

第二章 梁的弹塑性弯曲及梁和刚架的塑性极限分析

2-1 矩形截面梁的弹塑性纯弯曲

对梁的假定:

1° 平截面假定

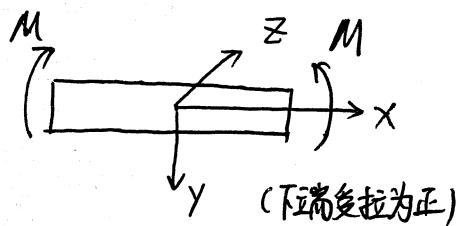
($l \gg h$) 2° 忽略切应力对变形的影响

由假定 1°, 正应变 ε 与 y 坐标的关系为

$$\varepsilon = ky + \varepsilon_0$$

其中, k 为曲率, 在小变形下,

$$k = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad w \text{ 为挠度}$$



(曲率的符号定义)

① 弹性阶段

本构关系 $\sigma = E\varepsilon = Eky + \varepsilon_0$

由纯弯曲条件

$$N = b \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma dy = 0$$

得 $\varepsilon_0 = 0$

$$M = b \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y \sigma dy = EJk$$

其中 $J = \frac{1}{12}bh^3$ 为惯性矩

弹性极限弯矩

$$M_e = J \frac{\sigma_s}{(\frac{h}{2})} = \frac{bh^2}{6} \sigma_s$$

弹性极限时的曲率

$$k_e = \frac{\sigma_s}{E(\frac{h}{2})} = \frac{2\sigma_s}{Eh}$$

无量纲形式的曲率-弯矩关系

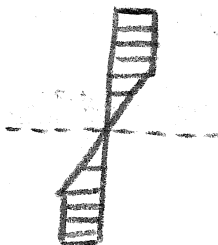
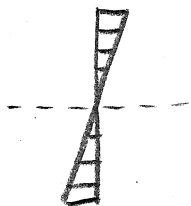
$$\frac{M}{M_e} = \frac{k}{k_e}$$

② 弹塑性阶段 (约束变形阶段)

继续加载时, 由假定 1°, 应变线性增加, 外侧纤维屈服

设弹塑性界面为 $y = (\pm)y_0$, 且 $\xi = \frac{y_0}{(\frac{h}{2})}$

本构关系 $\sigma = \begin{cases} Eky, & |y| \leq y_0 \\ \sigma_s \cdot \text{sgn}(y), & y_0 < |y| \leq \frac{h}{2} \end{cases} \rightarrow \sigma_s \cdot \frac{k}{k_e} \frac{y}{(\frac{h}{2})}$



弯矩 $M = \frac{M_e}{2} (3 - \zeta^2)$

曲率 $k = \frac{k_e}{\zeta} \cdot \text{sgn}(M)$

曲率弯矩关系

$$\left| \frac{M}{M_e} \right| = \frac{1}{2} \left[3 - \left(\frac{k_e}{k} \right)^2 \right]$$

或 ~~或~~ $\frac{k}{k_e} = \text{sgn}(M) \frac{1}{\sqrt{3 - 2 \left| \frac{M}{M_e} \right|}}$

塑性极限弯矩

$$M_s = \frac{3}{2} M_e = \frac{\sigma_s}{4} b h^2 \quad (\zeta \rightarrow 0)$$

注: 1° 当 $M \rightarrow M_s$ 时, $y=0$ 附近出现正应力的强间断, 这在塑性力学中是常见的.

2° 当 $k=5k_e$ 时, $M=1.48M_e$. 说明变形在弹性变形的量级时, 材料的塑性变形可以提高梁的抗弯能力.

③ 卸载

当加载 $M^* > M_e$ 时, 卸载。卸载时服从弹性规律。

$$\frac{\Delta M}{M_e} = \frac{\Delta k}{k_e}$$

完全卸载时, $\Delta M = -M^*$.

