n 个方程分别乘以 $A_{1j}, A_{2j}, \cdots, A_{nj}$ 并相加，得

~~$(a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+\cdots+a_{n1}A_{n1})C_1+(a_{12}A_{11}$~~

$$\sum_{i=1}^{n} a_{i1}A_{ij}\, C_1+\cdots+\sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij}C_j+\cdots+\sum_{i=1}^{n} a_{in}A_{ij}C_n=b_1A_{1j}+\cdots+b_nA_{nj}$$

即 $\delta_{1j} D C_1+\cdots+\delta_{jj}DC_j+\cdots+\delta_{nj}DC_n=D_j$

即 $DC_j=D_j$

即 $C_j=\frac{D_j}{D}$ $\quad j=1,2,\cdots,n$.

这就是说，$(C_1,C_2,\cdots,C_n)=(\frac{D_1}{D},\frac{D_2}{D},\cdots,\frac{D_n}{D})$ 是方程组的唯一解.

定义：常数列不全为零的线性方程组称为非齐次线性方程组. 常数项全为零的线性方程组称为齐次线性方程组.

推论1.3 对所有的齐次线性方程组，如果它的系数行列式 $D\neq0$，则它只有零解，即所有元的解均为零.

定义1.6 在n阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$$

中任意选定k行(记为第 $i_1,i_2,\cdots,i_k$ 行)与k列(记为第 $j_1,j_2,\cdots,j_k$ 列)，位于这些行和列的交点上的元素按原相对次序排列组成一个k阶行列式.

$$M=\left|D\begin{pmatrix} i_1 i_2\cdots i_k\\ j_1 j_2\cdots j_k\end{pmatrix}\right|=\begin{vmatrix} a_{i_1j_1} & a_{i_1j_2} & \cdots & a_{i_1j_k}\\ a_{i_2j_1} & a_{i_2j_2} & \cdots & a_{i_2j_k}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{i_kj_1} & a_{i_kj_2} & \cdots & a_{i_kj_k}\end{vmatrix}$$

称M为D的一个k阶子式. 在D中划去这k行k列后余下的元素按相对次序排列成一个n-k阶子式 M'，称为M的余子式。称 $A_k=(-1)^{\sum_{s=1}^{k}(i_s+j_s)}M'$ 为M的代数余子式

其中 $k\in[1,n-1]$， $1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n$ ， $1\le j_1<j_2<\cdots<j_k\le n$

No.

Date

引理　n阶行列式D的任一k阶子式M与它的代数余子式的A_k乘积中的每一项都是D的展开式中的一项，且符号也相同。

（特殊情况下的证明＋化归到特殊情况）

定理（拉普拉斯（laplace）定理）

设在n阶行列式D中任意取定了k（$1\le k\le n-1$）行（列），由这k行（列）元素组成的所有可能的k阶子式与它们的代数余子式的乘积的和等于D

分步证明（证明 所有项互异 ＋ 项数与D的展开式的项数相同）

利用 laplace 定理来计算行列式一般是不方便的，只有选定的k行上k阶子式的元素为尽量多的零时，计算才大为简化了。此定理主要在证明题中用到

第二章　矩阵（matrix）

定义 2.1　由数域P中mn个数排列成m行n列的矩形表

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为一个m×n矩阵，记为$A_{m\times n}$或$A=(a_{ij})_{m\times n}$，习惯上用A,B,C表示矩阵；a_{ij}为A的（i,j）元；若P为实数域R，则A为实矩阵，P为复数域C，则A为复矩阵。

n阶方阵：$A=(a_{ij})_{n\times n}$

$A_1=(a_{11},a_{12},\cdots,a_{1n})$ 也称为n维行向量

$A_2=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$ 也称m维列向量。A_1A_2统称向量或几何向量，向量的第i个元素也称为向量的第i个分量。

No.

Date

零矩阵：所有元素均为0的矩阵，记为 $O_{m\times n}$ 或 0.

单位阵：主对角元全为1，其余元素全为0的方阵，记为 I_n 或 E_n.

对角阵：除主角元外的所有元素均为0的方阵，记为 $A=diag(a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn})$.

数量阵：主对角元全为常数k，其余元素均为0的方阵，也叫n阶纯量阵.

上(下)三角阵：称 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & \vdots \\ 0 & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}$ 为n阶上三角阵.

定义2-2. 两矩阵A、B同型且各位上数相等，则A=B.

定义2-3 设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，$B=(b_{ij})_{m\times n}$，则矩阵

$$C=(c_{ij})_{m\times n}=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}$$

$$=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

称为A与B的和.

矩阵 $A'=(-a_{ij})_{m\times n}$ 称为 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 的负矩阵，记为 $-A$.

定义2-5 $k\cdot A(a_{ij})_{m\times n}=A(ka_{ij})_{m\times n}$，为数k与矩阵A的数乘.

定义2-6 设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，$B=(b_{ij})_{n\times p}$，$C=(c_{ij})_{m\times p}$. 其中 $c_{ij}=\sum_{r=1}^{n}a_{ir}b_{rj}$

称C为A与B的乘积，记为 $C=AB$.

(注记：只有当A的列数与B的行数相同时，AB才有意义；C以A的行数为行数，B的列数为列数；

C的 c_{ij} 元等于A的第i行与B的第j列对应元素的乘积的和.)

矩阵乘法不具有交换律与消去律.

性质：(1) 结合律 $(AB)C=A(BC)$

(2) 分配律 $A(B+C)=AB+AC$

$(B+C)A=BA+CA$

(3) 存在单位阵 I_m 与 I_n，使：$I_mA_{m\times n}=AI_n=A$

(4) 对于数k，有 $k(AB)=A(kB)=(kA)\cdot B$.

定义2.7（A的多项式）设A是一个n阶方阵，定义 $A^k=A^{k-1}\cdot A$，$k=1,2,\cdots$，规定 $A^0=I_n$，

设x是个符号，x的一元多项式为

$$f(x)=a_mx^m+a_{m-1}x^{m-1}+\cdots+a_1x+a_0$$

← 矩阵多项式中常数单独出现，故转1为 I_n

则称 $f(A)=a_mA^m+a_{m-1}A^{m-1}+\cdots+a_1A+a_0I_n$，为A的多项式，它仍是个n阶方阵。

（注：一般 $(AB)^k\neq A^k\cdot B^k\ (k\geq 2)$；$f(A)\cdot g(B)\neq g(B)\cdot f(A)$）

若 $AB=BA$，则 $(A+B)^n=A^n+C_n^1A^{n-1}B+\cdots+C_n^kA^{n-k}B^k+\cdots+B^n$）

△※定理2-1 设A，B均为n阶方阵，则 $|AB|=|A|\cdot|B|$.

推论2-1 设 $A_1,A_2,\cdots,A_s$ 均为n阶方阵，则 $\left|\prod_{i=1}^{s}A_i\right|=\prod_{i=1}^{s}|A_i|$

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}y_1&y_2&\cdots&y_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}&&\\&x_iy_j&\\&&\end{pmatrix}_{n\times n}=\begin{pmatrix}x_1&&\\x_2&0&\\\vdots&&\\x_n&&\end{pmatrix}_{n\times m}\cdot\begin{pmatrix}y_1&y_2&\cdots&y_n\\&0&\end{pmatrix}_{m\times n}$$

"加零法"

定义2.8 若将m×n矩阵

转置阵：$A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{bmatrix}_{m\times n}$ 的行列互换，则得到n×m矩阵，记为 A^T 或 A'

实对称阵：若对实方阵A满足 $A^T=A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{12}&a_{22}&\ddots&\vdots\\\cdots&\ddots&\ddots&a_{n-1,n}\\a_{1n}&\cdots&a_{n-1,n}&a_{nn}\end{bmatrix}$，则为实对称阵.

反对称阵：实方阵A满足 $-A^T=A=\begin{bmatrix}0&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\-a_{12}&0&\ddots&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&a_{n-1,n}\\-a_{1n}&\cdots&-a_{n-1,n}&0\end{bmatrix}$，则为反对称阵

转置阵的性质：$(A^T)^T=A$；$(A+B)^T=A^T+B^T$；$(kA)^T=kA^T$；$(AB)^T=B^T\cdot A^T$；

$(A^k)^T=(A^T)^k$；$(A_1A_2\cdots A_s)^T=A_s^T\cdots A_2^T\cdot A_1^T$.

No.
Date

定义 2-9　共轭阵：设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 是个复阵，则 $\overline{A}=(\overline{a_{ij}})_{m\times n}$ 是 A 的共轭阵。

共轭转置阵：$(\overline{A})^T=(\overline{a_{ji}})_{m\times n}$ 是 A 的共轭转置阵，记为 A^H

厄米特(Hermite)阵：若 n 阶复方阵 A 满足 $A^H=A$，则为厄米特阵。实对称阵是一类特殊的厄米特阵。

(共轭对称阵)　(共轭反对称阵：$A^H=-A$)

$|\overline{A}|=\overline{|A|}$; $|A^H|=|\overline{A}|=\overline{|A|}$

共轭阵与共轭转置阵的性质：$\overline{\overline{A}}=A$; $(\overline{kA})=\overline{k}\overline{A}, k\in\mathbb{C}$; $(\overline{A+B})=\overline{A}+\overline{B}$

$a,b\in\mathbb{C}$　$\overline{a}\cdot\overline{b}=\overline{(ab)}$ → $\overline{AB}=\overline{A}\,\overline{B}$; $(\overline{A})^T=\overline{(A^T)}(=A^H)$; $(A^H)^H=A$

$(kA)^H=\overline{k}A^H, k\in\mathbb{C}$; $(A+B)^H=A^H+B^H$; $(AB)^H=B^HA^H$

$(A_1A_2\cdots A_s)^H=A_s^H\cdots A_2^H\cdot A_1^H$

厄米特阵(共轭对称阵)主对角元为实数；共轭反对称阵主对角元为0或纯虚数

定义 2.10 (矩阵的逆) 设 A 是 n 阶方阵，若存在 n 阶方阵 B，使得 $AB=BA=I_n$

则 B 为 A 的逆阵，记为 $B=A^{-1}$，并称 A 为可逆阵或非奇异阵；

若不存在这样的 B，则称 A 为不可逆阵，或奇异阵。

若 $AB=I_n$ 则 $BA=I_n$　(A,B 均为 n 阶方阵)

定义 2-11　伴随矩阵：设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，A_{ij} 是 $|A|$ 中元素 a_{ij} 的代数余子式，

则 $A^*=(A_{ji})_{n\times n}$ 为 A 的伴随阵，或记为 $\operatorname{adj}A$.

(注意：可逆方阵 A，没有除法运算，即 $\frac{1}{A}$ 无意义)

定理 2-2　n 阶方阵为可逆阵的充分必要条件是 $|A|\neq 0$.

证明：必要性：A 可逆，故 A^{-1} 存在，且 $A\cdot A^{-1}=I_n$

$\therefore |A\cdot A^{-1}|=|I_n|$

$\therefore |A|\cdot|A^{-1}|=1$

$\therefore |A|\neq 0$

充分性：$|A|\neq 0$

$\because AA^*$ 的 (i,j) 元 $=\sum_{r=1}^{n}a_{ir}A_{jr}=\delta_{ij}|A|$

$$\therefore AA^*=\begin{pmatrix}|A| & & & 0\\ & |A| & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & |A|\end{pmatrix}_{n\times n}=|A|I_n$$

No.

Date

$\therefore A\cdot(\frac{A^*}{|A|}) = I_n$，即A可逆且 $A^{-1} = \frac{1}{|A|}(A_{ji})_{n\times n}$. □

推论 2-2 设A，B均为n阶方阵，则：

(1) AB为非奇异阵 $\Longleftrightarrow$ A，B都为非奇异阵.

