

# 第一章 简单应力状态下的弹塑性力学问题

## 1.1 引言

非弹性变形：主要包括塑性变形和粘性变形。

塑性变形：物体在除去外力后所残留下来的永久变形。在给定的外力下，物体的变形不随时间改变。

粘性变形：同“塑性变形”。在给定的外力下，物体变形随时间改变。 $\sigma = f(\dot{\epsilon})$

脆性：变形很小即可破坏。

韧性：变形很大才能破坏。

## 1.2 材料在简单拉压时的实验结果

简单拉压实验曲线参数：名义应力  $\sigma = \frac{F}{A_0}$ ，名义应变  $\epsilon = \frac{l-l_0}{l_0}$ 。

(实验假定试件中段应力和变形均匀。)

屈服应力  $\sigma_s$ ：因为一般材料的比例极限、弹性极限和屈服应力相差 (屈服极限) 不大，统一记为  $\sigma_s$ ，称为屈服应力。(定义：产生 0.2% 塑性应变时的应力值。)

应变强化：材料产生了一段不大的塑性变形之后，初始屈服应力  $\sigma_s$  (应变硬化) (开始发生新的塑性变形的应力值) 提升到先前卸载时的屈服应力  $\sigma_m$  的现象。

包氏效应：产生了塑性变形的材料，若为单晶体，屈服应力会提高；若为多晶体，压缩屈服应力一般会降低。(原因：微观结构改变)。(反向也有包氏效应)

内变量：用于刻画加载历史的一组变量  $\xi$ 。

简单拉压时的应力应变关系：

取内变量  $\xi$  为塑性应变  $\epsilon^p$ ，则应力应变关系为

$$\left\{ \begin{array}{l} 1^\circ \quad \epsilon = \frac{\sigma}{E} + \epsilon^p ; \quad (f(\sigma, \epsilon^p) \leq 0 \text{ 或 } g(\sigma, \epsilon^p) \leq 0) \\ 2^\circ \quad d\sigma = (d\sigma)_m \text{ 或 } d\epsilon = (d\epsilon)_m ; \quad \left( \frac{\partial f}{\partial \sigma} d\sigma > 0 \text{ 或 } \frac{\partial g}{\partial \epsilon} d\epsilon > 0 \right) \\ \quad \quad \quad \text{或 } (d\sigma)_{m'} \quad \quad \quad \text{或 } (d\epsilon)_{m'} \quad \quad \quad \text{或 } (f(\sigma, \epsilon^p) = 0 \text{ 或 } g(\sigma, \epsilon^p) = 0) \\ 3^\circ \quad d\sigma = E d\epsilon ; \quad \left( \frac{\partial f}{\partial \sigma} d\sigma < 0 \text{ 或 } \frac{\partial g}{\partial \epsilon} d\epsilon < 0 \right) \end{array} \right.$$

其中  $f(\sigma, \epsilon^p) = \begin{cases} \sigma - \sigma_m, & \text{正向加载} \\ \sigma_m' - \sigma, & \text{反向加载} \end{cases}$  ;  $g(\sigma, \epsilon^p) = \begin{cases} (\epsilon - \epsilon_m) E, & \text{正向加载} \\ (\epsilon_m' - \epsilon) E, & \text{反向加载} \end{cases}$

$\varepsilon_m, \sigma_m$  为  $M$  点的应变、应力;  $\varepsilon'_m, \sigma'_m$  为  $M'$  点的应变、应力。

注:  $f(\sigma, \varepsilon^p) \leq 0$  和  $g(\varepsilon, \varepsilon^p) \leq 0$  表明  $\sigma \in [\sigma'_m, \sigma_m]$  和  $\varepsilon \in [\varepsilon'_m, \varepsilon_m]$ ;

$\frac{\partial f}{\partial \sigma} d\sigma > 0$  和  $\frac{\partial g}{\partial \varepsilon} d\varepsilon > 0$  表示加载,  $\frac{\partial f}{\partial \sigma} d\sigma < 0$  和  $\frac{\partial g}{\partial \varepsilon} d\varepsilon < 0$  表示卸载。

除了  $\varepsilon^p$  塑性应变以外, 还有很多影响材料性质的因素, 如温度  $T$ , 静水压力, 和应变速率  $\dot{\varepsilon}$ 。

2° 塑性变形只有在卸载后才能知道, 不能简单作线弹性卸载假设。

### 1.3 应力-应变关系的简化模型.

#### 1° 理想弹塑性模型.

假定: (1) 忽略强化效应;

(2) 拉压的屈服应力的绝对值相同。

对象: (1) 强化率较低的材料 (如低碳钢)

