定义：线性映射：

V, W 是数域 P 的线性空间，φ 是 V 到 W 的映射.

$\forall \alpha, \beta \in V$，$\forall k, l \in P$，：$\varphi(k\alpha + l\beta) = k\varphi(\alpha) + l\varphi(\beta)$

则称 φ 是 V 到 W 的线性映射.

1° $V \to V$ 的线性映射 $\Leftrightarrow$ 线性变换

2° $V \to P$ 的线性映射 $\Leftrightarrow$ 线性函数.

定义：直和：

V_1, V_2 是线性空间 V 的子空间.

若 $V_1 + V_2$ 中每个向量 α 的分解式 $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ 唯一，

则称 $V_1 + V_2$ 为直和，记为 $V_1 \oplus V_2$.

定义：不变子空间：

$\mathcal{A}$ 是 V/P 的线性变换，W 是 V 的子空间，

$\forall \xi \in W$，：$\mathcal{A}\xi \in W$，则称 W 是 $\mathcal{A}$ 的不变子空间，或 $\mathcal{A}$-子空间.

定义：幂零矩阵

$B^{q-1} \neq 0$，$B^q = 0$，则称 B 为幂零指数为 q 的幂零矩阵。

定义：$\mathcal{A}|W$

线性变换 $\mathcal{A}$ 在其不变子空间 W 上引起的变换。

定理：$\mathcal{A}$ 是线性空间 V 上的线性变换。$\mathcal{A}^{k-1}\xi \neq 0$，$\mathcal{A}^k\xi = 0 \Rightarrow \mathcal{A}^{k-1}\xi, \mathcal{A}^{k-2}\xi, \cdots, \xi$ 线性无关。

命题：$\mathcal{B}$ 是 V 上的线性变换，$\mathcal{B}^n\alpha = 0$，$\mathcal{B}^{n-1}\alpha \neq 0$，则在基 $\{\mathcal{B}^{n-1}\alpha, \cdots, \mathcal{B}\alpha, \alpha\}$ 下，$\mathcal{B}$ 的矩阵为 $J_n(0)$

QR 分解定理：若 $A \in R^{n\times n}$ 可逆，则 A 可分解为 $A = QR$，其中 Q 为正交矩阵，R 为上三角矩阵

(同于 Gram-Schmidt 正交化过程)

欧氏空间

正交相似.

线性~~变换~~在不同标准正交基下的矩阵是正交相似的∵

$$B = \cancel{T^{-1}AT} \cancel{=} T'AT \quad (\,T' = T^{-1})$$

命题：$A, B \in R^{n\times n}$. A与B正交相似 ⟺ A, B是n维欧氏空间V上的一个线性变换在不同标准正交基下的矩阵.

命题：A, B正交相似, A是正交矩阵 ⟹ B是正交矩阵.

正交变换中的旋转.

~~(复特征值)~~ 如果实正交矩阵A有一个复特征值 $\lambda = a+ib$，对应的复特征向量为 $z = x+iy$，$a, b \in R$，$x, y \in R^n$。则

1° $\lambda = e^{i\theta}$

2° $|x| = |y|$，$x \perp y$

3° $Az = \lambda z$ 写成 $A(x,y) = (x,y)\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

证明：~~由 $Az = \lambda z$ 得 $A(x+iy) = (a+ib)(x+iy)$~~

~~$\therefore \begin{cases} Ax = ax-by \\ Ay = ay+bx \end{cases}$~~

$\because Az = \lambda z$

$\therefore \forall c \in \mathbb{C}$，$A(cz) = \lambda(cz)$

令 $c = e^{i\alpha}$

则 $A(x+iy)e^{i\alpha} = (a+ib)(x+iy)e^{i\alpha}$

令 $(x+iy)e^{i\alpha} = (x+iy)(\cos\theta + i\sin\theta) = (x\cos\theta - y\sin\theta) + i(y\cos\theta + x\sin\theta) = x' + iy'$