(2) AB为奇异阵 $\Longleftrightarrow$ A，B中有一个是奇异阵.

逆阵的性质：(1) 若A可逆，且逆阵是唯一的.

(2) $(AB)^{-1} = B^{-1}\cdot A^{-1}$

(3) $(A^{-1})^{-1} = A$

(4) $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$

(5) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

(6) $|A^{-1}| = |A|^{-1}$ (即 $\frac{1}{|A|}$)

(7) $(A_1A_2\cdots A_s)^{-1} = A_s^{-1}\cdot\cdots\cdot A_2^{-1}\cdot A_1^{-1}$

(8) 设AB=AC，且A可逆，则B=C.

定义：$A^{-k} = (A^{-1})^k$ (k为正整数).

[redacted] $(1+x_iy_j)_{n\times n} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{pmatrix}_{n\times 2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{pmatrix}_{2\times n}$.

1的分法：$1=1\times 1$

Δ $|A||B| = \begin{vmatrix} A & O \\ -I_n & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} O & AB \\ -I_n & B \end{vmatrix} = (-1)\times|AB|\times|-I_n| = |AB|$

定义 2.13 用t-1条横线和l-1条纵线划分 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 成如下形状矩阵

$$A = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1l} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2l} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{t1} & A_{t2} & \cdots & A_{tl} \end{pmatrix} \begin{array}{c} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_t \end{array} \\ \begin{array}{cccc} n_1 & n_2 & \cdots & n_l \end{array} \end{array} = (A_{ij})_{t\times l}$$

其中 $\sum_{i=1}^{t} s_i = m$，$\sum_{j=1}^{l} n_j = n$. $(A_{ij})_{t\times l}$ 称为A的分块阵，$s_i\times n_j$ 矩阵 A_{ij} 称为 $(A_{ij})_{t\times l}$

No.

Date

的第(i,j)子块(或子矩阵). $(A_{i1}\ A_{i2}\ \cdots\ A_{il})$ 称为 $(A_{ij})_{t\times l}$ 的第i行块, $(A_{1j}A_{2j}\cdots A_{tj})^T$ 称为 $(A_{ij})_{t\times l}$ 的第j列块.

准上三角阵、准下三角阵、准对角阵 定义略.

分块阵的运算: 相等; 加减法; 数乘; 转置 $(A^T=(A_{ji}^T)_{l\times t})$; 乘法 $(A(A_{ij})_{t\times l}\cdot B(B_{ij})_{l\times q}=C(C_{ij})_{t\times q}$, 其中 $C_{ij}=\sum_{r=1}^{l}A_{ir}B_{rj}$; 且 A_{ij}是$s_i\times n_j$矩阵, B_{ij}是$n_i\times k_j$矩阵)

行向量: $a_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in})$,

列向量: $a^j=(a_{1j},a_{2j},\cdots,a_{mj})^T$.

例: $A_{m\times n}B_{n\times p}=A(b^1,b^2,\cdots,b^p)=(Ab^1,Ab^2,\cdots,Ab^p)$

$$=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_m\end{pmatrix}B=\begin{pmatrix}a_1B\\a_2B\\\vdots\\a_mB\end{pmatrix}$$

定义 2.14, 称 $e^j=(0\cdots0\underset{(第j行)}{1}0\cdots0)^T=(\delta_{1j},\cdots\delta_{jj}\cdots\delta_{nj})^T$ $(1\le j\le n)$ 为 ~~……~~

n维标准单位列向量

$E_{ij}=e^ie_j$

定理2.3. $Ae^j=a^j$, $(e^i)^T\cdot A=a_i$

$AE_{ij}=(0,\cdots,0,\underset{(j列)}{Ae^i},0,\cdots,0)$ 把第i列放在第j列 $\quad E_{ij}A=(0,\cdots,0,\underset{(i行)}{A^Te^j},0,\cdots0)^T$ 把第j行放在第i行

$A\begin{pmatrix}i\\1,2,\cdots,n\end{pmatrix}=a_i=(e^i)^TA=A(\underline{i})$ ←记法

$A\begin{pmatrix}1,2,\cdots,m\\j\end{pmatrix}=a^j=A\cdot e^j=A(\overline{j})$ ←记法

$A\begin{pmatrix}i\\j\end{pmatrix}=a_{ij}=a_ie^j=(e^i)^Ta_j=(e^i)^TAe^j$

$A\begin{pmatrix}i_1,i_2,\cdots,i_r\\1,2,\cdots,n\end{pmatrix}=(e^{i_1},e^{i_2},\cdots,e^{i_r})A$ ~~$=((e^{i_1})^T,(e^{i_2})^T,\cdots,(e^{i_r})^T)^T$~~

$$=\begin{pmatrix}(e^{i_1})^T\\(e^{i_2})^T\\\cdots\\(e^{i_r})^T\end{pmatrix}\cdot A=A(\underline{i_1\ i_2\cdots i_r})$$

$A\begin{pmatrix}1,2,\cdots,m\\j_1,j_2,\cdots,j_n\end{pmatrix}=A(\overline{j_1j_2\cdots j_n})=A(e^{j_1},e^{j_2},\cdots,e^{j_n})$

$$\boxed{A\begin{pmatrix}i_1,i_2,\cdots,i_r\\j_1,j_2,\cdots,j_s\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(e^{i_1})^T\\(e^{i_2})^T\\\cdots\\(e^{i_r})^T\end{pmatrix}\cdot A\cdot(e^{j_1},e^{j_2},\cdots,e^{j_s})}$$

规律：取行放行前，取列放列后，取元就叠加。

$a_i = (e^i)^T \cdot A$; $a^j = A \cdot e^j$

$a_{ij} = (e^i)^T A \cdot e^j$

推论 2-3. 设 $A_{m\times n}$, $B_{n\times p}$, 则 $(AB)\binom{i_1, i_2, \cdots, i_r}{j_1, j_2, \cdots, j_s} = A(i_1, i_2, \cdots, i_r) \cdot B(\overline{j_1, j_2, \cdots, j_s})$

（解释：依据运算法则相叠加）

定义 2.16 主子阵：$A\binom{i_1\ i_2 \cdots i_r}{i_1\ i_2 \cdots i_r}$

主子式：主子阵的行列式

顺序主子阵：$A\binom{1, 2, \cdots, r}{1, 2, \cdots, r}$

顺序主子式：(略)

$(\cdots, e^j, \cdots, e^i, \cdots)$ $(\cdots, ke^i, \cdots)$ (列) $(\cdots, e^i + ke^j, \cdots, e^j \cdots)$

定义 2-17：初等变换：矩阵的3种基本变换 (1) 两行(列)互换 (2) 某一行(列)变为它的非零倍 (3) 将某一行(列)的k倍加到另一行(列).

初等阵：对单位阵I_n施行一次初等变换得到的矩阵.

对换阵 —— $I(i,j)$

倍乘阵 —— $I(i(k))$

倍加阵 —— $I(i,j(k))$

初等阵的性质：(1) 初等阵左(右)乘一矩阵，结果是对它施行相应的行(列)变换.

(2) $|I(i,j)| = -1$; $|I(i(k))| = k$; $|I(i,j(k))| = 1$

(3) $I(i,j)^{-1} = I(i,j)$ （解释：$I(i,j)\, I(i,j)$ = 对 $I(i,j)$ 的第i行对换，也就是换回去）

（再释：$I(i,j) \cdot I(i,j) \cdot I$ = 对I进行两次操作）

$I(i(k))^{-1} = I(i(\frac{1}{k}))$ （ $I(i(k)) \cdot I(i(\frac{1}{k}))\, I = I$. ）

$I(i,j(k))^{-1} = I(i,j(-k))$ （ $I(i,j(k)) \cdot I(i,j(-k))\, I = I$ ）

（规律：初等阵的逆即为相应初变换的逆变换）

定义 2.19 若矩阵A经过一系列初等变换化为矩阵B，则称A与B是相抵的(或等价的)，记为

$A \cong B$，即

$P_1 P_2 \cdots P_t A Q_1 Q_2 \cdots Q_l = B$，即

∃可逆阵 P, Q, s.t. $PAQ = B$.

结论：所有可逆矩阵都可看作是由 I_n 经过 n 次初等变换得来的。

（解释：$\because$ 矩阵初等变换与行列式的一些常用变换相同，我们用行列式对此结论进行解释。利用 $I(i,j)$ 与 $I(i,j(k))$ 两种变换，我们可以把任何行列式变为上三角行列式，这是我们已经知道的，但实质上我们可以把它变为对角行列式；而对于对角阵，再利用 $I(i(k))$ 可以使之成为 I_n。□）

推论：所有可逆矩阵均等价。

定义：等价关系：已知 R 是集合 M 上的一种关系，如果 R 具有反身性，对称性和传递性，则称 R 是集合 M 上的一种等价关系。例如，相抵（等价）即为同型矩阵的一种等价关系

定义 2-20：阶梯阵：

$$A=(a_{ij})_{m\times n}=\left(\begin{array}{cccccc} 0 & a_{1j_1} & * & * & * & * \\ 0 & 0 & a_{2j_2} & * & * & * \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{rj_r} & * \\ & & & 0 & & \end{array}\right)\begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{array}{c}0\\0\\0\\0\end{array}}\right\} r\text{行} \\ \} m-r\text{行} \end{array}$$

命题：任一矩阵都可经一系列初等变换化为阶梯阵。（与行列式变形类似）。

·（I_n）

定理 2-4（相抵标准形定理）：任意一个矩阵 A 都与唯一一个同形矩阵 $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 相抵。称 $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 为 A 的 $\boxed{\text{相抵标准形}}$，约定 $I_0=0$

结论：（一种新的矩阵的逆的求法）令 $A^{-1}=P_1P_2\cdots P_t$

$$\begin{aligned} P_1P_2\cdots P_t(A,I_n) &= (P_1P_2\cdots P_tA,\ P_1P_2\cdots P_tI_n) \\ &= (A^{-1}A,\ A^{-1}I_n) \\ &= (I_n,\ A^{-1}) \end{aligned}$$

也就是说，如果将 $n\times 2n$ 矩阵 (A,I_n) 施行一系列初等行变换，如果子块 A 能化成单位阵 I_n，则 A 可逆，且右边的一半就是 A^{-1}。

（解释：设可逆矩阵 $A=P_1P_2\cdots P_t$，则 $A^{-1}=(P_1P_2\cdots P_t)^{-1}=P_t^{-1}\cdots P_2^{-1}P_1^{-1}$

一些相抵标准形：$(0,0,\cdots,0)$，$(1,0,\cdots,0)$，$(0,0,\cdots,0)^T$，$(1,0,0,\cdots,0)^T$，$(0)_{m\times n}$

定义 2-21　设 $A=(a_{ij})_{m\times n}=(A_{ij})_{t\times l}$，其中 A_{ij} 为 $m_i\times n_j$ 子矩阵，则定义分块阵的三种初等变换：

① 互换 $(A_{ij})_{t\times l}$ 两行(列)块的位置.

② 用可逆阵 K 左乘 $(A_{ij})_{t\times l}$ 的某一行(列)块.