残余曲率

$$\frac{k^0}{k_e} = \frac{1}{\sqrt{3 - 2 \frac{M^*}{M_e}}} - \frac{M^*}{M_e}$$

$$\frac{k^0}{k^*} = 1 - \frac{M^*}{M_e} \sqrt{3 - 2 \frac{M^*}{M_e}} = 1 - \frac{3}{2} \frac{k_e}{k^*} + \frac{1}{2} \left(\frac{k_e}{k^*} \right)^3$$

残余应力

$$\frac{\sigma^0}{\sigma_s} = \begin{cases} \left(\frac{k^*}{k_e} - \frac{M^*}{M_e} \right) \frac{y}{\left(\frac{h}{2} \right)} & , \left| \frac{y}{\left(\frac{h}{2} \right)} \right| \leq \zeta \\ 1 - \frac{M^*}{M_e} \frac{y}{\left(\frac{h}{2} \right)} & , \zeta \leq \left| \frac{y}{\left(\frac{h}{2} \right)} \right| \leq 1 \end{cases}$$

注: 1° 卸载后内部应力不变号, 外部应力变号但不反向屈服.

2° 再次正向加载 M^* , 梁呈弹性响应, 弹性抗弯能力提高了;

再次反向加载, 与卸载时一起, 总的弯矩变化量不超过 $2M_e$ 时, 不会发生反向屈服.



2-2 横向载荷作用下梁的弹塑性分析

1) 沿用上节假定2°:

梁内弯矩分布为:

$$M(x) = -(L-x)P$$

1° 最大弯矩出现在梁的根部 $M = -LP$, 弹性极限载荷为

$$P_e = \frac{M_e}{L} = \frac{bh^2}{6L} \sigma_s$$

2° 塑性段与弹性段的分界面 $x = \xi$ 满足.

$$-(L-\xi)P = -M_e$$

弹塑性截面上弹性区域与塑性区域的交界面 $\xi(x)$ 满足

$$-(L-x)P = -\frac{P_e L}{2} (3 - \xi^2(x))$$

$$\text{即 } \xi(x) = \left[3 - 2 \frac{P}{P_e} \left(1 - \frac{x}{L}\right) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (0 \leq x \leq \xi)$$

3° 塑性极限载荷满足

$$-LP_s = -M_s = -\frac{3}{2} M_e$$

$$\text{即 } P_s = \frac{3}{2} P_e$$

此时弹塑性段与弹性段的分界面 $\xi = \frac{1}{3}L$.

塑性铰: 当梁的某个截面达到塑性极限载荷时, 该截面无法继续承载, 梁可以绕该截面任意转动, 像一个铰。称其为塑性铰。

特性: 1° 塑性铰保持弯矩 $|M| = M_s$.

2° 塑性铰 $|M|$ 的减小服从弹性规律.

2) 挠度计算

1° $P \leq P_e$ 时

$$\frac{k}{k_e} = \frac{M}{M_e} = -\left(1 - \frac{x}{L}\right) \frac{P}{P_e}$$

$$\text{即 } \frac{d^2 W}{dx^2} = \left(1 - \frac{x}{L}\right) \frac{P}{P_e} k_e$$

$$\text{又 } W(0) = 0, \quad W'(0) = 0$$

$$\text{所以 } W(x) = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6L}\right) \frac{P}{P_e} k_e$$

$$\text{当 } P = P_e, \quad x = L \text{ 时, } W = \frac{L^2}{3} k_e = \delta_e$$

2° $P_e < P \leq P_s$ 时,

$$\text{对 } 0 \leq x \leq \xi, \quad \frac{k}{k_e} = \text{Sgn}(M) \frac{1}{\sqrt{3 - 2 \frac{M}{M_e}}}$$

$$\text{对 } \xi \leq x \leq L, \quad \frac{k}{k_e} = \frac{M}{M_e}$$

若 $P = P_s$, 则 $\xi = \frac{1}{3}L$.

