边值问题

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

引理9.1　齐次线性微分方程的任何非零解在区间J上都是孤立的。

定理9.1　设 $\varphi_1(x)$ 和 $\varphi_2(x)$ 是齐次线性方程的两个非零解，则：

(1) 它们线性相关 $\Leftrightarrow$ 它们有相同的零点

(2) 它们线性无关 $\Leftrightarrow$ 它们的零点互相交错.

定理9.2（施图姆比较定理）

有两个齐次线性微分方程 $y'' + p(x)y' + Q(x)y = 0$,

$y'' + p(x)y' + R(x)y = 0$,

其中 $p(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ 在区间J上连续，且 $R(x) \geq Q(x)$.

若 $\varphi(x)$ 是第一个方程的一个非零解，且 x_1、x_2 是它的两个相邻零点，则第二个方程的任何非零解 $\psi(x)$ 在 x_1, x_2 之间至少有一个零点 x_0.（$x_0 \in [x_1, x_2]$）

思想：用方程的一个解，控制另一个方程的所有解。

判别法1：若齐次线性微分方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ 中的系数函数 $q(x)\leq 0$，则它的一切非零解都是非振动的。

判别法2：微分方程 $y''+Q(x)y=0$，其中 $Q(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续，若 $Q(x)\geq m>0$，则方程的任何非零解在 $[a,+\infty)$ 上无限振动，且它的任何两个相邻零点的间距不大于 $\frac{\pi}{\sqrt{m}}$.

施图姆-刘维尔边值问题（S-L边值问题）

$$\begin{cases} (p(x)y')' + (q(x)+\lambda r(x))y = 0 & (x\in[a,b]) \\ K y(a) + L y'(a) = 0 \\ M y(b) + N y'(b) = 0 \end{cases}$$

其中 $q(x)$、$r(x)$ 连续，$p(x)$ 可微；$p(x)>0$, $r(x)>0$

$K^2+L^2>0$, $M^2+N^2>0$.

S-L边值问题的特征值和特征函数：

若$\lambda=\lambda_0$时，S-L边值问题有非零解 $\varphi_0(x)$，则称λ_0为此问题的特征值，$\varphi_0(x)$为相应的特征函数。

(特征值存在定理) 定理9.3 S-L边值问题有无限多个(简单的)特征值，且可以排列成：$\lambda_0<\lambda_1<\cdots<\lambda_k<\cdots$，且 $\lim\limits_{k\to\infty}\lambda_k=+\infty$.

引理9.5 S-L边值问题的每个特征值有且仅有一个线性无关的特征函数。

引理9.6 特征函数系 $\varphi_n(x)=\varphi(x,\lambda_n)$ $(n=0,1,2,\cdots)$ 在区间$[a,b]$上组成一个正交系．即

$$\int_a^b \varphi_n(x)\varphi_k(x)\,dx=\begin{cases}0 & (n\neq k)\\ \delta_k>0 & (n=k).\end{cases}$$

定理9.4 若函数$f(x)$在区间$[a,b]$上满足Dirichlet条件，则它的广义傅氏级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n\varphi_n(x)$ 收敛到它自己。