② 将矩阵 K 左乘(或右乘) $(A_{ij})_{t\times l}$ 的某一行(列)块后加到另一行(列)块上去
(注意区别)

定义 2-22　① 分块对换阵

$$I(i,j) \overset{i<j}{=} \begin{pmatrix} I_1 & & & & \\ & 0 & \cdots & I_j & \\ & \vdots & \ddots & \vdots & \\ & I_i & \cdots & 0 & \\ & & & & \ddots \; I_r \end{pmatrix}$$
(行对换)

$$I(i,j)^T = \begin{pmatrix} I_1 & & & & \\ & 0 & \cdots & I_i & \\ & \vdots & \ddots & \vdots & \\ & I_j & \cdots & 0 & \\ & & & & \ddots \; I_r \end{pmatrix}$$
(列对换)

② 分块倍乘阵

$$I(i(K)) = \begin{pmatrix} I_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & K & \\ & & & \ddots \; I_r \end{pmatrix}$$
(K 为 m_i 阶可逆阵)

③ 分块倍加阵

$$I(i,j(K)) = \begin{pmatrix} I_1 & & & \\ & I_i & \cdots & K \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & I_j \\ & & & & \ddots \; I_r \end{pmatrix}$$
(K 为 $m_i\times m_j$ 矩阵)

~~(感觉分块阵不怎么好用啊!)~~

分块初等阵的性质：(1) 分块初等阵左乘(或右乘)分块阵 $(A_{ij})_{t\times l}$，其结果就是对该分块阵施行相应的初等行(列)变换；

(2) $|I(i,j)| = \ ?$

$|I(i(K))| = |K| \neq 0$，　$|I(i,j(K))| = 1$.

(3) $I(i,j)^{-1} = I(i,j)^T$，$I(i(K))^{-1} = I(i(K^{-1}))$

$I(i,j(K))^{-1} = I(i,j(-K))$

No.
Date

※ 对任意单位阵~~[illegible]~~(分块阵也行)，进行意欲的变换(行/列)，再(左/右)乘相应矩阵即可实现对相应矩阵的变换

定理2.6 (行列式降阶第一定理) 设分块阵 $M=\begin{pmatrix}A&B\\C&D\end{pmatrix}$，其中A、D为k、r阶方阵，B、C为k×r, r×k矩阵，且A是可逆阵，则 $|M|=|A|\,|D-CA^{-1}B|$ ← 利用拉普拉斯定理展开以降阶

若D是可逆阵，则 $|M|=|D|\,|A-BD^{-1}C|$

证明：$|M|=\begin{vmatrix}A&B\\C&D\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}I_k&0\\X&I_r\end{vmatrix}\begin{vmatrix}A&B\\C&D\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}A&B\\XA+C&XB+D\end{vmatrix}$

令 $XA+C=0$，则 $X=-C\cdot A^{-1}$

$\therefore |M|=(-1)^{\sum_{i=1}^{k}i+\sum_{i=1}^{k}i}|A|\,|-CA^{-1}B+D|=|A|\,|D-CA^{-1}B|$

公式 设 $A_{m\times n}, B_{n\times m}$，则 $|I_m-AB|=|I_n-BA|$

证明：$|I_m-AB|=|I_n|\,|I_m-AI_n^{-1}B|=\begin{vmatrix}I_n&B_{n\times m}\\A_{m\times n}&I_m\end{vmatrix}$ ← 对行列式降阶第一定理的运用.

$|I_n-BA|=|I_m|\,|I_n-BI_m^{-1}A|=\begin{vmatrix}I_n&B_{n\times m}\\A_{m\times n}&I_m\end{vmatrix}$

$\therefore |I_m-AB|=|I_n-BA|$

推论：1° 若 $A=(x_1,x_2,\cdots x_n)$，$B=(y_1,y_2,\cdots y_n)^T$，则

$|I_n-BA|=|1-AB|=1-AB=1-\sum_{i=1}^{n}x_iy_i$

2° 若 $\lambda\neq0$，则 $\lambda^m|\lambda I_n-BA|=\lambda^n|\lambda I_m-AB|$

定义2.24 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 中非零子式的最大阶数称为A的秩，记为R(A)。

规定零阵的秩为0.

性质：(1) 若 $A(a_{ij})_{m\times n}$ 的一个r阶子式不为零，且A的所有r+1阶子式全为0，则 $R(A)=r$.

(2) $R(A^T)=R(A)$

定理2.7 (柯西—比内公式) 设 $A_{m\times n}, B_{n\times m}$，则：

(1) 当 $n<m$ 时，$|AB|=0$

(2) 当 $n\geq m$ 时，$|AB|=\sum_{1\leq j_1<j_2<\cdots<j_m\leq n}|A(\overline{j_1j_2\cdots j_m})|\,|B(\underline{j_1j_2\cdots j_m})|$

证明：构造 m+n 阶方阵 $M=\begin{pmatrix}I_n&B\\-A&0\end{pmatrix}$，

则 $|M|=|I_n|\,|0-(-A)I_n^{-1}B|=|AB|$ ← 因为降阶公式用已经用过laplace定理，故直接用降阶公式来得更方便些

1° 当n<m时，把|M|的后m列laplace展开，则取出的m阶子式中至少有m-n行零向量，故|M|=

2° 当 $n>m$ 时，把 $|M|$ 按后 m 列展开，当取的是前 m 行时，其余子式为 $\begin{vmatrix} 0 & I_{n-m} \\ -A_1 & -A_2 \end{vmatrix}$

有代数余子式 $(-1)^{\sum_{i=1}^{m} i+\sum_{i=1}^{m}(n+i)} \begin{vmatrix} 0 & I_{n-m} \\ -A_1 & -A_2 \end{vmatrix}$

$$= (-1)^{\sum_{i=1}^{m} i+\sum_{i=1}^{m}(n+i)} \cdot (-1)^{\sum_{i=1}^{m} i + \sum_{i=1}^{m} (n-m+i)} |-A_1|$$

$$= (-1)^{2mn-m^2} \cdot (-1)^{m} |A_1| = (-1)^{m(m+1)} |A_1| = |A_1|$$

又当任意取 m 行时，依次将取出的 $i_1, i_2, \cdots, i_m$ 行对换到第 $1,2,\cdots,m$ 行的位置上，相应地，把第 $i_1, i_2, \cdots, i_m$ 列次次对换到第 $1,2,\cdots,m$ 列位置，这时 ~~[illegible]~~，$B(\overline{j_1 j_2 \cdots j_m})$ 的代数余子式就是 $|A(\overline{j_1 j_2 \cdots j_m})|$

定理 2-8 设 $A_{m\times n}$，$B_{n\times p}$，则 $R(AB) \le \min[R(A), R(B)]$.

证明：设 $R(A)=r$，考查任一 AB 的 $r+1$ 阶子阵.

两个 ~~公式~~ 的联用

则 $(AB)\begin{pmatrix} i_1, i_2 \cdots i_{r+1} \\ j_1, j_2 \cdots j_{r+1} \end{pmatrix} = A(\underline{i_1, i_2, \cdots i_{r+1}}) \cdot B(\overline{j_1 j_2 \cdots j_{r+1}})$

$\therefore \left| (AB)\begin{pmatrix} i_1, i_2, \cdots i_{r+1} \\ j_1, j_2, \cdots, j_{r+1} \end{pmatrix} \right| = \left| A(\underline{i_1 i_2 \cdots i_{r+1}})\, B(\overline{j_1 j_2 \cdots j_{r+1}}) \right|$

$$= \sum_{1\le \mu_1<\mu_2<\cdots<\mu_{r+1}\le n} \left|A\begin{pmatrix} i_1 i_2 \cdots i_{r+1} \\ \mu_1 \mu_2 \cdots \mu_{r+1} \end{pmatrix}\right| \left|B\begin{pmatrix} \mu_1 \mu_2 \cdots \mu_{r+1} \\ j_1 j_2 \cdots j_{r+1} \end{pmatrix}\right|$$

$\because$ A 的所有 $r+1$ 阶子式全为 0，~~[illegible]~~ 故 (AB) 的所有 $r+1$ 阶子式也全为 0.

$\therefore R(AB) \le R(A)$，□.

推论 2-8 相抵阵具有相同的相抵标准形，于是，任意矩阵相抵标准形 $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{m\times n}$ 中的 r 就是该矩阵的秩，它是反映矩阵本质的一个不变量。

结论：$R\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = R(A)+R(B)$ $\quad (A_{m\times n}, B_{t\times l})$

证明：设 $R(A)=r$，$R(B)=s$，存在可逆阵 $P_{m\times m}$，$Q_{n\times n}$，$U_{t\times t}$，$V_{l\times l}$ 使

$PAQ = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad UBV = \begin{pmatrix} I_s & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\because \begin{vmatrix} P & 0 \\ 0 & U \end{vmatrix} = |P||U| \ne 0$，$\begin{vmatrix} Q & 0 \\ 0 & V \end{vmatrix} = |Q||V| \ne 0$.

$\therefore \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & V \end{pmatrix}$ 均为可逆阵.

又 $\begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} PAQ & 0 \\ 0 & UBV \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & \begin{pmatrix} I_s & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = N$

又 $R(N) = R\begin{pmatrix} I_{r+s} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = r+s$

$\therefore R\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = R(A)+R(B)$

~~[illegible]~~ $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}(0,0) = ?$

可乘性

结论：$R(AB) \geq R(A)+R(B)-n$.

证明 1° $R\begin{pmatrix} A & 0 \\ -I_n & B \end{pmatrix} = R(AB)+n$ | $R\begin{pmatrix} A & 0 \\ -I_n & B \end{pmatrix} = R\begin{pmatrix} 0 & AB \\ -I_n & B \end{pmatrix} = R\begin{pmatrix} 0 & AB \\ -I_n & 0 \end{pmatrix} = R(AB)+n$

2° $R\begin{pmatrix} A & 0 \\ -I_n & B \end{pmatrix} \geq R(A)+R(B)$ | $\begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & 0 \\ -I_n & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} PAQ & 0 \\ -UQ & UBV \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & 0 \\ -UQ & \begin{pmatrix} I_s & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$，□.

公式：$\underset{m\times n}{A}+\underset{m\times n}{B} = (I_m, I_m)\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n \\ I_n \end{pmatrix}$

1° $\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |A||D-CA^{-1}B| = |AD-ACA^{-1}B|$，当A,C可交换时，有$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |AD-CB|$.
(AD可作乘法时)

2° $\begin{vmatrix} A & & 0 \\ & B & \\ * & & X \end{vmatrix} = |A|\cdot|B|\cdots|X|$.

第四章 线性方程组

定义：线性方程组一般形式：

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m, \end{cases}$$

n个变量，m个方程.

线性方程组的矩阵形式：

$$A\vec{x}=\vec{b}$$

系数阵：$A=(a_{ij})_{m\times n}$；方程组系数按顺序排列形成的矩阵。

n元未知量矩阵：$\vec{x}=(x_1,x_2,\cdots x_n)^T$；所有未知量形成的列向量。

常数项矩阵：$\vec{b}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^T$；所有常数项形成的列向量。

增广阵：$\tilde{A}=(A,\vec{b})$；系数阵与常数项矩阵的合并阵。

齐次线性方程组：$\vec{b}=\vec{0}$，即所有常数项为0，所有项为一次项，故称齐次。

非齐次线性方程组：(略)

方程组的解：满足 $A\vec{x}=\vec{b}$ 的$\vec{x}$称为方程组的解，方程组的全部解构成解集。

同解方程组：有相同解集的方程组互为同解方程组　　注意是解集相同

特别地，对方程组 $A\vec{x}=\vec{0}$ 有：

平凡解：上述方程组的解$\vec{x}=\vec{0}$

非平凡解：上述方程组的非零解$(\vec{x}\neq\vec{0})$.

No.

Date

定义 4.1 线性方程组的初等行变换：

(1) 互换两个方程的上下位置；

(2) 用一个非零数乘以一个方程；

(3) 将一个方程的若干倍加到另一个方程上去。

关于初等行变换不改变方程组解集的证明：

设 $A_{m\times n}\vec{X}=\vec{b}$ 的解集为 V_1，经过一次初等行变换后 $PA_{m\times n}\vec{X}=P\vec{b}$ 的解集为 V_2.