则 $\begin{cases} Ax' = ax' - by' & ① \\ Ay' = ay' + bx' & ② \end{cases}$

由 ①²、②² 得

$$\begin{cases} |x'|^2 = a^2|x'|^2 + b^2|y'|^2 - 2ab\langle x', y'\rangle \\ |y'|^2 = a^2|y'|^2 + b^2|x'|^2 + 2ab\langle x', y'\rangle \end{cases}$$

两式相加得 $a^2+b^2=1$. ③

两式相减，利用 $a^2+b^2=1$ 得

$$a(|x'|^2 - |y'|^2) = b(2\langle x', y'\rangle) \quad ④$$

$\because |x'|^2 = |x|^2\cos^2\alpha + |y|^2\sin^2\alpha - 2\langle x, y\rangle \sin\alpha\cos\alpha$

$|y'|^2 = |y|^2\cos^2\alpha + |x|^2\sin^2\alpha + 2\langle x, y\rangle \sin\alpha\cos\alpha$

$\langle x', y'\rangle = \langle x, y\rangle \cos 2\alpha + (|x'|^2 - |y'|^2)\sin\alpha\cos\alpha$

令 $\alpha = \frac{\pi}{2}$，代入得

$$a(-2\langle x,y\rangle) = b(|x|^2 - |y|^2) \quad ⑤$$

联立④,⑤得 $\begin{cases} \langle x,y\rangle = 0 & ⑥ \\ |x| = |y| & ⑦ \end{cases}$ □.

由性质3°，可以将 x,y 单位化，并扩展成 $\mathbb{R}^n$ 的一组标准正交基：

$$A\{x,y,\varepsilon_3,\cdots,\varepsilon_n\} = \{x,y,\varepsilon_3,\cdots,\varepsilon_n\}\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & \\ -\sin\theta & \cos\theta & \\ & & \text{正交} \end{pmatrix}$$

~~$\because (x', \varepsilon_3) = xA$~~

$\because x'\varepsilon_i = x'A'A\varepsilon_i = 0 \quad (i=3,\cdots,n)$

$\therefore (ax'-by')(A\varepsilon_i) = 0$

同理 $(ay'+bx')(A\varepsilon_i) = 0$

$\therefore x'(A\varepsilon_i) = 0$，$y'(A\varepsilon_i) = 0$

$\therefore A\varepsilon_i$ 是 $\varepsilon_3,\cdots\varepsilon_n$ 的线性组合.

$\therefore A$ 在 $\{x,y,\varepsilon_3,\cdots,\varepsilon_n\}$ 下的矩阵为块对角阵.

定理：(正交相似标准形) 设 A 为第一类正交矩阵，则 $\exists$ 正交矩阵 T，使得 $T^{-1}AT = \mathrm{diag}\left\{I_s, -I_t, \begin{pmatrix}\cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1\end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix}\cos\theta_l & -\sin\theta_l \\ \sin\theta_l & \cos\theta_l\end{pmatrix}\right\}$.

其中，t 为偶数.

对于第二类，可以得到相似的结果，只是 t 为奇数。

结论：二阶的第二类正交变换是镜面反射，三阶的第二类正交变换还可以是镜面反射与旋转的组合.

命题：合同关系保持对称性（反对称性）不变.　（$B=C'AC$，$B'=C'A'C$）

命题：所有矩阵等价关系都保持秩不变。

（矩阵两边乘以可逆阵，则矩阵的秩保持不变：可逆阵可视为初等阵的乘积，矩阵乘以初等阵，秩不变

命题：相抵关系保持矩阵秩不变；

相似关系保持矩阵特征值不变；（特征向量）

正交相似关系保持矩阵特征值、对称性不变；

合同关系保持矩阵对称性不变。（惯性指数）

二次型

命题：复数域上二次型的规范型的主对角元必为1或0.（已知证明对任意数域P，标准形可以作到的，然后作替换将每项系数包入变元内即可，这在复数域上是可行的。）

二次型的化简

对于对称阵 A，欲求矩阵 C，使得 $C'AC=D$，其中 D 为对角阵（标准型），则对 $(A \mid I)$ 作行变换，然后对 A 单独作列变换，行列变换交替进行，过程中保证每一步行变换使 A 的某一列非对角元为0，每一步列变换使 A 对应行的非对角元为0，直到矩阵化为 $(D \mid X')$，则 X' 可以作为 C'.