(2) 应变不太大。

应力应变关系: (不卸载)

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon = \sigma/E, \quad |\sigma| < \sigma_s \\ \varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \text{sgn}(\sigma) \lambda, \quad |\sigma| = \sigma_s \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \sigma = E\varepsilon, \quad |\varepsilon| \leq \varepsilon_s \\ \sigma = \sigma_s \cdot \text{sgn}(\varepsilon), \quad |\varepsilon| > \varepsilon_s \end{array} \right. \quad (\varepsilon_s = \frac{\sigma_s}{E})$$

#### 2° 线性强化弹塑性模型.

假定: (1) 线性强化;

(2) 拉压的屈服应力的绝对值相同。

(3) 拉压的强化模量  $E'$  相同。

对象: (1) 强化率较高且在一定范围内变化不大的材料。

应力应变关系: (不卸载)

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon = \frac{\sigma}{E}, \quad |\sigma| \leq \sigma_s \\ \varepsilon = \frac{\sigma}{E} + [\sigma - \sigma_s \cdot \text{sgn}(\sigma)] \left( \frac{1}{E'} - \frac{1}{E} \right), \quad |\sigma| > \sigma_s \end{array} \right.$$

或

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma = E\varepsilon, \quad |\varepsilon| \leq \varepsilon_s \\ \sigma = \sigma_s \cdot \text{sgn}(\varepsilon) + E' [\varepsilon - \varepsilon_s \cdot \text{sgn}(\varepsilon)], \quad |\varepsilon| > \varepsilon_s \end{array} \right.$$

#### 3° 一般加载规律

假定: (无)

对象: 普适

应力应变关系: (不卸载)

$$\sigma = E\varepsilon [1 - W(\varepsilon)], \quad W(\varepsilon) = \begin{cases} 0, & |\varepsilon| \leq \varepsilon_s \\ \dots, & |\varepsilon| > \varepsilon_s \end{cases}$$

#### 4° 幂次强化模型

假定: 未知

对象: 未知

应力应变关系: (不卸载)

$$\sigma = B |\epsilon|^m \operatorname{sgn}(\epsilon), \quad B > 0, m \in (0, 1)$$

#### 5° Ramberg-Osgood 模型

假定: 未知

对象: 未知

应力应变关系: (不卸载)

$$\frac{\epsilon}{\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\sigma_0} + \frac{3}{7} \left(\frac{\sigma}{\sigma_0}\right)^n$$

#### 6° 刚塑性模型

假定: (1) 忽略弹性应变

对象: (1) 总应变较大

#### 1° 等向强化模型

假定: (1) 拉压屈服应力的绝对值始终相等

模型:  $|\sigma| = \psi(\xi)$ ,  $\xi$  是表示塑性变形历史的参数

$$\left( \begin{array}{l} \text{例如: (1) 塑性应变绝对值累加 } \xi = \int |d\epsilon^p| \\ \text{(2) 塑性功 } \xi = \int \sigma d\epsilon^p \end{array} \right)$$

#### 2° 随动强化模型

假定: (1) 材料的弹性响应范围始终不变

模型:  $|\sigma - \psi(\epsilon^p)| = \sigma_s$ ,  $\psi(\epsilon^p)$  是单调递增函数

(例如: 线性强化模型下  $|\sigma - h\epsilon^p| = \sigma_s$ ,  $h$  是常数)

### 1.4 轴向拉伸时的塑性失稳

1° 拉伸失稳: 拉伸实验曲线越过最高点 C 后, 应变增加, 应力反而下降的现象。

拉伸失稳分界点: 拉伸实验曲线的最高点 C。

材料稳定: 增加应变时, 需要增加应力。

拉伸材料过程中,

建立新的应力应变:

真应力:  $\tilde{\sigma} = \frac{P}{A}$ ,  $A$  为材料<sup>拉伸后</sup>截面积, (假定材料截面保持均匀)

对数应变(真应变):  $\tilde{\epsilon} = \int_{l_0}^l \frac{dl'}{l'} = \ln \frac{l}{l_0} = \ln(1 + \epsilon)$

截面收缩比:  $q = \frac{A_0 - A}{A_0}$ ,  $A_0$  为初始材料截面积.