$$\text{对 } 0 \leq x \leq \frac{1}{3}L, \quad \zeta(x) = \sqrt{\frac{3x}{L}}$$

$$k = -\frac{k_e}{\zeta} = -\sqrt{\frac{L}{3x}} k_e$$

$$\text{同样 } W(0) = W'(0) = 0$$

$$\text{所以 } W(x) = \frac{4}{3\sqrt{3}} \sqrt{Lx^3} k_e$$

$$\text{对 } \frac{1}{3}L \leq x \leq L, \quad k = -\frac{3}{2} \left(1 - \frac{x}{L}\right) k_e$$

$$\text{因为 } W\left(\frac{1}{3}L - 0\right) = W\left(\frac{1}{3}L + 0\right)$$

$$W'\left(\frac{1}{3}L - 0\right) = W'\left(\frac{1}{3}L + 0\right)$$

$$\text{所以 } W(x) = \frac{1}{4} \left[-\left(\frac{x}{L}\right)^3 + 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 + \left(\frac{x}{L}\right) - \frac{1}{27} \right] L^2 k_e$$

$$\text{在 } x=L \text{ 处, } W = \delta_s = \frac{20}{27} L^2 k_e = \frac{20}{9} \delta_e$$

2-3 强化材料矩形截面梁的弹塑性纯弯曲.

对一般的强化材料 $\sigma = E\varepsilon [1 - w(\varepsilon)]$, 且 $w(\varepsilon) = w(-\varepsilon)$

在纯弯曲时, 截面平均正应力 $\varepsilon_0 = 0$, 弯矩

$$M = 2bE \left[\int_0^{\frac{h}{2}} y\varepsilon dy - \int_0^{\frac{h}{2}} y\varepsilon w(\varepsilon) dy \right]$$

因为 ~~$w(\varepsilon) = 0$ ($0 \leq y \leq \frac{h}{2}$)~~ 在弹性区域内 $w(\varepsilon) = 0$, 令 $\varepsilon = ky$, 则

$$M = EJk - \frac{2bE}{k^2} \int_{shk/2}^{hk/2} \varepsilon^2 w(\varepsilon) d\varepsilon \quad (\text{假设 } k > 0)$$

~~这就是~~ 这就是 $M \sim k$ 关系.

1° 若已知 k , 要求 M , 则依据 $|k| = \frac{k_0}{\xi}$, 可以直接得到 M .

2° 若已知 M , 要求 k . 则可以用迭代法.

$$\begin{cases} k^{(0)} = \frac{M}{EJ} \\ k^{(n)} = \frac{M}{EJ} + Tk^{(n-1)} \end{cases}$$

$$\text{其中 } Tk \equiv \frac{2b}{J} \int_0^{\frac{h}{2}} y [ky w(ky)] dy$$

现证 T 算子是一个压缩映射:

$$\therefore 0 < \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \leq E \quad (\text{因为是强化材料, 所以 } \frac{d\sigma}{d\varepsilon} > 0)$$

$$\therefore 0 \leq \frac{d[Ew(\varepsilon)]}{d\varepsilon} < 1, \text{ 取 } \frac{d[Ew(\varepsilon)]}{d\varepsilon} \text{ 上界 } \beta_0 < 1.$$

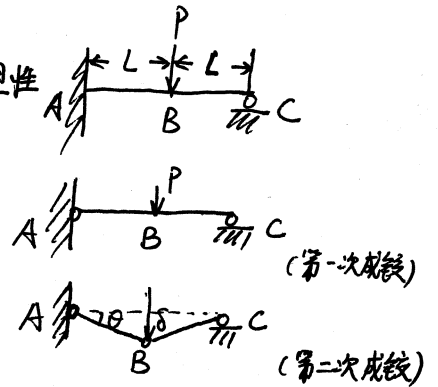
$$\text{则 } |k_2 y w(k_2 y) - k_1 y w(k_1 y)| \leq \beta_0 (k_2 - k_1) y$$

$$\therefore |TK^{(n+1)} - TK^{(n)}| \leq \beta_0 |k^{(n+1)} - k^{(n)}|. \quad \square.$$

2.4 超静定梁的塑性极限载荷.

超静定梁如图所示, 假设其 $M \sim k$ 关系为理想弹塑性模型, 即

$$M = \begin{cases} \frac{k}{k_s} \cdot M_s, & |k| < k_s \\ M_s, & |k| \geq k_s \end{cases}$$



1° 弹性阶段, A, B 点弯矩为

$$M_A = -\frac{3}{8}PL, \quad M_B = \frac{5}{16}PL$$

绝对值最大的弯矩出现在 A 截面, 成塑性铰时载荷为

$$P_e = \frac{8M_s}{3L}$$

此时体系变为静定结构.