（说明：由于 A 是对称的，在上述对角化过程中，保证了左半部分每一步的对称性，所以保证了列变换是与每次的行变换对应的（合同变换）。所以对角化后矩阵为 $(X'AX \mid X')$，且 $X'AX=D$，所以 X' 可以作为一个 C'. 注意：这里的 C 不是唯一的。）

命题：反对称阵的秩必为偶数。

（用与对称阵对角化相似的过程，可以把反对称阵化为 $\begin{pmatrix} \begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix} & \\ & \text{反对称} \end{pmatrix}$ 的形式，最终可化为 $\mathrm{diag}(\underbrace{S,\cdots,S}_{r\text{个}S},0,\cdots,0)$，其中 $S=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$，$r(A)=2r$.）

命题：$|\varepsilon I + A| = a_0\varepsilon^n + a_1\varepsilon^{n-1} + \cdots + a_n$.

则 $a_k = \sum\limits_{\left(\begin{smallmatrix} i_1,\cdots,i_k \\ i_1,\cdots,i_k \end{smallmatrix}\right)} A\begin{pmatrix} i_1,\cdots,i_k \\ i_1,\cdots,i_k \end{pmatrix}$，其中 $(k=1,\cdots,n)$。

$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 & & \\ & \varepsilon_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \varepsilon_n \end{pmatrix}$ 按编号展开

定理：实对称矩阵的特征值是实数；

实反对称矩阵的特征值是纯虚数或零。

定理：实对称矩阵的属于不同特征值的特征向量正交。

定理：n 级实对称矩阵有 n 个正交的特征向量.

（证明：数学归纳法.

1. $n=1$ 时，显然
2. 假设 $n=k$ 时，命题成立.

设 $k+1$ 级对称矩阵 A_{k+1} 有特征值 λ_1，相应特征向量 q_1.

将 q_1 扩充为标准正交基：$C_{k+1}=(q_1, C_k)_{(k+1)\times(k+1)}$，其中 C_k 为 $(k+1)\times k$ 矩阵.

则 $C_{k+1}'A_{k+1}C_{k+1} = \begin{pmatrix} q_1'A_{k+1}q_1 & q_1'A_{k+1}C_k \\ C_k'A_{k+1}q_1 & C_k'A_{k+1}C_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 q_1'q_1 & \lambda_1 q_1'C_k \\ \lambda_1 C_k'q_1 & C_k'A_{k+1}C_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & C_k'A_{k+1}C_k \end{pmatrix}$

由假设，对称矩阵 $C_k'A_{k+1}C_k$ 有特征值 $\lambda_2, \cdots, \lambda_{k+1}$，对应特征向量 $p_2, \cdots p_{k+1}$.
(不一定互异).

记新的向量 $q_j = C_k p_j \quad (j=2,\cdots,k+1)$

则 $\begin{cases} q_1'q_i = q_1'C_k p_i = 0 & (i=2,\cdots,k+1) \\ q_1'q_1 = 1 \end{cases} \Rightarrow q_1'q_i = \delta_{1i} \quad (i=1,\cdots,k+1)$

$\begin{cases} q_1'A_{k+1}q_i = q_1'A_{k+1}C_k p_i = \lambda_1 q_1'C_k p_i = 0 & (i=2,\cdots,k+1) \\ q_1'A_{k+1}q_1 = \lambda_1 q_1'q_1 = \lambda_1 \end{cases} \Rightarrow q_1'A_{k+1}q_i = \lambda_1 \delta_{1i},$
$(i=1,\cdots,k+1)$