对任意 $\vec{x_0}\in V_1$，$\because A_{m\times n}\vec{x_0}=\vec{b}$，有 $P\cdot A_{m\times n}\vec{x_0}=P\vec{b}$ $\quad V_1\subseteq V_2$

对任意 $\vec{x_1}\in V_2$，$\because PA_{m\times n}\vec{x_1}=P\vec{b}$，有 $P^{-1}PA_{m\times n}\vec{x_1}=P^{-1}P\vec{b}$，即 $\quad V_2\subseteq V_1$ } 集合相等的定义.

$A_{m\times n}\vec{x_1}=\vec{b}$

$\therefore V_1=V_2$，到此证明了线性方程组经过一次初等行变换之后解集不变，

故线性方程组经初等行变换后解集不变。$\square$ 证明过程也没什么，就是说明从方程组到矩阵式过渡是等价的。

定理 4.1 增广阵 $\tilde{A}$ 可经过一系列变换转化成阶梯阵，~~[illegible]~~

$$P\tilde{A}=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1r} & c_{1r+1} & \cdots & c_{1n} & d_1 \\ & c_{22} & \cdots & c_{2r} & c_{2r+1} & \cdots & c_{2n} & d_2 \\ & & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ & & & c_{rr} & c_{rr+1} & \cdots & c_{rn} & d_r \\ & & & & & & & d_{r+1} \\ & O & & & & & & 0 \\ & & & & & & & \vdots \\ & & & & & & & 0 \end{pmatrix}_{m\times(n+1)}$$

又可经过一系列变换化为“最简阵” 我定义的

$$Q\tilde{A}=\begin{pmatrix} 1 & & O & e_{1r+1} & \cdots & e_{1n} & f_1 \\ & 1 & & e_{2r+1} & \cdots & e_{2n} & f_2 \\ & & \ddots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ & & 1 & e_{rr+1} & \cdots & e_{rn} & f_r \\ & & & & & & f_{r+1} \\ & O & & & & & 0 \\ & & & & & & \vdots \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix}_{m\times(n+1)}$$

No.

Date

若 $d_{r+1}\neq 0$，则 $A\vec{x}=\vec{b}$ 无解；

若 $d_{r+1}=0$，则 $A\vec{x}=\vec{b}$ 有解，若 $r=n$，则解唯一；由克兰姆法则解；无自由元。

若 $r<n$，则有无穷多解；其中 $x_1\sim x_r$ 被限制，$x_{r+1}\sim x_n$ 是自由的。

$x_{r+1}\sim x_n$ 被称为自由变量，或独立变量。

定理 4.2 设 $A_{m\times n}\vec{x}=\vec{0}$，若 $m<n$，则必有非零解（非平凡解）。必有自由变量

定义 4.2 n维向量：$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$ 或 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$

n维列向量　　n维行向量

定义 4.7 n维几何向量空间：从数域 P 中的数作为分量的 n 维向量的全体组成的集合 V，同时定义上述加法与数乘是封闭的，且满足 加法交换律，结合律，逆乘数乘，数乘结合律，分配律，则称 V 是 P 上的 n 维几何向量空间。

P^n —— 一般 n维几何向量空间；R^n —— 实 n维几何向量空间，C^n —— 复 ～。

定义 4.8 线性子空间：P^n 的子集，且加法、数乘运算封闭，记为 V_1

定义 4.9 线性组合：在 n维空间向量 P^n 中，有数 $k_1,k_2,\cdots,k_n\in P$，向量 $\beta,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\in P^n$

且 $\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n$

则称 β 是 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 的线性组合

定义 4.10 线性相关：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_s\ (s\geq 1)\in P^n$，$k_1,k_2,\cdots,k_s\in P$，

且 $k_1\cdot k_2\cdot\cdots\cdot k_s\neq 0$，

$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=0$，

则称 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性相关。

线性无关：同上，使 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=0$ 的唯一解为 $k_1=k_2=\cdots=k_s=0$.

则称 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关

定理 4.3 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_s\in P^n\ (s\geq 2)$ 线性相关 $\Longleftrightarrow$ 其中至少有一个向量可经其余向量线性表出

No.

Date

定义：扩充、缩减：指的是向量集合的增大，减小。
接长、截短：指的是向量维数的增多，减少（在后面改变）。

定理 4.4　线性空间 P^n 中的向量集合 S_1 扩充成 S_2，则对 S_1, S_2 有：
(1) 若 S_1 线性相关，则 S_2 也线性相关。
(2) 若 S_2 线性无关，则 S_1 也线性无关。
(1) $(k_1, k_2, \cdots, k_s)(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s)^T = 0$，且 $k_1, k_2, \cdots, k_s$ 不全为 0。
则 $(k_1, k_2, \cdots, k_s, k_{s+1}, \cdots, k_{s+t})(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s, \alpha_{s+1}, \cdots, \alpha_{s+t})^T = 0$ 有非零解：
$(k_1, k_2, \cdots, k_s, 0, \cdots, 0)$。
(2) 反过来就好理解，互为逆否命题。
(1) 若 S_1 线性无关，S_2 不一定线性无关。（加个线性相关的集合不就行了，或个可由线性表出的也行！）
(2) 若 S_2 线性相关，S_1 不一定线性相关。

定理 4.5　把 $S_1 = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s\}$ 接长成 $S_2 = \{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s\}$，则
(1) 若 S_2 线性相关，则 S_1 也线性相关
(2) 若 S_1 线性无关，则 S_2 也线性无关。
(1) $(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s)\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_s \end{pmatrix} = 0$ 有非零解。
那么减少一些方程后的方程组，系数阵的秩至少不会增加，即 $R < S$，则一定有非零解，即 S_1 线性相关（约束变少了么，自由变量数量只会多不会少，那就有非零解了么。）
(2) 反过来。
(1) 若 S_1 线性相关，则 S_2 不一定线性相关（加个线性无关的方程组就行了么！）
(2) 若 S_2 线性无关，则 S_1 不一定线性无关（减少就有非零解了么！）

定理 4.6　设 $S_1 = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r\}$，$S_2 = \{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s\} \subset P^n$，若 (1) S_1 可经 S_2 线性表出，
(2) $r > s$，则 S_1 必线性相关。
$R(S_1) \leq R(S_2) \leq s < r$。

推论 4.1　若 $S_1 = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r\}$ 可经 $S_2 = \{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s\}$ 线性表出，且 S_1 线性无关，则 $r \leq s$
基中向量个数不超过其张成的空间

推论 4.2　任意 $n+1$ 个 n 维向量必线性相关。（每个 n 维向量都可经 n 个 n 维标准单位向量线性表出）
$R(M_{n\times(n+1)}) \leq n < n+1$，列不满秩，列向量线性相关

No.
Date

定义4.13　设 $S_1=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r\}$，$S_2=\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s\}\subset P^n$，若两向量 可以相互线性表出，则称这两向量组等价，记 $S_1\sim S_2$.　　S_1,S_2 是一个"基"生的！

定义4.14　设向量组 $S_0\subseteq S_1\subset P^n$，若：(1) S_0 线性无关

第三章　向量代数、平面与直线

定义3.7　在空间中取点 O 与3个有次序的不共面向量 e_1,e_2,e_3，构成空间中的一个仿射坐标系，记为 $\{O;e_1,e_2,e_3\}$，点 O 称为坐标原点，e_1,e_2,e_3 称为坐标向量(基向量)，基向量 e_1,e_2,e_3 所在直线分别为 x,y,z 轴，统称为坐标轴，每两条坐标轴所决定的平面 xy，yz，xz 统称为坐标平面。

定义3.8　称向量 $\overrightarrow{OP}$ 是点 P 的向径，向径 $\overrightarrow{OP}$ 在基 $\{e_1,e_2,e_3\}$ 下的坐标称为该点的仿射坐标，记作 $P(x,y,z)$。

卦限：3个坐标平面把空间分成八个区域，称为8个卦限。规定：

Ⅰ$(+,+,+)$，Ⅱ$(-,+,+)$，Ⅲ$(-,-,+)$，Ⅳ$(+,-,+)$，

Ⅴ$(+,+,-)$，Ⅵ$(-,+,-)$，Ⅶ$(-,-,-)$　Ⅷ$(+,-,-)$.

定理3.4　3个向量 $\alpha=(x_1,y_1,z_1)$，$\beta=(x_2,y_2,z_2)$，$\gamma=(x_3,y_3,z_3)$ 共面的充分必要条件是

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}=0 \qquad (\alpha,\beta,\gamma)=0 \qquad V=0$$

(注：线性相关的向量在一个超平面上)

定比分点公式：(点把线段 AB 分成定比 $\lambda:\mu$　$(\lambda+\mu\neq0)$，则

$$\overrightarrow{OC}=\frac{\mu\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{OB}}{\lambda+\mu}$$

No.

Date

定义3.9　设在直角坐标系中，向量 $\vec{OP}$ 与3个坐标向量 i,j,k 的夹角分别为 α,β,γ，称它们为向量 $\vec{OP}$ 的方向角，$\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$ 称为 $\vec{OP}$ 的方向余弦

则 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$

$\cos\alpha=\frac{x}{|\vec{OP}|}$，$\cos\beta=\frac{y}{|\vec{OP}|}$，$\cos\gamma=\frac{z}{|\vec{OP}|}$

定义3.10　数量积：两个向量 α 与 β 的数量积（又称为点积或内积）是一个实数，它等于这两个向量的长度与它们夹角 $\theta=\langle\alpha,\beta\rangle$ 余弦的乘积，记为 (α,β) 或 $\alpha\cdot\beta$，即

$$(\alpha,\beta)=\alpha\cdot\beta=|\alpha|\cdot|\beta|\cdot\cos\langle\alpha,\beta\rangle \qquad (\text{其中 } 0\le\langle\alpha,\beta\rangle\le\pi)$$

附：1) 于是向量 α 的模可表示为

$$|\alpha|=\sqrt{\alpha^2}=\sqrt{(\alpha,\alpha)}.$$

2) 若 $(\alpha,\beta)=0$，则称 α 与 β 正交（或直交），记作 $\alpha\perp\beta$。规定：零向量与任意向量正交.

内积的基本性质：(1) 对称性：$(\alpha,\beta)=(\beta,\alpha)$

(2) 齐次性：$(k\alpha,\beta)=k(\alpha,\beta)$，$\forall k\in R$

(3) 可加性：$(\alpha+\beta,\gamma)=(\alpha,\gamma)+(\beta,\gamma)$

(4) 非负性：$(\alpha,\alpha)=\alpha^2\ge0$

度量阵：　设在仿射坐标系 $\{O;e_1,e_2,e_3\}$ 下，$\alpha=\sum_{i=1}^{3}x_ie_i$，$\beta=\sum_{i=1}^{3}y_ie_i$，则

$$(\alpha,\beta)=\left(\sum_{i=1}^{3}x_ie_i,\ \sum_{i=1}^{3}y_ie_i\right)$$
$$=x_1y_1e_1^2+x_2y_2e_2^2+x_3y_3e_3^2+x_1y_2(e_1,e_2)+x_1y_3(e_1,e_3)+x_2y_1(e_2,e_1)+x_2y_3(e_2,e_3)+x_3y_1(e_3,e_1)+x_3y_2(e_3,e_2)$$

记基向量的内积 $(e_i,e_j)=a_{ij}\in R$，则称矩阵 $A=(a_{ij})_{3\times3}$ 为基 $\{e_1,e_2,e_3\}$ 的度量阵. 易知 度量阵为实对称阵.

这时可以用矩阵乘法把内积表示为

$$(\alpha,\beta)=(x_1,x_2,x_3)\cdot\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=X^TAY$$

No.