2° 有一塑性铰时, A 点弯矩 $M_A = -M_s$, 由平衡条件可得

$$C \text{ 点反力 } R_c = \frac{P}{2} - \frac{M_s}{2L}$$

$$B \text{ 点弯矩 } M_B = R_c L = \frac{PL}{2} - \frac{M_s}{2}$$

B 点成塑性铰时, 载荷

$$P_s = \frac{3M_s}{L}, \text{ 称为梁的塑性极限载荷.}$$

2.5 用静力法和机动法求刚架的塑性极限载荷.

1° 赘余力 R_i : 对 n 次超静定刚架, R_i 有 n 个.

可能出现塑性铰的节点数 m : 依据载荷分布可以判断弯矩分布, 从而可以得到可能出现塑性铰的节点位置及个数. 通常, $m > n$.

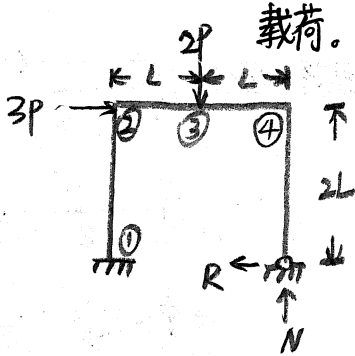
节点弯矩 $M_j^0 \quad (j=1, \dots, m)$

外力 $P_\alpha^0 \quad (\alpha=1, \dots, r)$

~~静力场~~
 静力场 $\{M_j^0, P_\alpha^0\}$: 由外力 P_α^0 和赘余力 R_i , 依据平衡条件, 可以得出 m 个 $M_j^0(R_i, P_\alpha^0)$ 关系. 消去 n 个 R_i 可得 $m-n$ 个关系 $f(M_j^0, P_\alpha^0) = 0$. 这样的节点弯矩 M_j^0 和外力 P_α^0 满足平衡条件, 称为静力场.

静力许可场: 不违反屈服条件, 即 $|M_j^0| \leq M_s$ ($j=1, \dots, m$) 的静力场 $\{M_j^0, P_\alpha^0\}$.

静力法: 在所有静力许可场中寻找最大外载荷的方法, 用于求塑性极限载荷.



如图, 已知刚架各截面塑性极限弯矩均为 M_s , 在节点 ②, ③ 处分别受水平力 $3P$ 和垂直力 $2P$. 求结构塑性极限载荷 P .

解: (静力法)

(1) 结构为 2 次静定, 且因为结构内弯矩呈分段线性分布, 所以所有可能出现塑性铰的节点为 ①, ②, ③, ④, 共 4 个.

(2) 设赘余力为 R, N , 弯矩以内侧受拉为正.

得到 4 个平衡方程:

$$\begin{cases} M_4 + 2RL = 0 \\ M_3 + 2RL - NL = 0 \\ M_2 + 2PL + 2RL - 2NL = 0 \\ M_1 + 6PL + 2PL - 2NL = 0 \end{cases}$$

消去赘余力 R, N , 得到 2 个平衡方程.

$$\begin{cases} -M_2 + 2M_3 - M_4 = 2PL \\ -M_1 + M_2 - M_4 = 6PL \end{cases}$$

(3) 将弯矩无量纲化: $m_j = \frac{M_j}{M_s}$ ($j=1, 2, 3, 4$)

将外力无量纲化: $f = \frac{PL}{M_s}$

平衡方程化为

$$\begin{cases} -m_2 + 2m_3 - m_4 = 2f \\ -m_1 + m_2 - m_4 = 6f \end{cases}$$

考虑不屈服条件: $-1 \leq m_j \leq 1$ ($j=1, 2, 3, 4$)

则有

$$\begin{cases} -1 \leq m_2 - m_4 - 6f \leq 1 \\ -2 \leq m_2 + m_4 + 2f \leq 2 \\ -1 \leq m_2 \leq 1 \\ -1 \leq m_4 \leq 1 \end{cases}$$

