附： 常用傅里叶变换 $F^{-1}[\exp\{-a^2\lambda^2 t\}] = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\exp\{-\frac{x^2}{4a^2 t}\}$ （热传导）

$$F^{-1}[\cos a\lambda^2 t] = \frac{1}{2\sqrt{2\pi a t}}\left(\cos\frac{x^2}{4at}+\sin\frac{x^2}{4at}\right)$$

常见常微分方程解法

1、一阶线性方程 $y'+p(x)y=q(x)$

通解：$y=e^{-\int p(x)dx}\left(c+\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx\right)$

推导：1° 乘以因子 $e^{\int p(x)dx}$

得 $e^{\int p(x)dx}dy+e^{\int p(x)dx}p(x)y\,dx=e^{\int p(x)dx}q(x)dx$

2° 恰当微分 $d\left(e^{\int p(x)dx}y\right)=d\left(\int e^{\int p(x)dx}q(x)dx\right)$

3° 积分即得

2、二阶常系数线性非齐次方程 $y''+py'+qy=t(x)$

它的齐次问题为 $y''+py'+qy=0$，令 $y=e^{rx}$

得 $r^2+pr+q=0$，解得 $r=\frac{-p\pm\sqrt{p^2-4q}}{2}$

令 $w=\frac{\sqrt{|p^2-4q|}}{2}$

1° $p^2-4q>0$，则 $y=e^{-\frac{p}{2}x}(Ae^{wx}+Be^{-wx})$

2° $p^2-4q=0$，则 $y=e^{-\frac{p}{2}x}(A+Bx)$

3° $p^2-4q<0$，则 $y=e^{-\frac{p}{2}x}(A\cos wx+B\sin wx)$

设齐次问题的通解为 $\varphi_1(x)$，$\varphi_2(x)$ 则非齐次方程的通解为

$$y(x)=C_1\varphi_1(x)+C_2\varphi_2(x)+\int_{x_0}^{x}\frac{\varphi_1(\xi)\varphi_2(x)-\varphi_1(x)\varphi_2(\xi)}{\varphi_1(\xi)\varphi_2'(\xi)-\varphi_2(\xi)\varphi_1'(\xi)}\cdot t(\xi)\,d\xi$$

3、欧拉方程 $x^2y''+pxy'+qy=0$

令 $x=e^s$，则 $\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{\partial y}{\partial s}\frac{1}{x}$，$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 y}{\partial s^2}\frac{1}{x^2}-\frac{\partial y}{\partial s}\frac{1}{x^2}$

则 $\frac{\partial^2 y}{\partial s^2}+(p-1)\frac{\partial y}{\partial s}+qy=0$

解出此方程后，做代换 $s=\ln x$.

4、（极坐标下出现的一个方程） $\frac{d^2u}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{du}{dr}+k^2u=0$

作代换 $V=ur$，则 $\frac{d^2u}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{du}{dr}$ 成为 $\frac{d^2V}{dr^2}\frac{1}{r}$

k^2u 成为 $k^2\frac{V}{r}$

则有 $\frac{d^2V}{dr^2}+k^2V=0$.