第五章 弯曲应力

1. 剪力和弯矩

梁：以弯曲为主要变形的杆件

弯曲：任意两横截面绕垂直于杆轴线的做相对转动，同时杆的轴线也弯曲成曲线。

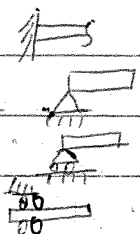
平面弯曲：变形后轴线所在平面与外力所在平面相重合的弯曲。

支座对梁的约束形式：1° 固定端

2° 固定铰支座

3° 可动铰支座

4° 滑动支座



静定梁：
- 悬臂梁：具有一个固定端的梁
- 简支梁：两端面分别有一个固定铰支座和一个可动铰支座的梁

剪力、弯矩符号定义：若自由体截面的外法向为 x 轴正向，沿 y 轴正向的剪力为正，反之为负；沿 z 轴正向的弯矩为正，反之为负。

剪力图、弯矩图：按选定的比例尺，以横截面上的剪力或弯矩为纵坐标，以截面沿梁轴线的位置为横坐标绘制 $Q_y(x)$, $M_z(x)$。标出最大值以及所在截面位置。标出正负号，一般向下为"+"，向上为"-"。

平衡方程：

1° $\dfrac{dQ_y}{dx} + q(x) = 0$ $\quad\left(\dfrac{dQ_y}{dx} = -q(x)\right)$

2° $\dfrac{dM_z}{dx} + Q_y = 0$ $\quad\left(\dfrac{dM_z}{dx} = -Q_y\right)$

3° $Q_y = Q_y(0) - \int_0^x q(x)\,dx$

4° $M_z = M_z(0) - Q_y(0)\,x + \int_0^x \int_0^x q(x)\,dx\,dx$

特殊函数：
$$\varphi_n(x-x_i) \equiv \begin{cases} 0, & x \le x_i \\ \dfrac{1}{n!}(x-x_i)^n, & x > x_i \end{cases}$$

则 $\varphi_0(x-x_i) = H(x-x_i)$，$\varphi_1(x-x_i) = \angle(x-x_i)$

且 $\int_0^x \varphi_n(x-x_i)\,dx = \varphi_{n+1}(x-x_i)$

注：集中力：$q(x) = P_i\,\delta(x-x_i)$

集中力偶：$q(x) = -M_i\,\delta'(x-x_i)$ （$-\delta'$ 为单位点力偶函数，也叫偶极子）

No.

Date

绘图规则：1° ~~不~~受载部分，剪力为常数，~~弯~~弯矩线性变化，斜率为剪力的负值。
2° 受均布载荷部分，剪力是线性函数，弯矩为一条抛物线。
3° 受集中力，剪力突变，弯矩转折。
4° 受集中力矩，弯矩突变。
5° 自由端，若无集中力，则剪力为零；若无外力偶，则弯矩为零。
简支端，若无外力矩，则弯矩为零。

2、弯曲应力

平截面假设：垂直于梁轴的平截面弯曲后仍为平面。

在 $\frac{l}{h}>5$ 时，平截面假设近似成立，误差 $\le 5\%$.

弯曲正应力：$\sigma_x = Ee + \frac{E}{R}y$

（纤维的线应变 $\varepsilon_x = e + \frac{y}{R}$，$e$ 为轴线正应变
假设纤维只受正应力，不受挤压应力，由胡克定律即得。）

$\sigma_x = -\frac{M_z y}{I_z}$，其中 $I_z = \int_A y^2 dA$，为惯性矩.

（$\int_A \sigma_x y\, dA = -M_x$，设有轴向内力时，$\sigma_x = \frac{Ey}{R}$）

中性轴：$y=0$。其上正应力 $\sigma_x = 0$.

中性面：所有横截面的中性轴构成的曲面。

抗弯截面系数：$W_z = \frac{I_z}{|y|_{max}}$　（矩形：$\frac{1}{6}bh^2$；圆：$\frac{1}{32}\pi D^3$）

弯曲切应力：$\tau_{xy} = -\frac{Q_y S_z^*}{I_z b}$

其中 $S_z^* \equiv \int_{A^*} y\,dA$，为 A^* 相对于 z 轴的静矩，b 为截面宽度。

（设 τ_{xy} 沿 z 轴均匀分布，由平衡方程
$\int_{A^*}(\sigma_x + d\sigma_x)\,dA - \int_{A^*}\sigma_x\,dA + \tau_{xy}\cdot b\cdot dx = 0$）

NO.
Date

梁的强度条件和梁的合理截面

强度条件： $\sigma_{max} \le [\sigma]$ ， $(\tau_{xy})_{max} \le [\tau]$

∵ $(\tau_{xy})_{max} \ll (\sigma_x)_{max}$ ，且 $[\tau] \sim [\sigma]$

∴ 一般只校核正应力. 对于 h, b 同量级的细长梁，σ_{max} 比 $(\tau_{xy})_{max}$ 大一个量级.