考虑到不等式 $\begin{cases} a \leq x \leq b \\ c \leq x \leq d \end{cases}$, 成立的等价条件为 $\begin{cases} a \leq d \\ c \leq b \end{cases}$

所以 $\begin{cases} -1 + m_4 + 6f \leq 1 \\ -1 \leq 1 + m_4 + 6f \\ -1 + m_4 + 6f \leq 2 - m_4 - 2f \\ -2 - m_4 - 2f \leq 1 + m_4 + 6f \\ -2 - m_4 - 2f \leq 1 \\ -1 \leq 2 - m_4 - 2f \\ -1 \leq m_4 \leq 1 \end{cases}$, 整理得 $\begin{cases} -2 - 6f \leq m_4 \leq 2 - 6f \\ -3 - 2f \leq m_4 \leq 3 - 2f \\ -\frac{3}{2} - 4f \leq m_4 \leq \frac{3}{2} - 4f \\ -1 \leq m_4 \leq 1 \end{cases}$

再一次联立不等式, 得

整理得 $\begin{cases} -2 - 6f \leq 3 - 2f, & -3 - 2f \leq 2 - 6f \\ -2 - 6f \leq \frac{3}{2} - 4f, & -\frac{3}{2} - 4f \leq 2 - 6f \\ -3 - 2f \leq \frac{3}{2} - 4f, & -\frac{3}{2} - 4f \leq 3 - 2f \\ -2 - 6f \leq 1, & -1 \leq 2 - 6f \\ -3 - 2f \leq 1, & -1 \leq 3 - 2f \\ -\frac{3}{2} - 4f \leq 1, & -1 \leq \frac{3}{2} - 4f \end{cases}$ $\begin{cases} |f| \leq \frac{5}{4} \\ |f| \leq \frac{7}{4} \\ |f| \leq \frac{9}{4} \\ |f| \leq \frac{1}{2} \\ |f| \leq 2 \\ |f| \leq \frac{5}{8} \end{cases}$

$\therefore |f| \leq \frac{1}{2}$

满足上述不等式的 $\{m_i, f\}$ 构成静力许可场, 且其中最大外载荷为 $f = \frac{1}{2}$, 即塑性极限载荷 $P_S = \frac{M_S}{2L}$.

(4) 回代, 求弯矩分布.

由屈服条件和平衡方程可知

$$m_1 = -1, m_2 = 1, m_3 = \frac{1}{2}, m_4 = -1$$

所以节点 ①, ②, ④ 成为塑性铰.

基本机构: n 次超静定刚架共有 m 个可能出现塑性铰的节点, 可以列出 $m-n$ 个独立的平衡方程。由虚功原理可知, 这 $m-n$ 个方程对应着结构的 $m-n$ 个破坏机构, 其它的破坏机构可以通过这几个破坏机构组合而成, 故称这 $m-n$ 个破坏机构为基本机构。

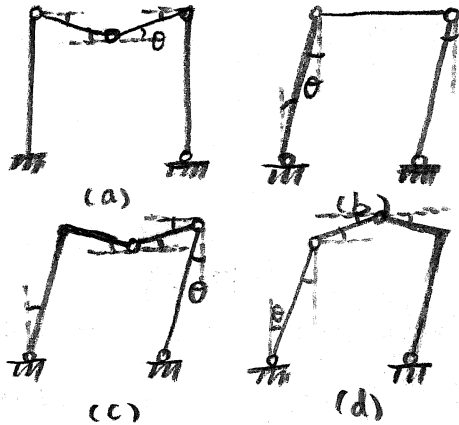
机动场: 将每个破坏机构中塑性铰处的相对转角记为 θ_k^* ($k=1, \dots, m-n$), 将外载荷对应的广义位移记为 Δ_α^* ($\alpha=1, \dots, r$), 则称 $\{\theta_k^*, \Delta_\alpha^*\}$ 为机动场。