假设: 1° 材料不可压缩:  $A_0 l_0 = A l$

2° 颈缩起始点为名义应力最高点:  $\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = 0$

新应力-应变体系下的颈缩判据:

$$1^\circ \frac{d\tilde{\sigma}}{d\tilde{\varepsilon}} = \tilde{\sigma}$$

(推导:  ~~$\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \frac{d\tilde{\sigma}}{d\tilde{\varepsilon}}$~~   $\tilde{\sigma} = \frac{P}{A_0} \frac{A_0}{A} = \sigma \frac{l}{l_0} = \sigma e^{\tilde{\varepsilon}}$ )

$$\frac{d\tilde{\sigma}}{d\tilde{\varepsilon}} = \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \frac{d\varepsilon}{d\tilde{\varepsilon}} \cdot e^{\tilde{\varepsilon}} + \sigma e^{\tilde{\varepsilon}} = \tilde{\sigma}$$

$$2^\circ \frac{d\tilde{\sigma}}{d\varepsilon} = \frac{\tilde{\sigma}}{H\varepsilon}$$

(推导:  $\tilde{\sigma} = \sigma \frac{l}{l_0} = \sigma (H\varepsilon)$ )

$$\frac{d\tilde{\sigma}}{d\varepsilon} = \frac{d\sigma}{d\varepsilon} (H\varepsilon) + \sigma = \tilde{\sigma} = \frac{\tilde{\sigma}}{H\varepsilon}$$

$$3^\circ \frac{d\tilde{\sigma}}{dq} = \frac{\tilde{\sigma}}{1-q}$$

(推导:  $\tilde{\sigma} = \sigma \frac{l}{l_0} = \frac{\sigma}{1-q}$ , 颈缩判据  $\frac{d\tilde{\sigma}}{dq} = 0$ )

$$\frac{d\tilde{\sigma}}{dq} = \frac{d\sigma}{dq} \frac{1}{1-q} + \sigma \left( + \frac{1}{(1-q)^2} \right) = \frac{\tilde{\sigma}}{1-q}$$

2° 材料本身的失稳现象.

实例: 1° 低碳钢拉伸实验中, 上屈服应力突然下降到下屈服应力.

(原因: 内部微观机制变化) ~~位错增殖~~ ~~晶界形成~~

2° 应变强化: 微裂纹, 孔洞的形核、生成及汇合导致的弱化和失稳.

注: 这里的不稳定含义与 1° 定义的相同.

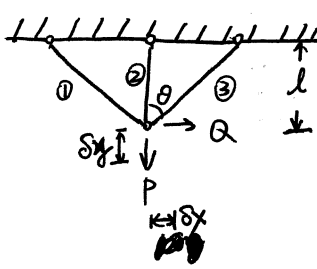
附: 第 3 种失稳是压杆失稳, 不在本节范围内.

注: 失稳 1°、2° 的区别:

1) 1° 有颈缩, 2° 没颈缩.

2) 1° 结构变化可见, 2° 结构变化肉眼不可见.

# 1.5 简单桁架的弹塑性分析



(初始时,  $\theta = 45^\circ$ )

求解如图所示的结构, 建立平衡方程、几何关系、本构关系。

① 平衡方程

$$\sigma_2 + \frac{\sqrt{2}}{2}(\sigma_1 + \sigma_3) = \frac{P}{A}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) = \frac{Q}{A}$$

② 几何关系

$$\epsilon_1 = \frac{\delta y + \delta x}{2l}$$

$$\epsilon_2 = \frac{\delta y}{l}$$

$$\epsilon_3 = \frac{\delta y - \delta x}{2l}$$

③ 本构关系 (理想弹塑性模型)

$$\begin{cases} \sigma = E \epsilon & , |\epsilon| \leq \epsilon_s \\ \sigma = \sigma_s \cdot \text{sgn}(\epsilon) & , |\epsilon| > \epsilon_s \end{cases}$$

$Q=0$  时的解:

1) 弹性阶段

$$Q=0 \Rightarrow \text{平衡方程: } \begin{cases} \sigma_2 + \sqrt{2}\sigma_1 = \frac{P}{A} \\ \sigma_1 = \sigma_3 \end{cases}$$

$$\text{弹性} \Rightarrow \text{本构方程: } \sigma_i = E \epsilon_i$$

$$\Rightarrow \text{协调方程: } \epsilon_2 = \epsilon_1 + \epsilon_3$$

$$\text{解得 } \begin{cases} \sigma_1 = \sigma_3 = \frac{1}{2+\sqrt{2}} \frac{P}{A} \\ \sigma_2 = \frac{2}{2+\sqrt{2}} \frac{P}{A} \end{cases}$$

$$\text{定义 } \sigma_s \frac{P}{P_e} = \frac{2}{2+\sqrt{2}} \frac{P}{A}, \text{ 则}$$

$$(\text{垂直方向上的弹性极限载荷}) P_e = \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) A \sigma_s$$

$$\text{弹性位移 } \delta_e = \frac{\sigma_s l}{E}$$

2) 约束塑性变形阶段

$$\Rightarrow \text{本构方程: } \begin{cases} \sigma_1 = E \epsilon_1 \\ \sigma_2 = \sigma_s \\ \sigma_3 = E \epsilon_3 \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} \sigma_1 = \sigma_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} \left( \frac{P}{A} - \sigma_s \right) \\ \text{或记为 } \frac{\sigma_s}{2} \left[ (1+\sqrt{2}) \frac{P}{P_e} - \sqrt{2} \right] \\ \sigma_2 = \sigma_s \end{cases}$$