$\begin{cases} q_j'q_i = p_j'C_k'C_k p_i = p_j' I_k q_i = \delta_{ji} & (i,j=2,\cdots,k+1) \\ q_j'A_{k+1}q_i = p_j'C_k'A_{k+1}C_k p_i \overset{(假设)}{=} \lambda_j p_j'p_i = \lambda_j \delta_{ji} & (i,j=2,\cdots,k+1) \end{cases}$

∴ $q_j'q_i = \delta_{ji} \quad (i,j=1,\cdots,k+1)$

$q_j'A_{k+1}q_i = \lambda_j \delta_{ji} \quad (i,j=1,\cdots,k+1)$

∴ $q_j'A_{k+1}q_i = \lambda_i q_j'q_i \quad (i,j=1,\cdots,k+1)$

∴ $q_j'(A_{k+1}q_i - \lambda_i q_i) = 0 \quad (i,j=1,\cdots,k+1)$

∵ j是任意的，$q_1', \cdots, q_{k+1}'$ 构成 R^{k+1} 的一组基.

∴ 对任意 $1\times(k+1)$ 向量 a， $a(A_{k+1}q_i - \lambda_i q_i) = 0$

∴ $A_{k+1}q_i = \lambda_i q_i. \quad (i=1,\cdots,k+1)$

即向量组 $q_1,\cdots,q_{k+1}$ 构成对称矩阵A_{k+1}的$k+1$个特征向量，且由 $q_j'q_i = \delta_{ji} \; (i,j=1,\cdots,k+1)$
知，它们相互正交.

∴ 由归纳法，□.

定理：实对称矩阵正交相似于对角矩阵
（证明：与上一定理等价）

谱展开：$A = (\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n)\, \mathrm{diag}\{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\} \cdot \begin{pmatrix} \varphi_1' \\ \varphi_2' \\ \vdots \\ \varphi_n' \end{pmatrix} = \sum \lambda_k \varphi_k \varphi_k'$

（注：形式上，谱展开相当于二次型的标准型从矩阵形式化为多项式形式.

证明：$A = \sum_k (\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n) \cdot \lambda_k e^k e_k \cdot \begin{pmatrix} \varphi_1' \\ \vdots \\ \varphi_n' \end{pmatrix} = \sum_k \lambda_k \varphi_k \varphi_k'$ ）

定理：正定矩阵的特征值为正；
半正定矩阵的特征值非负。

子空间的直和

定义：设 $V_1,\cdots,V_s$ 是线性空间 V 的子空间，

如果和 $V_1+V_2+\cdots+V_s$ 中每个向量 α 的分解式

$$\alpha=\alpha_1+\cdots+\alpha_s\ ,\quad \alpha_i\in V_i\ (i=1,\cdots,s)$$

是唯一的，则称这个和为直和，记为 $V_1\oplus V_2\cdots\oplus V_s$.

定理：设 $V_1,\cdots,V_s$ 是 V 的一些子空间，下列命题等价：

1° $W=\sum_{i=1}^{s}V_i$ 是直和

2° 零向量的分解式唯一.

3° $V_i\cap\sum_{j\neq i}V_j=\{0\}\ (i=1,\cdots,s)$ [注：即 V_i 间没有非零公共项].

4° 维$(W)=\sum$维(V_i). [注：即 V_i 间没有公共基向量].

不变子空间

定义：$\begin{cases}\forall\ \xi\in W,\ \mathcal{A}\xi\in W\\ W\subset V\end{cases}$，则称 W 是 $\mathcal{A}$ 的不变子空间，或 $\mathcal{A}$-子空间.

注：1° $\mathcal{A}V$ 和 $\mathcal{A}^{-1}\{0\}$ 都是 $\mathcal{A}$-子空间

2° $\mathcal{A}$ 的属于特征值 λ_0 的特征子空间 $V_{\lambda_0}=\{\alpha\mid\mathcal{A}\alpha=\lambda_0\alpha,\alpha\in V\}$ 是 $\mathcal{A}$-子空间.

3° $\mathcal{A}$-子空间的和与交还是 $\mathcal{A}$-子空间

4° 把 $\mathcal{A}$ 看成在其不变子空间 W 上的线性变换，称为 $\mathcal{A}$ 在 W 上引起的变换，记为 $\mathcal{A}|W$.

