No.

Date

分析力学初步

1° 自由质点拉格朗日方程的推导

设质点广义坐标为 q_1, q_2, q_3，质点向径为 $\vec{r}=\vec{r}(q_1,q_2,q_3,t)$

质点速度 $\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}=\sum_i \vec{e}_i\cdot\dot{q}_i+\frac{\partial\vec{r}}{\partial t}$

其中 $\vec{e}_i=\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_i}$， $\vec{e}_i=\vec{e}_i(q_i,t)$

得，
$$\begin{cases}\frac{\partial\vec{v}}{\partial q_j}=\sum_i\dot{q}_i\frac{\partial\vec{e}_i}{\partial q_j}+\frac{\partial^2\vec{r}}{\partial q_j\partial t}\\ \frac{\partial\vec{v}}{\partial\dot{q}_j}=\vec{e}_j \quad ①\end{cases}$$

又 $\dot{\vec{e}}_j=\sum_i\frac{\partial\vec{e}_j}{\partial q_i}\dot{q}_i+\frac{\partial\vec{e}_j}{\partial t}$，且 $\frac{\partial\vec{e}_i}{\partial q_j}=\frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{\partial}{\partial q_i}\vec{r}\right)=\frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{\partial}{\partial q_j}\vec{r}\right)=\frac{\partial\vec{e}_j}{\partial q_i}$

∴ $\frac{\partial\vec{v}}{\partial q_j}=\dot{\vec{e}}_j$ ②

∵ $\vec{a}\cdot\vec{e}_j=\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{e}_j=\frac{d}{dt}(\vec{v}\cdot\vec{e}_j)-\vec{v}\cdot\dot{\vec{e}}_j$

代入①②，得 $\vec{a}\cdot\vec{e}_j=\frac{d}{dt}\left(\vec{v}\cdot\frac{\partial\vec{v}}{\partial\dot{q}_j}\right)-\vec{v}\cdot\frac{\partial\vec{v}}{\partial q_j}$

$$=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial\dot{q}_j}\left(\frac{\vec{v}^2}{2}\right)\right)-\frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{1}{2}\vec{v}^2\right)$$

∴ $m\vec{a}\cdot\vec{e}_j=\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_j}-\frac{\partial T}{\partial q_j}$

由 $\vec{F}=m\vec{a}$

∴ $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_j}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_j}=\vec{F}\cdot\vec{e}_j$

定义广义力 $Q_j=\vec{F}\cdot\vec{e}_j$，得到自由质点的拉格朗日方程：

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_i}-\frac{\partial T}{\partial q_i}=Q_i$$

注：若主动力 $\vec{F}$ 有势，$\vec{F}=-\nabla V$

则广义力 $Q_i=-\frac{\partial V}{\partial q_i}$

又 $Q_i=\frac{\partial W}{\partial q_i}$.

以上两式为广义力的计算式.

2° 虚位移原理

可能位移 $d\vec{r}_j=\sum_{i=1}^{s}\frac{\partial\vec{r}_j}{\partial q_i}dq_i+\frac{\partial\vec{r}_j}{\partial t}dt \quad (j=1,2,\cdots,n)$

虚位移 $\delta\vec{r}_j=\sum_{i=1}^{s}\frac{\partial\vec{r}_j}{\partial q_i}\delta q_i \quad (j=1,2,\cdots,n)$

理想约束 $\sum_i\vec{N}_i\cdot\delta\vec{r}_i=0$

其中 $\vec{N}_i$ 是作用在第 i 个质点上的约束力.

虚位移原理：若质点系受定常、理想的约束，则其平衡等价于在任何虚位移上所有主动力的虚功之和为零. 即 $\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i\cdot\delta\vec{r}_i=0$.

No.

Date

虚位移原理的等价表述：

$$\because \sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i\cdot\delta\vec{r}_i = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{s}\left(\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}\delta q_j\right)\cdot\vec{F}_i$$

$$= \sum_{j=1}^{s}\left(\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i\cdot\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}\right)\delta q_j$$

定义质点系受的广义力 $Q_j = \sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i\cdot\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}$

则 $\sum_{j=1}^{s}Q_j\delta q_j=0$ ，由 δq_j 彼此独立，

∴虚位移原理的等价表达为

$$Q_j=0. \quad (j=1,2,\cdots,s)$$

3° 动力学普遍方程（达朗伯原理）

达朗伯原理：作用于质点上的损失力在每一瞬时位置上都为约束力所平衡.

$$\vec{F}_{损失}+\vec{N}=0$$

其中 $\vec{F}_{损失}+\vec{F}_{受动}=\vec{F}$，$\vec{F}$ 为主动力，

且 $\vec{F}_{受动}=m\vec{a}$.