例外：1. $(M_z)_{max}$ 较小，$(Q_y)_{max}$ 较大

还需对腹板翼缘交接处校核 → 2. 组合截面钢梁，腹板厚度与梁高之比小于型钢相应比值

3. 木梁，顺纹抗剪强度较差，用顺纹许用切应力 $[\tau]$ 校核

截面的合理选择：

$$\left|\frac{(M_z)_{max} h_1}{I_z}\right| \le [\sigma]_c \qquad \left|\frac{(M_z)_{max} h_2}{I_z}\right| \le [\sigma]_t$$

① 优化条件 $\frac{h_1}{h_2} = \frac{[\sigma]_c}{[\sigma]_t}$

$[\sigma]_c = [\sigma]_t$ 时，截面可取对称与中性轴。

② 抗弯截面系数 $W_z = \frac{I_z}{|y|_{max}}$ ， W_z 愈大愈优化

③ 材料远离中性轴，可增大抗弯截面系数

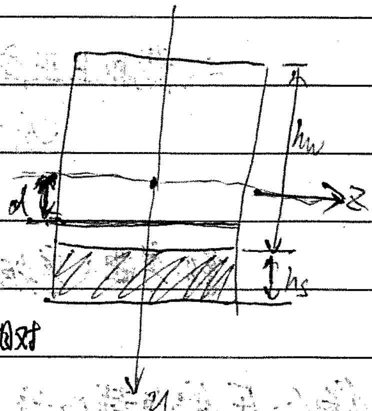
④ 离中性轴越远面积越小的截面，削去远离中性轴处小部分面积，可增大截面系数。

（原因：I_z 减小的比例小于 $|y|_{max}$ 减小的比例）

两种材料的组合梁

金属带加强的木梁

中性轴与顶边距：$d = h_w \dfrac{\frac{1}{2} + \frac{h_s E_s}{h_w E_w} + \frac{1}{2}\left(\frac{h_s}{h_w}\right)^2 \frac{E_s}{E_w}}{1 + \frac{h_s E_s}{h_w E_w}}$

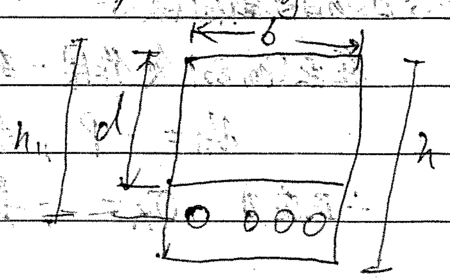


正应力：

$$\sigma_w = \frac{-M_z y}{I_w + \frac{E_s}{E_w} I_s}, \quad \sigma_s = \frac{-M_z y}{\frac{E_w}{E_s} I_w + I_s}$$

（I_w, I_s 为相对中性轴的）

钢筋混凝土梁



$$\sigma_s = E_s \frac{h_1 - d}{R}, \quad \sigma_c = E_c \frac{-d}{R}$$

则中性轴 $d = \dfrac{-nA_s + \sqrt{n^2 A_s^2 + 2nA_s b h_1}}{b}$

其中 $n = E_s / E_c$

No.

Date

由 $P_s\cdot(h_1-\frac{d}{3})=-M_z$

$\therefore \sigma_s=\frac{P_s}{A_s}=\frac{-M_z}{A_s(h_1-\frac{d}{3})}$，$\sigma_c=-\frac{2P_c}{bd}=\frac{2M_z}{bd(h_1-\frac{d}{3})}$

非对称弯曲

对于截面没有对称轴的等直梁，载荷作用在任意的通过梁轴的某个平面内。

采用平截面假设，平行于 x 轴长为 dx 的纤维 mn，坐标为 (y,z)

平动伸长量 $e\,dx$，绕 y 轴转角 $\theta_y=\frac{dx}{R_y}$，绕 z 轴转角 $\theta_z=\frac{dx}{R_z}$。

则线应变 $\varepsilon_x=e+\frac{z}{R_y}+\frac{y}{R_z}$。

不计挤压应力，则正应力

$$\sigma_x=E(e+\frac{z}{R_y}+\frac{y}{R_z})$$

结论：平截面假设 $\Leftrightarrow$ 横截面上正应力线性分布。

由 $\int_A\sigma_x dA=N_x$，$\int_A\sigma_x z\,dA=M_y$，$\int_A\sigma_x y\,dA=-M_z$

得 $eA+\frac{S_y}{R_y}+\frac{S_z}{R_z}=\frac{N_x}{E}$，$eS_y+\frac{I_y}{R_y}+\frac{I_{yz}}{R_z}=M_y/E$

$eS_z+\frac{I_{yz}}{R_y}+\frac{I_z}{R_z}=-\frac{M_z}{E}$

其中 $S_y=\int_A z\,dA$，$S_z=\int_A y\,dA$，$I_y=\int_A z^2dA$，$I_z=\int_A y^2dA$

取 y、z 轴为通过截面形心的主轴，则

$$eA=\frac{N_x}{E}，\frac{I_y}{R_y}=\frac{M_y}{E}，\frac{I_z}{R_z}=-\frac{M_z}{E}$$

$\therefore$ 截面上正应力

$$\sigma_x=\frac{N_x}{A}+\frac{M_y}{I_y}z-\frac{M_z}{I_z}y$$

斜弯曲：弯矩平面与挠曲轴所在平面不重合的弯曲变形。

偏心压缩与截面核心

在点 (y_0,z_0) 处作用一轴向力 P，则横截上的内力和内力矩为

$$N_x=-P，M_y=-Pz_0，M_z=Py_0$$

$\therefore$ 正应力 $\sigma_x=-\frac{P}{A}-\frac{Pz_0}{I_y}z-\frac{Py_0}{I_z}y$