运动许可场：外载荷在广义位移 Δ_i^* 上所作的总功为正值的机动场 $\{\theta_k^*, \Delta_k^*\}$ 。

机动法：在所有运动许可场中寻找最小外载荷的方法，~~用于~~用于求塑性极限载荷。

注：由运动许可场求外载荷的方法：令外载荷功与内部耗散功相等，即得外载荷的值。

2° 可能的破坏机构数不少于 C_m^{n+1} 个。



同样是刚才的题，用机动法求解。

(1) 同样，可知

超静定次数 $n = 2$

可能成塑性铰点个数 $m = 4$

分析可知，可能的破坏机构总数就是

$$C_m^{n+1} = C_4^3 = 4 \text{ 个。}$$

基本机构数目为 $m - n = 2$ 个。

(2) 取图中 (a), (b) 为基本机构，(a)+(b) 得 (c)，-(a)+(b) 得 (d)。

计算各机构载荷值：

$$(a) \quad 2PL\theta = 4M_s\theta \Rightarrow p = \frac{2M_s}{L}$$

$$(b) \quad 6PL\theta = 3M_s\theta \Rightarrow p = \frac{M_s}{2L}$$

$$(c) \quad 6PL\theta + 2PL\theta = 5M_s\theta \Rightarrow p = \frac{5M_s}{8L}$$

$$(d) \quad 6PL\theta - 2PL\theta = 5M_s\theta \Rightarrow p = \frac{5M_s}{4L}$$

所以，结构的塑性极限载荷为 $p_s = \frac{M_s}{2L}$ ，对应机构为 (b)。

2.6 极限分析中的上下限定理。

极限分析：直接求解塑性极限载荷及其相应塑性流动机构的分析方法。

最常用的是静力法和机动法。

上下限定理：假设结构上的各个外载荷 P_α 为集中力，以相同的比例因子 η ($\eta > 0$) 逐渐增长。则由静力法得到的载荷乘子 η^0 小于等于真实的载荷乘子 $\bar{\eta}$ ，由机动法得到的载荷乘子 η^* 大于等于真实的载荷乘子 $\bar{\eta}$ 。

$$\text{即 } \eta^0 \leq \bar{\eta} \leq \eta^* .$$

证明：虚功原理：任一静力许可场在任一运动许可场上作功时，
虚外载荷功等于虚内力功。

因为真实场 $\{M_k, P_\alpha\}$, $\{\theta_k, \Delta_\alpha\}$ 既是静力许可场，也是运动许可场，所以虚功原理可表述为

$$\sum_{\alpha=1}^r P_\alpha^0 \Delta_\alpha = \sum_{k=1}^{n+1} M_k^0 \theta_k \quad (1)$$

$$\sum_{\alpha=1}^r P_\alpha \Delta_\alpha^* = \sum_{k=1}^{n+1} M_k \theta_k^* \quad (2)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{\alpha=1}^r P_\alpha \Delta_\alpha = \sum_{k=1}^{n+1} M_s |\theta_k| \quad (3)$$

其中 $\{M_k^0\}$, $\{M_k\}$ 满足不屈服条件

$$|M_k^0| \leq M_s \quad (4), \quad |M_k| \leq M_s \quad (5)$$

$\{\theta_k, \Delta_\alpha\}$, $\{\theta_k^*, \Delta_\alpha^*\}$ 满足运动许可条件

$$\sum_{\alpha=1}^r N_\alpha \Delta_\alpha \geq 0, \quad (6)$$

$$\sum_{\alpha=1}^r N_\alpha \Delta_\alpha^* \geq 0 \quad (7)$$

$$\sum_{\alpha=1}^r P_\alpha^* \Delta_\alpha^* = \sum_{k=1}^{n+1} M_s |\theta_k^*| \quad (8)$$

$$\textcircled{3} - \textcircled{1} \text{ 得 } (\bar{\eta} - \eta^0) \sum_{\alpha=1}^r N_\alpha \Delta_\alpha = \sum_{k=1}^{n+1} (M_s - \text{sgn}(\theta_k) M_k^0) |\theta_k|$$

$$\text{由 } \textcircled{4} \text{ 知 } (\bar{\eta} - \eta^0) \sum_{\alpha=1}^r N_\alpha \Delta_\alpha \geq 0$$