Date

1、可以把仿射坐标系下的数量积这么理解：

$$(\alpha,\beta) = (x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}e_1\\e_2\\e_3\end{pmatrix}\cdot(e_1,e_2,e_3)\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$$ （形式上记为）

$$= (x_1,x_2,x_3)\cdot\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$$

2. 度量阵A与基$\{e_1,e_2,e_3\}$可以相互求算，即已知A可以求出$|e_1|,|e_2|,|e_3|$及它们的两两夹角；已知基$\{e_1,e_2,e_3\}$可以求出A.

正交投影：由向量α的终点向向量β所在直线作垂线，则α可分解成平行于β的向量$k\beta$与正交于β的向量$\beta^{\perp}$之和，即

$$\alpha = k\beta + \beta^{\perp}, \quad k\in R$$

称$k\beta$为α在β上的正交投影向量，称$|\alpha|\cos\langle\alpha,\beta\rangle$为$\alpha$在$\beta$上的正交投影，记为$(\alpha)_\beta$.

则 $|\alpha|\cdot\cos\langle\alpha,\beta\rangle = \alpha\cdot\frac{\beta}{|\beta|} = k|\beta|$

$\therefore\ k = \frac{(\alpha,\beta)}{|\beta|^2}$

$\therefore\ \beta^{\perp} = \alpha - k\beta = \alpha - \frac{(\alpha,\beta)}{|\beta|^2}\beta = \alpha - (\alpha,\frac{\beta}{|\beta|})\frac{\beta}{|\beta|}$

正交投影的性质：(1) 若$\alpha=\beta$，则$(\alpha)_\gamma = (\beta)_\gamma$.

(2) $(k\alpha)_\beta = k(\alpha_\beta)$，$\forall k\in R$.

(3) $(\alpha+\beta)_\gamma = (\alpha)_\gamma + (\beta)_\gamma$

证明：$(\alpha+\gamma)\cdot\beta = \alpha\cdot\beta + \gamma\cdot\beta$.

证：设α与γ在β上的正交投影向量分别为 $\bar{\alpha} = k\beta$，$\bar{\gamma} = m\beta$.

因为 (α,β) ~~[illegible]~~

$= (\alpha,\frac{\beta}{|\beta|})|\beta| = \bar{\alpha}\cdot\beta$.

$\therefore\ (\alpha+\gamma)\cdot\beta = (\overline{\alpha+\gamma})\cdot\beta = (\bar{\alpha}+\bar{\gamma})\cdot\beta = (k\beta+m\beta)\cdot\beta = (k+m)\beta^2 = \bar{\alpha}\cdot\beta + \bar{\gamma}\cdot\beta = \alpha\cdot\beta+\gamma\cdot\beta$

No.

Date

柯西－施瓦茨不等式：$|(\alpha,\beta)| \le |\alpha|\cdot|\beta|$

推论：$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i^2}$

证明：$\because |(\alpha,\beta)| = \left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right|$

$|\alpha|\cdot|\beta| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}$ （$(x_i)_{1\times n}$，$(y_i)_{1\times n}$是α,β在直角坐标系下的坐标）

由 $|(\alpha,\beta)| \le |\alpha|\cdot|\beta|$ 得

$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i^2}$

定义 3.11　两个向量α与β的向量积（又称叉积或外积）$\alpha\times\beta$是个向量，其模是以α,β为边的平行四边形的面积的数值，即．向量 $\longleftrightarrow$ 几何

$|\alpha\times\beta| = |\alpha||\beta|\sin\langle\alpha,\beta\rangle$.

其方向与α,β垂直，且使$\alpha,\beta,\alpha\times\beta$构成右手系。

注：① 向量α与β共线的充分必要条件是$\alpha\times\beta=\vec{0}$　向量 $\longleftrightarrow$ 代数

② 对任意向量α，有$\alpha\times\alpha=\vec{0}$.

向量积的基本性质：

(1) 反对称性：$\alpha\times\beta = -\beta\times\alpha$.

(2) 齐次性：$(k\alpha)\times\beta = k(\alpha\times\beta)$，$\forall k\in R$

(3) 可加性：$\alpha\times(\beta+\gamma) = \alpha\times\beta+\alpha\times\gamma$

直角坐标系下向量积的计算：

设 $\alpha = x_1 i + y_1 j + z_1 k$，$\beta = x_2 i + y_2 j + z_2 k$.

$\because i\times i = j\times j = k\times k = 0$，$i\times j = k$，$j\times k = i$，$k\times i = j$.

$\therefore \alpha\times\beta = x_1x_2(i\times i) + y_1y_2(j\times j) + z_1z_2(k\times k) + x_1y_2(i\times j) + x_1z_2(i\times k) + y_1x_2(j\times i) + y_1z_2(j\times k) + z_1x_2(k\times i) + z_1y_2(k\times j)$.

$= x_1y_2k - x_1z_2j - x_2y_1k + y_1z_2i + z_1x_2j - z_1y_2i$.

$= (y_1z_2 - z_1y_2)i + (z_1x_2 - x_1z_2)j + (x_1y_2 - y_1x_2)k$

$= \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} i + \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} k$

$$= \det\begin{pmatrix} i & j & k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{pmatrix}$$ (形式上记法.)

仿射坐标系下向量积的运算:

$$\alpha\times\beta = \det\begin{pmatrix} E_2\times E_3 & E_3\times E_1 & E_1\times E_2 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{pmatrix}$$ (形式上记法)

定义 3.12 3个向量α,β,γ的混合积是个实数,它等于向量α,β先作向量积,再与γ作数量积,记作(α,β,γ),即

$$(\alpha,\beta,\gamma) = (\alpha\times\beta)\cdot\gamma$$ 不要把混合积理解成矩阵

混合积的性质: (1) 轮换性: $(\alpha,\beta,\gamma) = (\beta,\gamma,\alpha) = (\gamma,\alpha,\beta)$

(2) $(\alpha,\beta,\gamma) = -(\beta,\alpha,\gamma)$

(3) $(k\alpha,\beta,\gamma) = (\alpha,k\beta,\gamma) = (\alpha,\beta,k\gamma) = k(\alpha,\beta,\gamma),\ \forall k\in R$

(4) $(\alpha_1+\alpha_2,\beta,\gamma) = (\alpha_1,\beta,\gamma) + (\alpha_2,\beta,\gamma)$ (行列式运算规则)

(5) $(\alpha,\alpha,\gamma) = 0$

混合积的几何意义: 混合积(α,β,γ)表示以α,β,γ为棱的平行六面体的有向体积。当α,β,γ为右手系时, $V = (\alpha,\beta,\gamma)$。

例: 3个向量α,β,γ共面的充要条件是 $(\alpha,\beta,\gamma)=0$.

例: 利用混合积证明向量积的可加性.

证: 设任意向量δ,有.

$$\begin{aligned}
\delta\cdot[(\alpha+\beta)\times\gamma] &= ((\alpha+\beta),\gamma,\delta) = (\gamma\times\delta)\cdot(\alpha+\beta) \\
&= (\gamma\times\delta)\cdot\alpha + (\gamma\times\delta)\cdot\beta \\
&= (\gamma,\delta,\alpha) + (\gamma,\delta,\beta) \\
&= (\alpha,\gamma,\delta) + (\beta,\gamma,\delta) \\
&= [(\alpha\times\gamma)+(\beta\times\gamma)]\cdot\delta
\end{aligned}$$

$\therefore\ \delta\cdot[(\alpha+\beta)\times\gamma - (\alpha\times\gamma) - (\beta\times\gamma)] = 0$

$\because\ \delta$为任意向量, 故 $(\alpha+\beta)\times\gamma = \alpha\times\gamma + \beta\times\gamma$.

No.

Date

直角坐标系下混合积的运算:

设 $\alpha = x_1 i + y_1 j + z_1 k$

$\beta = x_2 i + y_2 j + z_2 k$

$\gamma = x_3 i + y_3 j + z_3 k$

$\because \alpha \times \beta = \left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right)$

$$\therefore (\alpha, \beta, \gamma) = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} x_3 + \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix} y_3 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} z_3$$

$$= \begin{vmatrix} x_3 & y_3 & z_3 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = \det(\alpha, \beta, \gamma)$$

例:设 α, β, γ 是三个不共面的向量,求空间任意向量 ξ 关于 α, β, γ 的分解式.

解:设 $\xi = x\alpha + y\beta + z\gamma$

$$\therefore \underset{\text{矩阵}}{(\alpha, \beta, \gamma)} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \xi \text{ 列向量.}$$

(由克兰姆法则) $\therefore x = \dfrac{\det(\xi, \beta, \gamma)}{\det(\alpha, \beta, \gamma)} = \dfrac{(\xi, \beta, \gamma)}{(\alpha, \beta, \gamma)}$:混合积.

同理 $y = \dfrac{(\alpha, \xi, \gamma)}{(\alpha, \beta, \gamma)}$, $z = \dfrac{(\alpha, \beta, \xi)}{(\alpha, \beta, \gamma)}$

例:直角坐标系下,以 $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$, $D(x_4, y_4, z_4)$ 为顶点的四面体体积为

$$V = \underset{\text{系数}}{\frac{1}{6}} \left| \det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{pmatrix} \right|$$

构造向量,制造混合积

No.
Date

定义 3.13 3个向量α,β,γ，其中两个向量先作向量积，得到一个向量，再与另一个向量作向量积，称为3个向量的复合积（又称双叉积或双重外积）

注：$(\alpha\times\beta)\times\gamma$ 与 $(\alpha\times\beta)$ 垂直，而 $(\alpha\times\beta)$ 与 α 和 β 都垂直，故 $(\alpha\times\beta)\times\gamma$ 与 α 和 β 共面，当 α,β 不共线时，$(\alpha\times\beta)\times\gamma$ 有 $k_1\alpha+k_2\beta$ 的形式，类似地，$\alpha\times(\beta\times\gamma)$ 应有 $m_1\beta+m_2\gamma$ 的形式，这说明在一般情况下，$(\alpha\times\beta)\times\gamma\neq\alpha\times(\beta\times\gamma)$.

复合积公式（"中项原则"）：

(1) $(\alpha\times\beta)\times\gamma=(\alpha,\gamma)\beta-(\beta,\gamma)\alpha$

(2) $\alpha\times(\beta\times\gamma)=(\alpha,\gamma)\beta-(\alpha,\beta)\gamma$

"中项原则"：复合积等于中间向量某一倍数减去括号里另一向量的某一倍数。这一倍数就是另外两向量的内积。

证明：(1) 若 $\alpha\times\beta=0$，不妨设 $\alpha=k\beta$，则

左边 $=0$，右边 $=(k\beta,\gamma)\beta-(\beta,\gamma)k\beta=0$.

(2) 若 $\alpha\cdot\beta=0$，取 α,β 的单位向量 α_0,β_0.

$\because (\alpha_0\times\beta_0)\times\gamma=x\alpha_0+y\beta_0$

$\therefore [(\alpha_0\times\beta_0)\times\gamma]\cdot\alpha_0=x\alpha_0^2$

$\therefore x=((\alpha_0\times\beta_0),\gamma,\alpha_0)=\cancel{(\gamma,\alpha_0,(\alpha_0\times\beta_0))}=(\alpha_0,(\alpha_0\times\beta_0),\gamma)$

~~同理 y=~~ $=-(\beta_0,\gamma)$

同理 $y=(\alpha_0,\gamma)$

$\therefore (\alpha_0\times\beta_0)\gamma=(\alpha_0,\gamma)\beta_0-(\beta_0,\gamma)\alpha_0$

两边乘以 $|\alpha||\beta|$，即得证.

(3) 把 β 在 α 上作正交投影，有 $\beta=k\alpha+\alpha^{\perp}$，由(2)即得证.