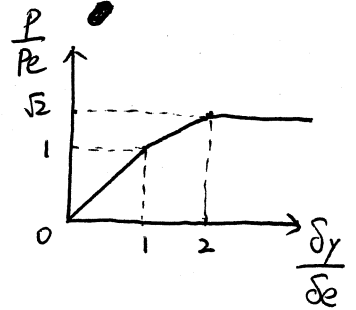
$$\begin{cases} \varepsilon_1 = \varepsilon_3 = \frac{\sigma_1}{E} \\ \varepsilon_2 = 2\varepsilon_1 \end{cases}$$

3) 塑性流动阶段

$$\Rightarrow \text{本构方程: } \sigma_2 = \sigma_s$$

$$\text{可得 } P = (1+\sqrt{2}) A \sigma_s = \sqrt{2} P_e$$

$$\text{定义: 塑性极限载荷 } P_s = \sqrt{2} P_e$$



2° 卸载

加载到  $P^*$ , 使  $P_e < P^* < P_s$ , 然后卸载, ~~卸载~~

因为卸载服从弹性规律, 所以应力应变改变量的关系为:

$$\begin{cases} \Delta \sigma_1 = \Delta \sigma_3 = \frac{1}{2} \sigma_s \frac{\Delta P}{P_e} \\ \Delta \sigma_2 = \sigma_s \frac{\Delta P}{P_e} \\ \Delta \varepsilon_1 = \Delta \varepsilon_3 = \frac{\Delta \sigma_1}{E} \\ \Delta \varepsilon_2 = \frac{\Delta \sigma_2}{E} \end{cases}$$

完全卸载时,  $\Delta P = -P^*$ , 得

$$\text{残余应力} \begin{cases} \sigma_1^r = \sigma_3^r = -\sigma_s \gamma^* > 0 \\ \sigma_2^r = \sqrt{2} \sigma_s \gamma^* < 0 \end{cases}$$

$$\text{残余应变} \begin{cases} \varepsilon_1^r = \varepsilon_3^r = -\left(\frac{\sigma_s}{E}\right) \gamma^* > 0 \\ \varepsilon_2^r = -\frac{2\sigma_s}{E} \gamma^* > 0 \end{cases}$$

$$\text{其中内变量 } \gamma^* = \frac{\sqrt{2}}{2} \left( 1 - \frac{P^*}{P_e} \right) < 0$$

注: 超静定结构中的残余应变一般不等于塑性应变, 而是弹性应变和塑性应变之和。

## 1.6 强化效应的影响

考虑强化效应后,修正的本构方程为

$$\begin{cases} \sigma = E \varepsilon & (\sigma \in [0, \sigma_s]) \\ \sigma = E'(\varepsilon - \varepsilon_s) + \sigma_s & (\sigma > \sigma_s) \end{cases}$$

$(\frac{P}{P_e})$  与  $(\frac{\delta_y}{\delta_e})$  的关系线为

1° 第一段与 1.5 节相同,

2°  $P > P_e$  后,

$$\begin{cases} \sigma_1 = \sigma_3 = \frac{\sigma_s}{2} [\alpha_0 (\frac{P}{P_e} - 1) + 1] \\ \sigma_2 = \sigma_s [\alpha (\frac{E'}{E}) (\frac{P}{P_e} - 1) + 1] \end{cases}$$

其中  $\alpha_0 = \frac{1 + \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2} \frac{E'}{E}}$ , 将结果转化为点斜式, 形式简洁.

垂直方向上的位移.  $\frac{\delta_y}{\delta_e} = \alpha_0 (\frac{P}{P_e} - 1) + 1$

垂直方向上的塑性极限荷载  $P_1 = P_s [1 + (\frac{1}{1 + \sqrt{2}}) \frac{E'}{E}]$

3°  $P > P_1$  后, 结构不会失稳.

## 1.7 几何非线性影响.

考虑几何非线性的影响后, 需要修正几何方程和平衡方程.

