No.

Date

第八章 压杆稳定性

1、稳定性问题的提法

稳定性：$\forall \eta>0, \exists \varepsilon>0$, st. 扰动 $|Q|<\varepsilon$, $|v|<\eta$.

不稳定：$\exists \eta>0, \forall \varepsilon>0$, st 扰动 $|Q|\leq\varepsilon$, $|v|>\eta$.

对于弹性系统，临界力是与扰动特性无关的；对于塑性体，临界力可能与扰动特性有关。

2、按欧拉方法给出的压杆临界力

$M_z=-Pv(x)$，挠曲轴的微分方程为

$$EI_z v''+Pv=0,$$

边界条件 $v(0)=v(l)=0$.

令 $k^2=\frac{P}{EI_z}$ 得 $v(x)=A\sin kx+B\cos kx$，$B=0$，$kl=n\pi$

$\therefore$ $P_n=\frac{n^2\pi^2EI_z}{l^2}$，对应平衡态为 $v_n(x)=A\sin\frac{n\pi}{l}x$，称为失稳形式，或屈曲形式。

最小临界力称为欧拉临界力，

$$P_E=\pi^2EI_z/l^2，对应屈曲形式\ v(x)=A\sin\frac{\pi}{l}x.$$

在扰动 M_z^* 下，纵-横弯曲方程为

$$v''+k^2v=\frac{M_z^*}{EI_z}$$

解得挠度表达式 $v(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{m_n}{P-P_n}\sin\frac{n\pi x}{l}$，其中 $m_n=\frac{2}{l}\int_0^l M_z^*\sin\frac{n\pi x}{l}dx$

这说明当 $P=P_n$ 时，$v\to\infty$，发生失稳

3、欧拉弹性线

基里赫里定理：稳定平衡状态下系统的总势能取极小值。

在压力 P 作用下，位移 $\Delta=\frac{1}{2}\int_0^l v'^2dx$ （微小扰动 $v(x)$ 为对直线平衡态的偏移）

杆的弯曲变形能 $U=\frac{1}{2EI_z}\int_0^l M_z^2dx=\frac{EI_z}{2}\int_0^l v''^2dx$

小扰动引起的总势能变化

$$W=U-P\Delta \quad （把压力P视为有势场）$$

若 $W>0$，则杆的直线形态平衡是稳定的；若 $W<0$，则不稳定。

~~楚确定~~

No.

Date

对任意扰动 $v(x)=\sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin\frac{k\pi x}{l}$， $W=\frac{\pi^2}{4l}\sum_{s=1}^{\infty} a_s^2 (P_s-P)$

若 $P<P_1=P_E$，则对任意扰动 $v(x)$，$W>0$；若 $P>P_E$，则 $\exists v(x)$，使 $W<0$.

压杆稳定性的计算

1° 已知稳定安全系数 n_{cr}： 稳定条件 $\frac{P}{A}\le\frac{\sigma_{cr}}{n_{cr}}$

其中 $\sigma_{cr}=\begin{cases}\sigma_y\left[1-a\left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2\right] & (\lambda<\lambda_c)\\ \sigma_E=\frac{\pi^2 E}{\lambda^2} & (\lambda>\lambda_c)\end{cases}$

临界柔度 $\lambda_c=\pi\sqrt{\frac{E}{0.57\sigma_y}}$

系数 $a=0.43$ （A2、A3钢，锰钢）

2° 已知压缩许用应力 $[\sigma]$： 稳定条件 $\frac{P}{A\varphi(\lambda)}\le[\sigma]$

其中折算系数 $\varphi(\lambda)$ 用查表与插值表确定。