（由两种特殊情况代表一般情况（线性表示））

例：设3个向量 α,β,γ 不共面，证明 $(\alpha\times\beta),(\beta\times\gamma),(\gamma\times\alpha)$ 不共面

证明：
$$((\alpha\times\beta),(\beta\times\gamma),(\gamma\times\alpha))=[(\alpha\times\beta)\times(\beta\times\gamma)]\cdot(\gamma\times\alpha)$$
$$=[(\alpha,(\beta\times\gamma))\beta-(\beta,(\beta\times\gamma))\alpha]\cdot(\gamma\times\alpha)$$
$$=(\beta,\gamma,\alpha)\beta\cdot(\gamma\times\alpha)$$
$$=(\alpha,\beta,\gamma)(\alpha,\beta,\gamma)$$

因为 $(\alpha,\beta,\gamma)\neq0$，故原式 $\neq0$，即 $(\alpha\times\beta),(\beta\times\gamma),(\gamma\times\alpha)$ 不共面.

No.

Date

例：拉格朗日恒等式：

$$(\alpha_1\times\alpha_2)\cdot(\alpha_3\times\alpha_4)=(\alpha_1\cdot\alpha_3)(\alpha_2\cdot\alpha_4)-(\alpha_1\cdot\alpha_4)(\alpha_2\cdot\alpha_3)$$

证明：
$$\begin{aligned}(\alpha_1\times\alpha_2)\cdot(\alpha_3\times\alpha_4)&=(\alpha_1,\alpha_2,(\alpha_3\times\alpha_4))\\&=((\alpha_3\times\alpha_4),\alpha_1,\alpha_2)\\&=[(\alpha_3\times\alpha_4)\times\alpha_1]\cdot\alpha_2\\&=[(\alpha_3,\alpha_1)\alpha_4-(\alpha_4,\alpha_1)\alpha_3]\cdot\alpha_2\\&=(\alpha_1,\alpha_3)(\alpha_2,\alpha_4)-(\alpha_1,\alpha_4)(\alpha_2,\alpha_3)\end{aligned}$$

例：雅可比恒等式：

$$(\alpha\times\beta)\times\gamma+(\beta\times\gamma)\times\alpha+(\gamma\times\alpha)\times\beta=0.$$

1.平面的参数方程：

~~~~取空间仿射坐标系 $\{O;e_1,e_2,e_3\}$ 已知 $P_0(x_0,y_0,z_0)$，$\alpha_1=(x_1,y_1,z_1)$，$\alpha_2=(x_2,y_2,z_2)$.

$\alpha_1\times\alpha_2\neq0$，则由 P_0,α_1,α_2 确定的平面为.

$$\begin{cases}x=x_0+k_1x_1+k_2x_2\\y=y_0+k_1y_1+k_2y_2\\z=z_0+k_1z_1+k_2z_2\end{cases}\quad(k_1,k_2\text{为参数}).$$

2.平面的一般方程：

$P(x,y,z)$ 位于由 P_0,α_1,α_2 确定的平面上，意味着 $\overrightarrow{P_0P}$，α_1,α_2 共面，

此时 $(\overrightarrow{P_0P},\alpha_1,\alpha_2)=0$，即

$$\begin{vmatrix}x-x_0&y-y_0&z-z_0\\x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\end{vmatrix}=0$$

展开得 $Ax+By+Cz+D=0$. 其中 $A=\begin{vmatrix}y_1&z_1\\y_2&z_2\end{vmatrix}$，$B=\begin{vmatrix}z_1&x_1\\z_2&x_2\end{vmatrix}$，$C=\begin{vmatrix}x_1&y_1\\x_2&y_2\end{vmatrix}$，$D=-\begin{vmatrix}x_0&y_0&z_0\\x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\end{vmatrix}$

3.平面的点法式方程：

直角坐标系 $\{O;i,j,k\}$ 下，点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 与一非零向量 $n=(A,B,C)$，则唯一确定一平面垂直于向量 n，且过点 P_0. 有 $\overrightarrow{P_0P}\cdot n=0$，即

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0.$$

称向量 $n=(A,B,C)$ 为平面的法向量.

平面上的任一点必满足平面方程；反之，任一满足平面方程的点必在平面上.
~~~~

No.

Date

附 4.(平面的三点式方程)：已知 P_0, P_1, P_2，设 $P(X, Y, Z)$ 是平面上任一点．则平面方程为

$$\begin{vmatrix} 1 & X & Y & Z \\ 1 & X_0 & Y_0 & Z_0 \\ 1 & X_1 & Y_1 & Z_1 \\ 1 & X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix} = 0.$$

5.(平面的截距式方程) 设平面与 X, Y, Z 轴分别交于点 $(a,0,0), (0,b,0), (0,0,c)$. 则平面方程为

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

平面的位置关系：①相交：$(A_1, B_1, C_1), (A_2, B_2, C_2)$ 线性无关 (不共线).

②平行：$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}$　　$0 = D'$ $(D' \neq 0)$ 无解

③重合：$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$.　　$0 = 0$ 恒有解

1.直线的参数方程：取空间仿射坐标系 $\{O; e_1, e_2, e_3\}$，已知 $P_0(x_0, y_0, z_0)$，$v = (X, Y, Z)$，则直线方程

$$\begin{cases} x = x_0 + tX \\ y = y_0 + tY \\ z = z_0 + tZ \end{cases}$$

(称 v 为直线的方向向量).

2.直线的标准方程(点向式方程)(对称方程)：

$$\frac{x - x_0}{X} = \frac{y - y_0}{Y} = \frac{z - z_0}{Z}$$

(即 $(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ 与 (X, Y, Z) 线性相关).

3.直线的一般方程(普通方程)：两相交平面的联立方程表示直线.

$$\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z = 0 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z = 0. \end{cases}$$

直线间位置关系：l_1, l_2 分别过点 $P_1(x_1, y_1, z_1)$，$P_2(x_2, y_2, z_2)$，方向向量 $v_1 = (X_1, Y_1, Z_1)$，$v_2 = (X_2, Y_2, Z_2)$

l_1, l_2 异面 $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix} \neq 0.$　　三向量异面

l_1, l_2 相交 $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix} = 0$ 且 $v_1 \times v_2 \neq 0$.　　三向量共面

No.

Date

平面束：通过给定直线 l 的所有平面的全体.

设直线 l 的方程为 $\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$

则方程

$$\lambda_1(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\lambda_2(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0 \qquad (\lambda_1^2+\lambda_2^2\neq 0).$$

表示过直线 l 的平面束

直线的夹角：直线 l_1, l_2 的方向量的夹角（或其补角）。

直线与平面的夹角：若直线~~的~~方向向量与平面法向量夹角为 θ，则~~直线~~直线与平面夹角为 $|\frac{\pi}{2}-\theta|$（或其补角）.

1. 点到平面的距离：取平面上一点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$，$\vec{n}$ 为平面法向量

则 $d=\dfrac{|\overrightarrow{P_0M}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|}$，即

$$d=\frac{|Ax_1+By_1+Cz_1+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

← 把任意一点的坐标代入平面一般方程的左边值即为 $\overrightarrow{P_0M}\cdot\vec{n}$.

2. 点到直线的距离：已知直线上一点 P_0 与直线的方向向量 $\vec{r}=(X, Y, Z)$，

则点 M 到直线的距离就是以 P_0 为一个顶点，以 $\overrightarrow{P_0M}, \vec{r}$ 为两邻边的平行四边形的 $\vec{r}$ 边上的高. 即

$$d=\frac{|\overrightarrow{P_0M}\times\vec{r}|}{|\vec{r}|}$$

几何思路

3. 异面直线间的距离. 已知 $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ 分别为两异面直线 l_1, l_2 的方向向量，P_1, P_2 分别 l_1, l_2 上两点

则两直线间距离为以 $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \overrightarrow{P_1P_2}$ 为边的平行六面体在面 $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ 上高，即

$$d=\frac{|(\overrightarrow{P_1P_2}, \vec{r}_1, \vec{r}_2)|}{|\vec{r}_1\times\vec{r}_2|}$$

注：$(\overrightarrow{P_1P_2}, \vec{r}_1, \vec{r}_2)\neq 0 \Rightarrow$ 直线 l_1, l_2 异面.

几何思路

第五章 线性空间与欧氏空间

线性空间（向量空间）所含的元素（向量）是抽象向量，比几何中的向量涵义更广泛，它可以是矢量、数、函数、矩阵、函数向量、线性变换。

变换：线性空间V到自身的映射是一个变换。

定义5-1 设P是一个数域，V是一个非空集合，若在V上定义加法和数乘这两种代数运算，且加法、数乘封闭，又有

(1) $\alpha \oplus \beta = \beta \oplus \alpha$； 加法交换律

(2) $(\alpha \oplus \beta) \oplus \gamma = \alpha \oplus (\beta \oplus \gamma)$； 加法结合律

(3) 存在零元 $0 \in V$，使 $\forall \alpha \in V$，有 $\alpha \oplus 0 = \alpha$； 加法零元

(4) $\forall \alpha \in V$，$\exists \beta \in V$，使 $\alpha \oplus \beta = 0$；（称β为α的负元，记为$\beta = -\alpha$）. 加法负元.

(5) $1 \circ \alpha = \alpha$ 数乘1不变.

(6) $k \circ (l \circ \alpha) = (kl) \circ \alpha$ 数乘结合律

(7) $k \circ (\alpha \oplus \beta) = (k \circ \alpha) \oplus (k \circ \beta)$ 数乘分配律

(8) $(k+l) \circ \alpha = (k \circ \alpha) \oplus (l \circ \alpha)$ 数乘分配律

对 $\forall \alpha, \beta, \gamma \in V$，$\forall k, l \in P$ 成立，则称V是数域P上的一个线性空间（向量空间）。V中任意元素均称为向量。

n维几何向量空间就是一个数域P上的线性空间.

定义5-2 设W是数域P上线性空间V的一个非空子集，若W对于V的两种代数运算也能在P上构成一个线性空间，称W是V的一个线性子空间.（简称子空间）.

平凡子空间：零空间（V的零元构成的空间）与V两个子空间（其它子空间称为非平凡子空间或真子空间）.

定义5-3 设$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$是线性空间V中的一组向量，则非空子集 $W = \{\sum_{i=1}^{r} k_i\alpha_i \mid \forall k_i \in P\}$ 能构成V的一个子空间，称W为V的一个生成子空间，记为 $W = L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r)$，并称$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$为生成向量组，称每个向量$\alpha_i$为生成元 $(i=1, 2, \cdots, r)$.

No.

Date

线性空间的一些简单性质：

(1) 零向量唯一； $(\theta_1 = \theta_1 \oplus \theta_2 = \theta_2 \oplus \theta_1 = \theta_2)$

(2) 负向量唯一； $(\beta = \beta \oplus (\alpha \oplus \gamma) = (\beta \oplus \alpha) \oplus \gamma = \gamma)$

(3) $0 \circ \alpha = 0$，$k \circ 0 = 0$，$(-1) \circ \alpha = -\alpha$； $(\alpha + 0 \circ \alpha = \alpha)$ $(k \circ 0 + k \circ \alpha = k \circ \alpha)$ $(\alpha \oplus (-1) \alpha = 0)$

(4) 若 $k \circ \alpha = 0$，则 $k=0$ 或 $\alpha = 0$

定理 5.1　若线性空间 V 的非空子集 W 对 V 的两种代数运算封闭，则 W 是 V 的一个子空间.

定义 5.4　若线性空间 V 中有 n 个线性无关的向量，而没有更多数目的线性无关的向量，则称 V 是 n 维的. 记作 $\dim V = n$.

n 个线性无关的向量称为 V 的一组基.