动力学普遍方程： n个质点组成的质点系受理想约束作用，即

$$\sum_{i=1}^{n}\vec{N}_i\cdot\delta\vec{r}_i=0$$

$$\because \vec{N}_i=-\vec{F}_{i损失}=-(\vec{F}_i-m_i\vec{a}_i)$$

得到动力学普遍方程，

$$\sum_{i=1}^{n}(\vec{F}_i-m_i\ddot{\vec{r}}_i)\cdot\delta\vec{r}_i=0$$

由动力学普遍方程导出拉格朗日方程：

① 一个具有理想约束的质点系，其中任一质点的向径记为 $\vec{r}_i=\vec{r}_i(q_1,q_2,\cdots q_s,t)$

速度 $\vec{v}_i=\sum_{k=1}^{s}\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_k}\dot{q}_k+\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial t}$

则 $\frac{\partial\vec{v}_i}{\partial\dot{q}_j}=\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}$ ①

$$\frac{\partial\vec{v}_i}{\partial q_j}=\sum_{k=1}^{s}\frac{\partial^2\vec{r}_i}{\partial q_j\partial q_k}\dot{q}_k+\frac{\partial^2\vec{r}_i}{\partial q_j\partial t}=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}\right) \quad ②$$

虚位移 $\delta\vec{r}_i=\sum_{j=1}^{s}\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}\delta q_j$

由动力学普遍方程

$$\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i\cdot\delta\vec{r}_i-\sum_{i=1}^{n}m_i\frac{d\vec{v}_i}{dt}\cdot\left(\sum_{j=1}^{s}\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}\delta q_j\right)=0$$

$$\because \sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i\cdot\delta\vec{r}_i=\sum_{j=1}^{s}Q_j\delta q_j$$

$$\therefore \sum_{j=1}^{s}\left[Q_j-\sum_{i=1}^{n}m_i\frac{d\vec{v}_i}{dt}\cdot\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}\right]\delta q_j=0$$

No.

Date

由于δq_j彼此独立

$\therefore\ Q_j - \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt}\cdot\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = 0$

$$\because\ \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt}\cdot\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d}{dt}\left(\vec{v}_i\cdot\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\right) - \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d}{dt}\left(\vec{v}_i\cdot\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j}\right) - \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i\cdot\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_j}$$

$$= \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\left(\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{1}{2}\vec{v}_i^2\right)\right] - \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^2\right)$$

$$= \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j}$$

得到第二类拉格朗日方程:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \quad (j=1,2,\cdots,s)$$

② 在一般的曲线坐标系中,可以推出质点系的动力学普遍方程

$$\sum_{j=1}^{3n}\left[Q_j - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_j}\right) + \frac{\partial T}{\partial x_j}\right]\delta x_j = 0$$

由虚位移 $\delta \vec{r}_i = \sum_{j=1}^{3n}\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial x_j}\delta x_j \quad (i=1,2,\cdots,k)$

引入k个拉格朗日乘子λ_i,得到

$$\sum_{j=1}^{3n}\left[Q_j - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_j}\right) + \frac{\partial T}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{k}\lambda_i\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right]\delta x_j = 0$$

选择λ_i,使得

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial x_j} = Q_j + \sum_{i=1}^{k}\lambda_i\frac{\partial f}{\partial x_j} \quad (j=1,2,\cdots,3n)$$

联立约束方程 $f_i(x_1,x_2,\cdots,x_{3n},t)=0 \quad (i=1,2,\cdots,k)$

即为第一类拉格朗日方程。3n+k个方程可以确定3n个x_j和k个λ子.

4° 拉格朗日方程的首次积分

① 广义动量守恒　定义广义动量 $p_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}$

已知拉格朗日函数 $L = L(q_i, \dot{q}_i, t)$,若L不显含某广义坐标q_i,

则 $\frac{d}{dt}p_i = 0$,即广义动量守恒

② 广义能量守恒　已知质点系动能 $T = T(q_i, \dot{q}_i, t)$,记 $T = T_2 + T_1 + T_0$

其中 T_2, T_1, T_0 分别为$\dot{q}_i$的二次,一次,零次齐次式。

定义广义能量 $h = \sum_{i=1}^{s} p_i \dot{q}_i - L$,则 $h = T_2 - T_0 + V$.

可以推导出,$\frac{dh}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial t}$

若L不显含时间t,则 $\frac{d}{dt}h = 0$,即广义能量守恒.

No.

Date

5° 稳定平衡位置附近的小振动

一个受定常约束的主动力有势的质点系，

动能 $T=T(q_i,\dot q_i)=\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{s}A_{jk}(\vec q)\dot q_j\dot q_k$

势能 $V=V(q_i)$

令 $\vec q=0$ 为平衡位置，且 $V(0)=0$.

则 $\frac{\partial V(0)}{\partial q_i}=0$,

将V和T在 $\vec q=0$ 附近泰勒展开，保留到二阶小量，得

$$V(q_i)=\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{s}K_{jk}q_jq_k$$

$$T(\dot q_i)=\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{s}M_{jk}\dot q_j\dot q_k$$ ，其中 $M_{jk}=A_{jk}(0)$

代入拉格朗日方程得

$$\sum_{j=1}^{s}M_{ij}\ddot q_j=-\sum_{j=1}^{s}K_{ij}q_j \qquad (i=1,2,\cdots,s)$$

记为矩阵形式

$$M\ddot{\vec q}+K\vec q=0$$ ，M为惯量矩阵，K为刚度矩阵.