5° $\{\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_k\}$ 是 $\mathcal{A}$-子空间 W 的基，$\{\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n\}$ 是它扩充成的 V 的基，则 $\mathcal{A}$ 在这组基下的矩阵为 $\begin{pmatrix}A_1&A_3\\O&A_2\end{pmatrix}$. 其中 A_1 为 $\mathcal{A}|W$ 在基 $\{\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_k\}$ 下的矩阵.

6° 矩阵分解为准对角形与空间分解为不变子空间的直和是相当的。

定理：(空间分解定理) 记 $\mathcal{A}$ 的特征多项式为 $f(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{r_1}(\lambda-\lambda_2)^{r_2}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{r_s}$.

V 可分解为不变子空间的直和

$$V=V_1\oplus V_2\cdots\oplus V_s$$

其中 $V_i=\{\xi\mid(\mathcal{A}-\lambda_i\mathcal{E})^{r_i}\xi=0,\ \xi\in V\}$.

证明：0° 定义 $f_i(\lambda)=\dfrac{f(\lambda)}{(\lambda-\lambda_i)^{r_i}}$ ，$V_i=f_i(\mathcal{A})V$

则 $\mathcal{A}V_i=\mathcal{A}f_i(\mathcal{A})V=f_i(\mathcal{A})(\mathcal{A}V)\subset V_i$，

即 V_i 是 $\mathcal{A}$-子空间.

1° $(V=\sum V_i)$

$\because (f_1(\lambda), \cdots, f_s(\lambda)) = 1$

$\therefore \exists u_i(\lambda)$, $i=1,\cdots,s$, 使得 $u_1(\lambda)f_1(\lambda) + \cdots + u_s(\lambda)f_s(\lambda) = 1$

$\therefore u_1(\mathcal{A})f_1(\mathcal{A}) + \cdots + u_s(\mathcal{A})f_s(\mathcal{A}) = \mathcal{E}$

$\therefore \forall \alpha \in V$, $\alpha = u_1(\mathcal{A})f_1(\mathcal{A})\alpha + \cdots + u_s(\mathcal{A})f_s(\mathcal{A})\alpha$

其中 $u_i(\mathcal{A})f_i(\mathcal{A})\alpha = f_i(\mathcal{A})(u_i(\mathcal{A})\alpha) \in V_i$ $(i=1,\cdots,s)$

$\therefore V = \sum V_i$

2° $(V = \oplus V_i)$

设 $\sum_i \beta_i = 0$, 且 $(\mathcal{A} - \lambda_i \mathcal{E})^{r_i} \beta_i = 0$ $(i=1,\cdots,s)$

则显然 $f_i(\mathcal{A})\beta_j = 0$ $(i \neq j)$

$\therefore f_i(\mathcal{A}) \sum_j \beta_j = f_i(\mathcal{A})\beta_i = 0$

$\because (f_i(\lambda), (\lambda - \lambda_i)^{r_i}) = 1$

$\therefore \exists u(\lambda), v(\lambda)$, 使得 $u(\lambda)f_i(\lambda) + v(\lambda)(\lambda - \lambda_i)^{r_i} = 1$

$\therefore \beta_i = u(\mathcal{A})f_i(\mathcal{A})\beta_i + v(\mathcal{A})(\mathcal{A} - \lambda_i\mathcal{E})^{r_i}\beta_i = 0$

若 $\sum_i \alpha_i = 0$, 且 $\alpha_i \in V_i$, 则 $\cancel{(\mathcal{A}-\lambda_i\mathcal{E})^{r_i}\alpha_i = 0}$ $\exists \alpha_i'$, st. $f_i(\mathcal{A})\alpha_i' = \alpha_i$,