$$\text{由 } \textcircled{6} \text{ 知 } \bar{\eta} \geq \eta^0$$

$$\textcircled{8} - \textcircled{2} \text{ 得 } (\eta^* - \bar{\eta}) \sum_{\alpha=1}^r N_\alpha \Delta_\alpha^* = \sum_{k=1}^{n+1} (M_s - M_k \text{sgn}(\theta_k^*)) |\theta_k^*|$$

$$\text{由 } \textcircled{5} \text{ 知 } (\eta^* - \bar{\eta}) \sum_{\alpha=1}^r N_\alpha \Delta_\alpha^* \geq 0$$

$$\text{由 } \textcircled{7} \text{ 知 } \eta^* \geq \bar{\eta}$$

$$\text{综合 } \therefore \eta^0 \leq \bar{\eta} \leq \eta^*. \quad \square.$$

注：上下限定理表明

$$\max\{\eta^0\} = \bar{\eta} = \min\{\eta^*\}.$$

2-7 最轻结构的极限设计

极限设计(优化设计): 在给定外载和某些其它条件下, 设计一种最优的结构。

最轻结构的极限设计(数学表述):

假设载荷给定, 结构各构件长度 L_i 也给定, 结构由同一类型的构件组成, 构件的线密度 G 是其截面的塑性极限弯矩 M_s 的线函数: $G = a + bM_s$.

则有结构重量 $W = \sum_i (a + bM_{si})L_i = a \sum_i L_i + b \sum_i M_{si}L_i$.

设对于第 q 种破坏机构, θ_{ij}^q 表示其第 i 个构件上点 X_j 两侧梁段的相对转角, Δ_α^q 表示力作用点 X_α 处的广义位移, 运动许可场为 $\{\theta_{ij}^q, \Delta_\alpha^q\}$.

结构安全则意味着在一切运动许可场上, 总外力功小于总耗散功。

问题:

求 $\{M_{si}\}$, 使得 $\forall q$:

$$\sum_{\alpha=1}^n P_\alpha \Delta_\alpha^q < \sum_j M_{sj} |\theta_{ij}^q|$$

且 $X = \sum_i M_{si} L_i$ 最小。

双跨连续梁最轻结构的极限设计:

双跨连续梁如图所示, 两段梁的极限弯矩分别为 M_{s1} 和 M_{s2} 。

由于 B 点两侧截面的塑性极限弯矩可能不同, 所以两侧能分别成铰。

所有可能出现塑性铰的位置为 ①, ②, ③, ④。

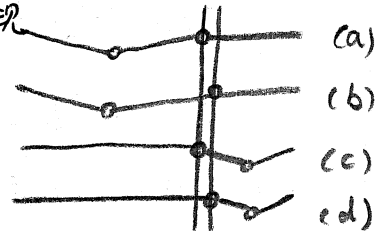
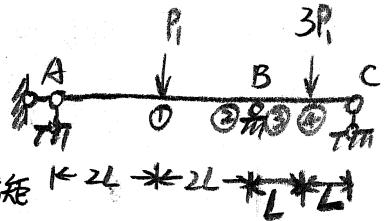
(a), (b), (c), (d) 是四种可能出现的机构, 其它机构要么是它们的组合, 要么不可能出现。

这四种机构对应的安全条件为:

$$\begin{cases} 2P_1 L \leq 3M_{s1} \\ 2P_1 L \leq 2M_{s1} + M_{s2} \\ 3P_1 L \leq M_{s1} + 2M_{s2} \\ 3P_1 L \leq 3M_{s2} \end{cases}$$

引入无量纲量 $m_{s1} = \frac{M_{s1}}{P_1 L}$, $m_{s2} = \frac{M_{s2}}{P_1 L}$, $x = \frac{X}{P_1 L^2}$ 。

问题: 在条件 $m_{s1} \geq \frac{2}{3}$, $2m_{s1} + m_{s2} \geq 2$, $m_{s1} + 2m_{s2} \geq 3$, $m_{s2} \geq 1$ 下, 求使 $x = 4m_{s1} + 2m_{s2}$ 最小的 m_{s1} 和 m_{s2} 。



线性规划法: 略去.