注：若 V 中可以找到任意多个线性无关的向量，就称 V 是无限维的。
规定零空间 $\{0\}$ 的维数为 0，且无基。

设 $\varepsilon_i\ (i=1,2,\cdots,n)$ 为 V 的一组基，若 V 中任一向量 α 满足：

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} k_i \varepsilon_i = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} \in V \qquad \text{(形式上书写)}$$

则称 $k = (k_1, k_2, \cdots, k_n)^T$ 为 α 在基 $\{\varepsilon_i\}_n$ 下的坐标，且唯一确定.

定理 5.2　设 $\{\varepsilon_i\}_n$ 是 V 中 n 个线性无关的向量，若 V 中任一向量都可经过它们线性表出，则 $\dim V = n$，且 $\{\varepsilon_i\}_n$ 是 V 的一组基.

注：① 解空间的基就是个基础解系，解空间的维数即基础解系所含向量数.

② 维数与所考虑的数域是相关的.

③ $\dim W \le \dim V$ ； $\dim W = \dim V \Leftrightarrow W = V$

定理 5.3　(1) 两个向量组生成相同子空间的充要条件是这两个向量组等价

(2) $L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s)$ 的维数等于向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s$ 的秩.

定理 5.4　设 $\{\varepsilon_i\}_n$ 是 n 维线性空间 V 的一组基，在这组基下，$\alpha_i \in V$ 的坐标是列向量 $X^i\ (i=1,2,\cdots,s)$，则 V 中向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性无关的充要条件是它们的坐标也线性无关.

定理5.5（基扩充定理）．设U是n维线性空间V的一个m维子空间，则U的任一组基都可扩充成V的一组基．

定义：设$\{\varepsilon_i\}_n$与$\{\varepsilon_i'\}_n$是n维线性空间V的两组基，且

$$(\varepsilon_1', \varepsilon_2', \cdots, \varepsilon_n') = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n) A$$ 在右边．

则称$A=(a_{ij})_{n\times n}$是由基$\{\varepsilon_i\}_n$到基$\{\varepsilon_i'\}_n$的过渡阵，它是可逆且唯一的．

定理5.6　设线性空间V中基$\{\varepsilon_i\}_n$到基$\{\varepsilon_i'\}_n$的过渡阵为A，V中向量ξ在这两组基下的坐标分别为x和y．则

$$\boxed{y = A^{-1}x}$$ 在右边

这就是坐标变换公式．

证明：
$$(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n) x = (\varepsilon_1', \varepsilon_2', \cdots, \varepsilon_n') y$$
$$= (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n) A y.$$

由坐标的唯一性有　$x = Ay$，故 $y = A^{-1}x$．

点的移轴坐标变换公式：

设$\{O'; e_1', e_2', e_3'\}$与$\{O; e_1, e_2, e_3\}$是新旧两个仿射坐标系，点P的新旧坐标分别为$(x', y', z')^T$，$(x, y, z)^T$；O'点在$\{O; e_1, e_2, e_3\}$下的坐标为$(x_0, y_0, z_0)^T$．

则 $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P}$，即

$$(e_1, e_2, e_3)(x, y, z)^T = (e_1, e_2, e_3)(x_0, y_0, z_0)^T + (e_1', e_2', e_3')(x', y', z')^T.$$
$$= (e_1, e_2, e_3)\left[(x_0, y_0, z_0)^T + A(x', y', z')^T\right]$$

$$\therefore \boxed{(x, y, z)^T = A(x', y', z')^T + (x_0, y_0, z_0).}$$

定义5.5　V到V自身的映射称为V的变换．

定义5.6　设$\mathcal{A}$是线性空间V的一个变换，若$\forall \alpha, \beta \in V$，$\forall k, l \in P$，都有

$$\mathcal{A}(k\alpha + l\beta) = k\mathcal{A}(\alpha) + l\mathcal{A}(\beta)$$

则称$\mathcal{A}$是线性空间V到自身的一个线性变换．

No.
Date

线性变换的简单性质：

(1) $\mathcal{A}(0)=0$, $\mathcal{A}(-\alpha)=-\mathcal{A}(\alpha)$

(2) $\mathcal{A}(\sum_{i=1}^{s}k_i\alpha_i)=\sum_{i=1}^{s}k_i\mathcal{A}(\alpha_i)$

列线性无关性 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)\longleftrightarrow\mathcal{A}(x_1,x_2,\cdots,x_n)$

(3) 若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\in V$ 线性相关，则 $\mathcal{A}(\alpha_1),\mathcal{A}(\alpha_2),\cdots,\mathcal{A}(\alpha_s)$ 也线性相关.

(4) 若 $\mathcal{A}(\alpha_1),\mathcal{A}(\alpha_2),\cdots,\mathcal{A}(\alpha_s)$ 线性无关，则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 也线性无关.

定义：设 $\{\varepsilon_i\}_n$ 是线性空间 V 的一组基，$\mathcal{A}$ 是 V 的一个线性变换，若

$$\mathcal{A}(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)A,$$

则称 A 是 $\mathcal{A}$ 在基 $\{\varepsilon_i\}_n$ 下的矩阵，A 为 n 阶矩阵.

定理 5.7 设线性变换 $\mathcal{A}$ 在线性空间 V 的基 $\{\varepsilon_i\}_n$ 下的矩阵是 A，V 中向量 α，$\mathcal{A}(\alpha)$ 在基 $\{\varepsilon_i\}_n$ 下的坐标分别为 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$ 与 $y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^T$，则

$$\boxed{y=Ax}$$

在左边

证明：$\underbrace{(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)}_{\text{列线性无关}}A\cdot x=(\mathcal{A}(\varepsilon_1),\mathcal{A}(\varepsilon_2),\cdots,\mathcal{A}(\varepsilon_n))\cdot x$

$$=\sum_{i=1}^{n}x_i\mathcal{A}(\varepsilon_i)$$

$$=\mathcal{A}(\alpha)$$

$$=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)y.$$

线性空间的性质 $\mathcal{A}(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)x=\mathcal{A}(\alpha)$.

$\therefore\ y=Ax.$

定义 5.7 设 $\mathcal{A}$ 是线性空间 V 下的一个线性变换，$\mathcal{A}$ 的全体像组成的集合称为 $\mathcal{A}$ 的值域或像空间. 用 $\mathcal{A}V=\{\mathcal{A}(\alpha)\mid\alpha\in V\}$ 表示.

所有被 $\mathcal{A}$ 变成零向量的向量组成的集合称为 $\mathcal{A}$ 的核或核空间. 用 $\mathcal{A}^{-1}(0)=\{\alpha\mid\mathcal{A}(\alpha)=0,\alpha\in V\}$ 表示

$\mathcal{A}V$ 的维数称为 $\mathcal{A}$ 的秩，记为 $R(\mathcal{A})=\dim\mathcal{A}V$;

$\mathcal{A}^{-1}(0)$ 的维数称为 $\mathcal{A}$ 的零度. 记为 $n(\mathcal{A})=\dim\mathcal{A}^{-1}(0)$.

定理 5.10 设 $\{\varepsilon_i\}_n$ 是 n 维线性空间 V 的一组基，V 的线性变换 $\mathcal{A}$ 在基 $\{\varepsilon_i\}_n$ 下的矩阵为 A，则

(1) $\mathcal{A}$ 的值域 $\mathcal{A}V$ 是

$$\mathcal{A}V=\mathcal{L}(\mathcal{A}(\varepsilon_1),\mathcal{A}(\varepsilon_2),\cdots,\mathcal{A}(\varepsilon_n))$$

(2) $R(\mathcal{A})=R(A)$

$R(\mathcal{A})=$ ~~[illegible]~~

※ $R(\mathcal{A})=R\{\mathcal{A}(\varepsilon_1),\mathcal{A}(\varepsilon_2),\cdots,\mathcal{A}(\varepsilon_n)\}=\mathcal{A}(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)$ 的

定理 5.11 （维数公式）

$$\dim \mathcal{A}V + \dim \mathcal{A}^{-1}(0) = n \qquad (n = \dim V).$$

$(\dim \mathcal{A}V = R(\mathcal{A}) = R(A)$ ； $\dim \mathcal{A}^{-1}(0) =$ “$XA=0$”的基础解系中元素的个数 $= n-R(A$

$=$ A的列秩 $= R(A)$

No.

Date

第六章 特征值与特征向量

定义 6.1 $\mathcal{A}$是数域P上线性空间V的一个线性变换．若$\exists\lambda_0\in P$，$\alpha\neq0$，st
谈讨零向量无意义

$$\mathcal{A}(\alpha)=\lambda_0\alpha$$

则称λ_0为$\mathcal{A}$的一个特征值，或特征根；α为$\mathcal{A}$的属于λ_0的一个特征向量

注：① $\mathcal{A}(\alpha)=\lambda_0\alpha$的几何意义：向量$\alpha$在线性变换$\mathcal{A}$下，像与原像共线．

② 一个特征向量只属于一个特征值．

③ 设X是向量α在基$\{\varepsilon_i\}_{i=1}^n$下的坐标，$A$是$\mathcal{A}$在$\{\varepsilon_i\}_{i=1}^n$下的矩阵．则

$$\underbrace{AX}_{\mathcal{A}(\alpha)\text{在基下坐标}}=\lambda_0\underbrace{X}_{\alpha\text{坐标}}，\text{即}\ (\lambda_0 I_n-A)X=0.$$

特征值问题从$\mathcal{A}$到A的转变．

定义 6-2 A是数域P上的一个n阶方阵，λ是个数字，

则称(λI_n-A)是A的特征矩阵，

$|\lambda I_n-A|$是A的特征多项式，

$f(\lambda)=|\lambda I_n-A|=0$为$A$的特征方程，其在$\mathbb{C}$上的根为$A(\mathcal{A})$的特征根．

定理 6.1 设$\{\lambda_i\}_{i=1}^n$是n阶方阵$A=(a_{ij})_{n\times n}$的n个特征值，即

$$f(\lambda)=|\lambda I_n-A|=\prod_{i=1}^n(\lambda-\lambda_i)$$

则 (1) $\boxed{\sum_{i=1}^n\lambda_i=\sum_{i=1}^n a_{ii}}$ （称为A的迹，记为trA）

(2) $\boxed{\prod_{i=1}^n\lambda_i=|A|}$ 行列式的值，即为其矩阵所有特征值（包括重根）的乘积．

证明：(1) $f(\lambda)=|\lambda I_n-A|$有一项是主对角元的乘积

$$(\lambda-a_{11})(\lambda-a_{22})\cdots(\lambda-a_{nn})=\lambda^n-\sum_{i=1}^n a_{ii}\cdot\lambda^{n-1}+\cdots$$

其余项中λ次数至多为$n-2$，

又 $\prod_{i=1}^n(\lambda-\lambda_i)=\lambda^n-\sum_{i=1}^n\lambda_i\cdot\lambda^{n-1}+\cdots$

$\therefore$ (1)成立．

(2) 在 $|\lambda I_n-A|=\prod_{i=1}^n(\lambda-\lambda_i)$ 中取$\lambda=0$得

$$(-1)^n|A|=(-1)^n\prod_{i=1}^n\lambda_i$$

$\therefore$ (2)成立．

注：由代数学基本定理，n次复系数多项式在复数域上一定有n个根．

所以任意n阶方阵在$\mathbb{C}$上一定有n个复特征根．

No.

Date

推论6-1　$A=(a_{ij})_{n\times n}$ 可逆 的充分必要条件是 A 的 n 个特征值全不为 0.

证：$\because \prod_{i=1}^{n}\lambda_i = |A|$ □.

结论：1° n 阶方阵 A 与 A^T 具有相同的特征多项式与相同的特征值.

证明：$|\lambda I_n - A| = |(\lambda I_n - A)^T| = |\lambda I_n - A^T|$、□.