则 $(\mathcal{A} - \lambda_i \mathcal{E})^{r_i}\alpha_i$

$= f(\mathcal{A})\alpha_i'$

$= 0$

$\therefore \alpha_i = 0$ $(i=1,\cdots,s)$

$\therefore V = \bigoplus_i V_i$

3° $(V_i = \{\xi \mid (\mathcal{A} - \lambda_i\mathcal{E})^{r_i}\xi = 0, \xi \in V\})$

$\forall \alpha \in [(\mathcal{A} - \lambda_i \mathcal{E})^{r_i}]^{-1}\{0\}$, 若 $\alpha = \sum_i \alpha_i$, $\alpha_i \in V_i$ $(i=1,\cdots,s)$

则 $\alpha_1 + \cdots + (\alpha_i - \alpha) + \cdots + \alpha_s = 0$

$\because (\mathcal{A} - \lambda_i \mathcal{E})^{r_i}\alpha_i = 0$ $(i=1,\cdots,s)$

$\therefore (\mathcal{A} - \lambda_i\mathcal{E})^{r_i}(\alpha_i - \alpha) = 0$

由 2° 知,

$\therefore$ ~~$\alpha_j = 0$ ( )~~; $\alpha_i - \alpha = 0$.

$\therefore \alpha = \alpha_i$

$\therefore [(\mathcal{A} - \lambda_i \mathcal{E})^{r_i}]^{-1}\{0\} \subseteq V_i$

又 $\forall \alpha \in V_i$, $(\mathcal{A} - \lambda_i \mathcal{E})^{r_i}\alpha = 0$

$\therefore V_i \subseteq [(\mathcal{A} - \lambda_i\mathcal{E})^{r_i}]^{-1}\{0\}$

$\therefore V_i = \{\xi \mid (\mathcal{A} - \lambda_i \mathcal{E})^{r_i}\xi = 0, \xi \in V\}$. $\square$.

定理：(空间分解定理的另一版本).

若 $(f(x),g(x))=1$，且 $f(\mathcal{A})g(\mathcal{A})=\mathcal{O}$，

则空间 V 可分解为不变子空间的直和 $V=[f(\mathcal{A})]^{-1}\{0\}\oplus[g(\mathcal{A})]^{-1}\{0\}$

证明：1° $\left([f(\mathcal{A})]^{-1}\{0\}=\{g(\mathcal{A})\}V\right)$

$\because (f(x),g(x))=1$

$\therefore \exists\, u(x),v(x):\quad u(x)f(x)+v(x)g(x)=1$

$\therefore u(\mathcal{A})f(\mathcal{A})+v(\mathcal{A})g(\mathcal{A})=\mathcal{E}$

$\therefore \forall\alpha,\ f(\mathcal{A})\alpha=0$，$\exists\beta=v(\mathcal{A})\alpha\in V$，使得 $g(\mathcal{A})\beta=\alpha$.

$\therefore [f(\mathcal{A})]^{-1}\{0\}\subseteq[g(\mathcal{A})]V$ ①

又 $\because f(\mathcal{A})g(\mathcal{A})=\mathcal{O}$

$\therefore f(\mathcal{A})(g(\mathcal{A})V)=\{0\}$

$\therefore g(\mathcal{A})V\subseteq[f(\mathcal{A})]^{-1}\{0\}$ ②

综合①②，有 $[f(\mathcal{A})]^{-1}\{0\}=\{g(\mathcal{A})\}V$

2° $\left([g(\mathcal{A})]^{-1}\{0\}=\{f(\mathcal{A})\}V\right)$

$f(\mathcal{A})$，$g(\mathcal{A})$ 地位相同，同理 1° 可得

$[g(\mathcal{A})]^{-1}\{0\}=\{f(\mathcal{A})\}V$

3° $\left(V=[f(\mathcal{A})]^{-1}\{0\}+[g(\mathcal{A})]^{-1}\{0\}\right)$

$\forall\alpha\in V,\quad \alpha=u(\mathcal{A})f(\mathcal{A})\alpha+v(\mathcal{A})g(\mathcal{A})\alpha.$

$\qquad = f(\mathcal{A})(u(\mathcal{A})\alpha)+g(\mathcal{A})(v(\mathcal{A})\alpha)$