不等式法: $\because M_{S2} = \frac{X}{2} - 2M_{S1}$, 代入不等式组得

$$\begin{cases} M_{S1} \geq \frac{2}{3} \\ X \geq 4 \\ M_{S1} \leq \frac{X}{4} - \frac{1}{2} \\ M_{S1} \leq \frac{X}{3} - 1 \end{cases}$$

消去 M_{S1} 得

$$\begin{cases} X \geq 4 \\ \frac{2}{3} \leq \frac{1}{4}X - \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} \leq \frac{1}{3}X - 1 \end{cases}$$

解得 $X \geq 5$

$$\text{对应} \begin{cases} M_{S1} = \frac{2}{3}, \text{ 即 } M_{S1} = \frac{2}{3}Pl \\ M_{S2} = \frac{1}{6}, \text{ 即 } M_{S2} = \frac{1}{6}Pl \end{cases}$$

对应着 (a)(c) 机构成立.

注: 最优设计要求结构破坏时, 有 ~~一个~~ 基本机构同时出现,
一般来讲,

以充分发挥所有材料的潜力.

2.8 弯矩和轴向力同时作用时的弹性极限曲线和塑性极限曲线.

认为最初的两个假设仍然成立.

中性层: 梁中应变为零的纤维.

$$\text{中性层坐标为 } \bar{y} = -\frac{\epsilon_0}{k}, \text{ 记 } \eta_0 = \frac{-\bar{y}}{h}$$

① 弹性阶段

$$\text{应力分布 } \sigma = Ek \left(y + \frac{1}{2} \eta_0 h \right)$$

$$\text{轴力 } N = E\epsilon_0 A, \text{ 弯矩 } M = EKJ.$$

$$\text{取无量纲数 } n = \frac{N}{N_s} = \frac{\epsilon_0}{\epsilon_s}, \quad m = \frac{M}{M_s} = \frac{2k}{3k\epsilon_0}$$

$$\text{最大正应力为 } \frac{1}{2}Ek h (1 + \eta_0)$$

达到弹性极限时,

$$\sigma_s = \frac{1}{2}Ek h (1 + \eta_0)$$

$$\text{得 } k = \frac{2\sigma_s}{Eh(1+\eta_0)} = \frac{k\epsilon_0}{1+\eta_0}$$

$$\epsilon_0 = \frac{1}{2} \eta_0 h k = \frac{\sigma_s}{E} \cdot \frac{\eta_0}{1+\eta_0} = \epsilon_s \frac{\eta_0}{1+\eta_0}$$

$$\text{所以 } \begin{cases} m = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{1+\eta_0} \right) \\ n = \frac{\eta_0}{1+\eta_0} \end{cases}$$

$$\text{解得 } \frac{2}{3}m + n = 1$$

得到 $N > 0, M > 0$ 时的弹性极限曲线: $\frac{3}{2}m+n=1$.

② 塑性极限

塑性极限时, 轴力 $N = \eta_0 bh \sigma_s$

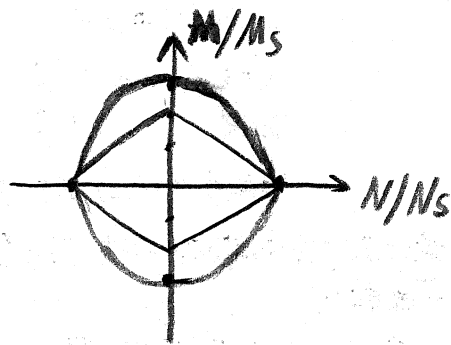
$$\text{弯矩 } M = (1 - \eta_0^2) \frac{bh^2}{4} \sigma_s$$

$$\text{即得 } \eta = \eta_0$$

$$m = 1 - \eta_0^2$$

得到 $N > 0, M > 0$ 时的塑性极限曲线: $m = 1 - n^2$.

又称为在弯曲和拉伸同时作用下的交互曲线。



弹性极限曲线与塑性极限曲线关于 x, y 轴对称, 如图所示。