本构方程也改为刚塑性线性强化的方程, 方程中使用真应力和真应变.

结论:

垂直方向位移增加时, 荷载会由于强化效应和夹角变小而提高, 也会由于杆件截面积的减小而下降.

当位移很大时, 结构可能失稳.

## 1.8 弹性极限曲线

1° 同时考虑  $P, Q$  的影响, 在弹性阶段解得

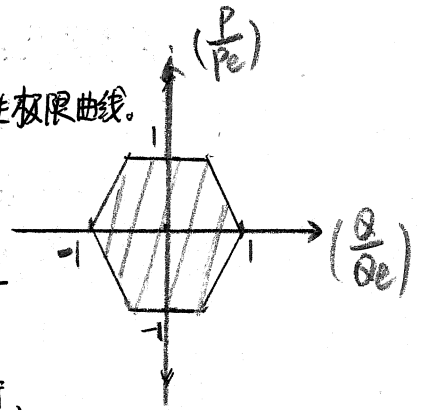
$$\begin{cases} \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_s}\right) = \frac{1}{2} \left(\frac{P}{P_e}\right) + \left(\frac{Q}{Q_e}\right) \\ \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_s}\right) = \left(\frac{P}{P_e}\right) \\ \left(\frac{\sigma_3}{\sigma_s}\right) = \frac{1}{2} \left(\frac{P}{P_e}\right) - \left(\frac{Q}{Q_e}\right) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{其中 } P_e &= (1 + \frac{\sqrt{2}}{2}) A \sigma_s \\ Q_e &= \sqrt{2} A \sigma_s \end{aligned}$$

在弹性范围内,  $|\sigma_i| \leq \sigma_s$ , 对应于右图区域.

图示六边形区域为结构的弹性区域, 边界为弹性极限曲线.

弹性极限曲线是由弹性极限荷载组成的.



2° 当加载超过弹性极限曲线后, 弹性极限曲线会发生变化.

由于结构屈服并卸载为零时, 残余应力相互平衡, 由平衡方程可得

$$\sigma_1^r : \sigma_2^r : \sigma_3^r = -1 : \sqrt{2} : -1$$

因此可以提出内变量  $\gamma^*$ , 使得

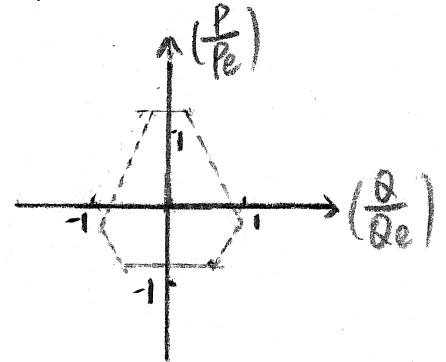
$$\begin{cases} \sigma_1^r = \sigma_3^r = -\sigma_s \gamma^* \\ \sigma_2^r = \sqrt{2} \sigma_s \gamma^* \end{cases}$$

重新加载时, 应力增量与荷载增量间关系等于弹性解的增量形式.

所以, 新的弹性范围为

$$\begin{cases} \left| \frac{1}{2} \left( \frac{P}{Q_e} \right) \pm \left( \frac{Q}{Q_e} \right) - \gamma^* \right| \leq 1 \\ \left| \left( \frac{P}{Q_e} \right) + \sqrt{2} \gamma^* \right| \leq 1 \end{cases}$$

新的弹性极限曲线如图所示.



1.9 加载路径的影响.

1.10 极限载荷曲线(面)

塑性极限载荷: 结构成为一个能产生塑性流动的机构, 丧失进一步承载能力时, 相应的载荷就是塑性极限载荷.

注: 如果有 P, Q 两方向的载荷, 那么对于之前的桁架结构, 有两根杆达到屈服时, 结构就成机构了.

极限载荷曲线(面): 所有的塑性极限载荷, 构成极限载荷曲线.

对于载荷分量超过 2 的问题, 则构成极限载荷曲面.

极限载荷曲线的求法

依据 1.8 中含内变量  $\gamma^*$  的弹性极限曲线方程, 将分别联立弹性极限曲线上相交的直线方程, 消去内变量  $\gamma^*$ , 解得塑性极限载荷的轨迹方程. 这几个方程围成的封闭曲线就是极限载荷曲线.

注: 此方法假设弹性极限曲线的顶点是由固定两条直线交成的.



极限载荷曲线的性质:

1. 极限载荷曲线与路径无关.
2. 极限载荷曲线是凸的.
3. 极限载荷曲线上, 位移增量的方向为曲线的外法向.