$\because f(\mathcal{A})u(\mathcal{A})\alpha\in f(\mathcal{A})V=[g(\mathcal{A})]^{-1}\{0\}$

$\quad g(\mathcal{A})v(\mathcal{A})\alpha\in g(\mathcal{A})V=[f(\mathcal{A})]^{-1}\{0\}$

~~∴ V = [~~

4° $\left(V=[f(\mathcal{A})]^{-1}\{0\}\oplus[g(\mathcal{A})]^{-1}\{0\}\right)$

若 $0=\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_1\in[f(\mathcal{A})]^{-1}\{0\}$，$\alpha_2\in[g(\mathcal{A})]^{-1}\{0\}$

则 $0=g(\mathcal{A})\alpha_1+g(\mathcal{A})\alpha_2.=g(\mathcal{A})\alpha_1$，

$\because \alpha_1=u(\mathcal{A})f(\mathcal{A})\alpha_1+v(\mathcal{A})g(\mathcal{A})\alpha_1=0+0=0$

同理，$\alpha_2=0$

$\therefore V=[f(\mathcal{A})]^{-1}\{0\}\oplus[g(\mathcal{A})]^{-1}\{0\}$

5° $\left([f(\mathcal{A})]^{-1}\{0\},[g(\mathcal{A})]^{-1}\{0\}\right.$ 是 $\mathcal{A}$-子空间).

~~$\mathcal{A}[f(\mathcal{A})]^{-1}\{0\}$~~ 显然.

最小多项式.

定义：次数最低的，首项系数为1的，以A为根的多项式，称为A的最小多项式.

引理1：(唯一性)

矩阵的最小多项式是唯一的.

引理2：(等价定义)

若$g(x)$是A的最小多项式，则 $f(A)=0 \iff g(x)|f(x)$

引理3：(最小多项式构建规则)

若 $A=\begin{pmatrix} A_1 & \\ & A_2 \end{pmatrix}$，$A_1,A_2$的最小多项式分别为$g_1(x)$，$g_2(x)$，

则 A的最小多项式为$[g_1(x), g_2(x)]$

引理4：(基本最小多项式)

k级若当块 $J(a)$ 的最小多项式为 $(x-a)^k$.

证明：∵ $J(a)$ 的特征多项式为 $(x-a)^k=0$

由H-C定理，$(J-aE)^k=0$

对$\forall f(x)\in P_k[X]$，$\exists a_i$，$(i=0,\cdots,k-1)$，使得 $f(x)=\sum_{i=0}^{k-1}a_i(x-a)^i$

则 $f(A)=\sum_{i=0}^{k-1}a_i(A-aE)^i$

其中 $(A-aE)^i=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ I_{k-i} & 0\end{pmatrix}_{k\times k}$ $(i=0,\cdots,k-1)$

∴ $f(A)\neq 0$.

由最小多项式的唯一性.

∴ $(x-a)^k$是$J_k(a)$的最小多项式.

定理：A相似于对角阵 $\iff$ A的最小多项式为P上互素的一次因式的乘积.

证明：1° 相似的矩阵有相同的最小多项式.

对角阵的最小多项式为P上互素的一次因式的乘积.

"⇒"得证

2° 设此最小多项式为 $g(x)$，则 $g(\mathcal{A})=\mathcal{O}$.

线性空间按线性变换的特征值分解定理中，事实上不要求$f(x)$为$\mathcal{A}$的特征多项式，只用到 $f(\mathcal{A})=0$.

所以V有分解：$V=\oplus V_i$，其中 $V_i=\{\xi\mid(\mathcal{A}-a_i\varepsilon)\xi=0, \xi\in V\}$

则 V_i的基为以a_i为特征值的$\mathcal{A}$的特征向量.

又V的基为V_i的基的组合.

∴ $\mathcal{A}$在此基下的矩阵为对角阵.

又A是$\mathcal{A}$在某组基下的矩阵.

∴ A相似于对角阵. "⇐"得证.