设有解 $q_i=A_i\sin(\omega t+\varphi)$，代入得本征方程.

$$(K-\omega^2M)\vec A=0$$

在有非平凡解时，有特征方程

$\det(K-\omega^2M)=0$，其解 ω_i 为其固有频率，相应的 $\vec A_i$ 为振型，相应的振动 $\vec q_i$ 为主振动.

记原来的坐标为 x_i，令 $x_i=\sum_{j=1}^{s}A_{ij}q_j$，其中 A_{ij} 为 ω_j 下 x_i 的振型参数.

记为矩阵形式 $\vec x=P\vec q$，P称为振型矩阵.

代入动力学方程得 $MP\ddot{\vec q}+KP\vec q=0$

左乘 P^T，则有 $P^TMP\ddot{\vec q}+P^TKP\vec q=0$

令 $M'=P^TMP$, $K'=P^TKP$，则

$$M'\ddot{\vec q}+K'\vec q=0.$$

这时，新的惯量矩阵和刚度矩阵为对角阵，所以 $\vec q$ 为简正坐标。

6° 哈密顿正则方程.

广义动量 $p_i=\frac{\partial L}{\partial\dot q_i}=p_i(\dot{\vec q},\vec q,t)$，由此可以反解出广义速度 $\dot q_i=\dot q_i(\vec q,\vec p,t)$

将 $\dot q_i$ 代入广义能量 $h=\sum_{i=1}^{s}p_i\dot q_i-L$，得到哈密顿函数

$$H=H(q_i,p_i,t)$$

$$\frac{\partial H}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^{s} p_i \frac{\partial \dot q_i}{\partial q_j} - \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\frac{\partial \dot q_i}{\partial q_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j}$$

$$= \sum_{i=1}^{s}\left(p_i - \frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\right)\frac{\partial \dot q_i}{\partial q_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j}$$

$$= -\frac{\partial L}{\partial q_j}$$

$$\because \quad \dot p_j = \frac{\partial L}{\partial q_j}$$

$$\therefore \quad \frac{\partial H}{\partial q_j} = -\dot p_j$$

$$\frac{\partial H}{\partial p_j} = \dot q_j + \sum_{i=1}^{s} p_i \frac{\partial \dot q_i}{\partial p_j} - \sum_{i=1}^{s}\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\frac{\partial \dot q_i}{\partial p_j}$$

$$= \dot q_j$$

得到哈密顿正则方程

$$\begin{cases} \dot q_j = \dfrac{\partial H}{\partial p_j} \\ \dot p_j = -\dfrac{\partial H}{\partial q_j} \end{cases} \quad (j=1,2,\cdots,s)$$

正则方程的首次积分。若 H 不显含某个广义坐标 q_j，则 $\dot p_j = 0$，即广义动量 p_j 守恒.

由 $\dfrac{dH}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial t} + \sum_{i=1}^{s}\left(\dfrac{\partial H}{\partial p_i}\dot p_i + \dfrac{\partial H}{\partial q_i}\dot q_i\right) = \dfrac{\partial H}{\partial t}$

若 H 不显含 t，则 $\dot H = 0$，即广义能量 h 守恒.

7° 对于广义坐标体系的一点讨论.

① （形式）

广义坐标 q ： x　θ

广义速度 $\dot q$ ： $\dot x$　$\dot\theta$

广义动量 p ： 动量　动量矩

广义力 Q ： 力　力矩

② 定常约束下，$T_1, T_0 = 0$，$T = T_2$，$h=$ 机械能

非定常约束下，一般说来，T_1, T_2, T_0 都存在.

8° 一些讨论.

① 求质点速度. 依据质点位矢 $\vec r = \vec r(q_i, t)$

有 $\dot{\vec r} = \sum_i \dfrac{\partial \vec r}{\partial q_i}\dot q_i + \dfrac{\partial \vec r}{\partial t}$.

通过求 $\dfrac{\partial \vec r}{\partial q_i}$，$\dfrac{\partial \vec r}{\partial t}$，即可写出了.

优点：通用；快速；不会遗漏、算错.

No.

Date

② 求质点动能．　通过速度的矢量构成，直接求矢量平方。

优点：不用做投影；不用三角公式；表达式简单．

! ③ 给定运动条件问题．　不可以忽略广义速度建立动能T，即不一定有$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}=0$.

④ 冲击力问题．　依据初始位形写出此特殊情形下的动能表达式 $T=T(\dot{q}_i,t)$.

因为动力学方程（拉格朗日方程）是对任一瞬时都成立的，所以上述解法正确．

⑤ 小振动问题．　写出平衡位形处的动能 $T(q=0)=T(\dot{q})$，

因为位形变化是小量，所以上述解法正确．