2° 若 A 为块三角阵，不妨设 $A=\begin{pmatrix} A_1 & & * \\ & A_2 & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s\end{pmatrix}$，其中 A_i 为 n_i $(i=1,2,\cdots,s)$ 阶方阵

则 $f_A(\lambda) = \prod_{i=1}^{s} f_{A_i}(\lambda)$.

证：$|\lambda I_n - A| = \begin{vmatrix} \lambda I_{n_1}-A_1 & & * \\ & \lambda I_{n_2}-A_2 & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda I_{n_s}-A_s\end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{s}|\lambda I_{n_i}-A_i| = \prod_{i=1}^{s} f_{A_i}(\lambda)$.

定理6-2（哈密尔顿—凯莱定理）

设 A 是数域 P 上一个 n 阶方阵，$f(\lambda)=|\lambda I_n - A|$ 是 A 的特征多项式，则

$f(A) = A^n - \sum_{i=1}^{n} a_{ii}A^{n-1} + \cdots + (-1)^n |A| I_n = 0$.

结论：A^n 可被 $\{A^i\}_n$ $(i=0,1,\cdots,n-1)$ 线性表出，

进而，A^k $(k\geq n)$ 均可被 $\{A^i\}_n$ $(i=0,1,\cdots,n-1)$ 线性表出。

推论6-2　设 $\mathcal{A}$ 是有限维线性空间 V 的线性变换，$f(\lambda)$ 是 $\mathcal{A}$ 的特征多项式，则 $f(\mathcal{A})=0$.

定理6-3　设线性空间 V 的线性变换 $\mathcal{A}$ 在两组基 $\{\varepsilon_i\}_n$，$\{\eta_i\}_n$ 下的矩阵分别为 A、B，基 $\{\varepsilon_i\}_n$ 到基 $\{\eta_i\}_n$ 的过渡阵为 X，则 $B = X^{-1}AX$.

证：$\mathcal{A}(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n) = (\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)A$

$= (\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)X^{-1}A$

$= \mathcal{A}(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)X^{-1} = (\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)BX^{-1}$

$\therefore B = X^{-1}AX$

No.
Date

定义6.3　设 A,B 均为 n 阶方阵，若存在可逆阵 X，使得

$$B = X^{-1}AX$$

则称 A 相似于 B，记为 $A \sim B$.

定理6.4　同一个线性变换在不同基下的矩阵是相似的；反过来，若两个矩阵相似，则它们可看作同一线性变换在两组基下对应的矩阵.

结论：线性变换的特征值与特征向量与基的选择无关.

证：1° $|\lambda I_n - A| = |X^{-1}||\lambda I_n - A||X|$

$$= |\lambda X^{-1}I_nX - X^{-1}AX|$$

$$= |\lambda I_n - B|$$

∴ A,B 的特征多项式相同，故 A,B 的特征值相同.

2° 设 α 是 λ_0 下的特征向量，它在 $\{e_i\}_n$ 与 $\{\eta_i\}_n$ 下坐标分别为 x,y.

则 $y = X^{-1}x$

~~∵ $(\lambda_0 I_n - B)y =$~~

∵ $(\lambda_0 I_n - B)y = (\lambda_0 I_n - X^{-1}AX)X^{-1}x = (\lambda_0 X^{-1} - X^{-1}A)x = X^{-1}(\lambda_0 I_n - A)x$

又 $(\lambda_0 I_n - A)x = 0$

∴ $(\lambda_0 I_n - B)y = 0$. □

相似阵的基本性质：

(1) 相似阵 强于 相抵阵.

(2) 相似阵满足等价关系：

反身性、对称性，传递性

(3) 若 $B_1 = X^{-1}A_1X$，$B_2 = X^{-1}A_2X$，则

$B_1 + B_2 = X^{-1}(A_1 + A_2)X$，$B_1B_2 = X^{-1}(A_1A_2)X$　（注意这里的 X 是公共的.）

(4) 若 $A \sim B$，$g(x) \in P[x]_m$，则 $g(A) \sim g(B)$

(5) 相似阵具有相同的秩与相同的行列式的值.

(6) 可逆阵只与可逆阵相似，不可逆阵与不可逆阵相似.

(7) 若 A,B 可逆，$A \sim B$，则 $A^{-1} \sim B^{-1}$. 交

(8) 相似阵有相同的迹.

定理6.5 (1) 设 $\mathcal{A}$ 是 n 维线性空间的一个线性变换，$\mathcal{A}$ 能在某一组基下的矩阵为对角阵的充要条件是 $\mathcal{A}$ 具有 n 个线性无关的特征向量.

~~(2) n阶方阵A能相似于对角阵的充分必要条件是，A具有n个线性无关的特征向量.~~

注：对角阵中特征值的顺序是和它们所对应的特征向量在 X 中的排列顺序一样。

定理6.6 属于不同特征值的特征向量线性无关.

证：假设存在不全为0的系数 $k_1, k_2, \cdots, k_r$ 使.

$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_r\alpha_r = 0$ （$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 分别是属于 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r$ 的特征向量）

则 $\mathcal{A}(k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_r\alpha_r) = k_1\lambda_1\alpha_1 + k_2\lambda_2\alpha_2 + \cdots + k_r\lambda_r\alpha_r = 0$

同理对 $i \in \{1, 2, \cdots, n-1\}$.

$$\mathcal{A}^i(k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_r\alpha_r) = k_1\lambda_1^i\alpha_1 + k_2\lambda_2^i\alpha_2 + \cdots + k_r\lambda_r^i\alpha_r = 0$$

$\therefore$

$$(k_1\alpha_1, k_2\alpha_2, \cdots, k_r\alpha_r)\begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & \lambda_r & \cdots & \lambda_r^{n-1} \end{pmatrix} = 0$$

$\because$ 右边的矩阵的行列式为范德蒙行列式，其中 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r$ 互异，故其行列式不为0，为可逆阵.

$\therefore (k_1\alpha_1, k_2\alpha_2, \cdots, k_r\alpha_r)$ 的秩为0.

$\therefore k_1 = k_2 = \cdots = k_r = 0$，与假设矛盾. $\square$

推论6.3 若在 n 维线性空间上，线性变换 $\mathcal{A}$ 的特征多项式在数域 P 中有 n 个不同的根，即没有重根，则 $\mathcal{A}$ 在某组基下的矩阵是对角阵.

定理6.7 若 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r$ 是线性变换 $\mathcal{A}$ 的不同特征值，而 $\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \cdots, \alpha_{ik_i}$ 是属于 λ_i 的线性无关的特征向量 $(i = 1, 2, \cdots, r)$，则向量组 $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \cdots, \alpha_{1k_1}, \cdots, \alpha_{r1}, \alpha_{r2}, \cdots, \alpha_{rk_r}$ 也线性无关.

No.

Date

定义6.4　属于特征值 λ_0 的全部特征向量再添上零向量所构成的集合

$$V_{\lambda_0}=\{\alpha \mid A\alpha=\lambda_0\alpha,\ \alpha\in V\} \quad 与 \quad V'_{\lambda_0}=\{X \mid AX=\lambda_0 X,\ X\in P^n\}$$

分别称为 A 与 A 属于 λ_0 的特征子空间。

注：V_{λ_0}，V'_{λ_0} 的维数等于 $n-R(\lambda_0 I_n-A)$.

定义6.5　根据代数学基本定理，在复数域 $\mathbb{C}$ 中把 n 阶方阵 A 的特征多项式标准分解为：

$$f(\lambda)=|\lambda I_n-A|=(\lambda-\lambda_1)^{k_1}(\lambda-\lambda_2)^{k_2}\cdots(\lambda-\lambda_r)^{k_r},$$

其中 $\lambda_i\neq\lambda_j\ (i\neq j)$，$\sum_{i=1}^{r}k_i=n$.

称 k_i 为特征值 λ_i 的代数重数，称每个特征值 λ_i 的特征子空间的维数为 λ_i 的几何重数。

定理6.8　任一特征值的几何重数不大于它的代数重数。

推论6.5　设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r$ 是 n 维线性空间 V 上线性变换 A 的全部互异特征值，则 A 在某组基下的矩阵为对角阵的充分必要条件是，A 的特征子空间 $V_{\lambda_1},V_{\lambda_2},\cdots,V_{\lambda_r}$ 的维数之和等于线性空间 V 的维数 n.

~~推论6.6　设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r$ 是 n阶方阵 A~~

定义6.6　形如 $J(\lambda,k)=\begin{pmatrix}\lambda & & & 0\\ 1 & \lambda & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & \lambda\end{pmatrix}_{k\times k}$ 的 k 阶方阵称为若当块，其中 $\lambda\in\mathbb{C}$，

块

"1"有几个，几何重数就有几个.

由若干个若当块组成的对角阵

$$J=\begin{pmatrix}J_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & J_s\end{pmatrix}$$

称为若当阵，或若当标准形矩阵。

注：相同的若当块在一个若当阵中可重复出现

No.

Date

定理6.9（若当定理） 设$\mathcal{A}$是复数域上n维线性空间V的一个线性变换，则在V中必存在一组基，使$\mathcal{A}$在这组基下的矩阵是若当阵J。且除若当块的排列次序外，J被$\mathcal{A}$唯一确定，称J为$\mathcal{A}$的若当标准形矩阵。

注：若当阵的主对角线上的元素是$\mathcal{A}$的特征多项式的全部特征根。

定理6.11 设A是n阶厄米特阵（实对称阵），则

(1) A的所有特征值都是实数

(2) 属于A的不同特征值的特征向量彼此正交.

$$\underbrace{\begin{pmatrix}1&&\\&a&\\&&ab\end{pmatrix}}_{P^{-1}\text{(变换阵)}}\begin{pmatrix}2&a&\\&2&b\\&&2\end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix}1&&\\&\frac{1}{a}&\\&&\frac{1}{ab}\end{pmatrix}}_{P\text{(变换阵)}}=\begin{pmatrix}2&1&\\&2&1\\&&2\end{pmatrix}$$

从矩阵基本变换的角度来作 从非标准约当阵到标准约当阵的变换更直观.
（左乘$\to$行变换；右乘$\to$列变换）

问题：(1) $A\cdot B$的秩？ 1° $R(AB)=R(B)-\underbrace{\dim(A^{-1}(0)\cap \mathcal{L}(B))}$ B的列向量的极大无关组张成的空间落在A的核空间的维数.

(2) 证明定理6.8.

(3)
$$\begin{pmatrix}\lambda&&&\\1&\lambda&&\\&&\lambda&\\&&1&\lambda\end{pmatrix}\overset{?}{\sim}\begin{pmatrix}\lambda&&&\\1&\lambda&&\\&1&\lambda&\\&&&\lambda\end{pmatrix}\ \times$$

2° 假设λ_0的代数重数为r，几何重数比代数重数大，不妨设为$r+1$.

则V_{λ_0}的一组基为$x_1,x_2,\cdots,x_{r+1}$，把它扩充为A的一组基$x_1,x_2,\cdots,x_{r+1},y_1,\cdots,y_l$

则 $\mathcal{A}(x_1,\cdots,x_{r+1},y_1,\cdots,y_l)=(x_1,\cdots,x_{r+1},y_1,\cdots,y_l)\left(\begin{array}{c|c}\underbrace{\begin{matrix}\lambda_0&&\\&\ddots&\\&&\lambda_0\end{matrix}}_{r+1\text{个}}&A\\\hline 0&B\end{array}\right)$

而 $\left|\lambda I-\left(\begin{array}{c|c}\begin{matrix}\lambda_0&&\\&\ddots&\\&&\lambda_0\end{matrix}&A\\\hline 0&B\end{array}\right)\right|=(\lambda-\lambda_0)^{r+1}|\lambda I-B|$

$\therefore$ λ_0的代数重数至少为$r+1$，与假设矛盾. □

No.

Date