《工程数学》 熊春阳： 力学513 ，62757940
cyxiang@pku.edu.cn.
《数学物理方法》 严镇军.
参考书： 《复变函数》 严镇军 《数学物理方法》 严镇军.
《数学物理方法》 周世勋.
Complex variables and applications } 机械工业出版社.
复分析基础与工程应用
《复变函数论方法》 6th ed. 高教版.
10% 40% — 30% — 课外加分.

第一章 复数与平面点集.
Arg Z：幅角 $\text{Arg} Z = \arg Z + 2k\pi \quad (-\pi < \arg Z \le \pi)$.
注： $Z=0$ 时，幅角无定义.

$$Z = x + iy = r\cos\theta + i r\sin\theta = re^{i\theta}$$

$$Z_1 \cdot Z_2 = (r_1 r_2) e^{i(\theta_1+\theta_2)}, \quad Z^2 = r^2 e^{2i\theta}$$

$$Z_1 / Z_2 = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1-\theta_2)}$$

$$Z^n = \begin{cases} 0, & Z=0 \\ r^n e^{in\theta}, & Z\neq 0 \end{cases} \qquad \sqrt[n]{Z} = \begin{cases} 0, & Z=0 \\ \sqrt[n]{r}\, e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}, & Z\neq 0 \end{cases}$$ (复数根号)

开复平面：常义复平面. 闭复平面：开复平面＋无穷远点. (复球面，黎曼球面)

区域(D)： ① 非空点集 ② 开集 ③ 连通
边界 C
闭域：区域 ＋ 边界.
(注：闭域≠区域，当且仅当是复平面)
连通 { 单连通区域 ：简单曲线围成的区域
多连通区域.
简单曲线： 无重点的连续曲线.

# 第2章、复变数函数

导数：$\frac{dw}{dz} = f'(z)$

可微：$|f(z+\Delta z) - f(z) - f'(z)\Delta z| = o(|\Delta z|)$

解析：$f(z)$在区域D内解析 $\equiv$ $f(z)$在D内每一点可微

$f(z)$在点$z_0$解析 $\equiv$ $f(z)$在$z_0$的某个邻域内可微。

$z_0$为$f(z)$的奇点 $\equiv$ $f(z)$在点$z_0$不解析.

微商运算法则：$[f(z) \pm g(z)]' = f'(z) \pm g'(z)$

$[f(z)g(z)]' = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$

$\left[\frac{f(z)}{g(z)}\right]' = \frac{1}{g^2(z)}[f'(z)g(z) - f(z)g'(z)]$

$\{f[g(z)]\}' = f'(w)g'(z) \quad (w = g(z))$

$f'(z) = \frac{1}{\varphi'(w)} \quad (w = f(z),\ z = \varphi(w)$，是互为反函数的单值函数$)$

柯西-黎曼定理

$f(z)$在$z$点可微，当且仅当：①二元函数$u(x,y), v(x,y)$在$z$点可微；② Cauchy-Riemann 方程
$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$
（方程中各偏导在$z$点取值）

注：依上述定理的推导可知，$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x}$
$= \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}$.

初等函数

指数函数 $e^z = e^x \cdot e^{iy} = \exp\{z\}$.

性质：① $\forall z,\ e^z \neq 0$；② $\lim_{z\to\infty} e^z$ 不存在；③ $\exp\{z_1\}\cdot\exp\{z_2\} = \exp\{z_1+z_2\}$

④ $e^z$是周期函数，$e^{z_1} = e^{z_2} \Leftrightarrow z_1 - z_2 = 2k\pi i$

⑤ $e^z$是复平面上的解析函数，$(e^z)' = e^z$

三角函数 $\sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$；$\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$

性质：① $(\sin z)' = \cos z$，$(\cos z)' = -\sin z$

② $\sin z$和$\cos z$是周期函数，周期为$2\pi$；③ $\{z | \sin z = 0\} = \{n\pi,\ n \in \mathbb{Z}\}$

④ $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$；⑤ $\sin z, \cos z$是无界函数.

对数函数：$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i\operatorname{Arg} z$，或

$\ln z = \ln|z| + i\arg z \quad (-\pi < \arg z \le \pi)$.

性质：① $\operatorname{Ln}(z_1 z_2) = \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2$；② $\operatorname{Ln}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \operatorname{Ln} z_1 - \operatorname{Ln} z_2$

③ 区分$\operatorname{Ln} z$与$\ln z$.（多值与单值）

一般幂函数：$z^\alpha = \exp\{\alpha \operatorname{Ln} z\} = \exp\{\alpha[\ln|z| + i(\arg z + 2k\pi)]\}$
$(k = 0, \pm 1, \cdots)$

注：约定复变函数中，$e^z$ 为指数函数（而不是一般幂函数的值）.

反三角函数：由 $z=\sin w$，$\Rightarrow$ $w=\mathrm{Arcsin}\, z = -i\,\mathrm{Ln}(iz+\sqrt{1-z^2})$

注：式中根式理解为双值函数.

第三章 解析函数的积分.

$$\int_l f(z)\,dz \equiv \lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\zeta_i)\,\Delta z_i \qquad (d=\max\{|\Delta z_i|\})$$

$$\int_l f(z)\,dz = \int_l (u+iv)(dx+i\,dy)$$

长大不等式： $\left|\int_C f(z)\,dz\right| \le \int_C |f(z)|\,ds \le Ml$

$(\forall z\in C,\ |f(z)|\le M;\ \int_C ds = l)$

柯西积分定理：

闭路：简单闭曲线

（注：沿闭路的积分以逆时针方向为正）

① 设 $D$ 为由闭路 $C$ 围成的单连通区域，$f(z)$ 在 $\bar{D}=C+D$ 上解析，

则 $\int_C f(z)\,dz = 0$

推论：$f(z)$ 在单连通区域 $D$ 内解析，$C$ 是 $D$ 内任意封闭曲线，则

$\int_C f(z)\,dz = 0$.

推论：$f(z)$ 在单连通区域 $D$ 内解析，$C$ 是 $D$ 内任一条从 $z_0$ 到 $z$ 的简单曲线，

则 $\int_C f(\zeta)\,d\zeta$ 与 $C$ 无关，记为

$\int_C f(\zeta)\,d\zeta = \int_{z_0}^{z} f(z)\,dz$.

② （多连通区域）$f(z)$ 在复闭路 $C=C_0+C_1^-+C_2^-+\cdots+C_n^-$ 及所围成区域内

解析，则 $\int_{C_0} f(z)\,dz = \int_{C_1} f(z)\,dz + \int_{C_2} f(z)\,dz + \cdots + \int_{C_n} f(z)\,dz$，或

$\int_C f(z)\,dz = 0$.

柯西积分公式.

① 设 $f(z)$ 在闭路（或复闭路）$C$ 及其围成区域 $D$ 内解析，则对 $D$ 内任一点 $z$，

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta$$

注：上式表明解析函数由其边界唯一确定

特别的，如果 $\zeta = a + Re^{i\theta}$ $(\theta \in [0, 2\pi))$，则

$$f(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\zeta)\,d\theta = \frac{1}{2\pi i}\int_C f(\zeta)\,d\zeta$$

上式称为平均值公式~~表明解析函数是调和的~~

② 设函数 $f(z)$ 在闭路（或复闭路）$C$ 及其所围区域 $D$ 内解析，则对区域内任一点 $z$，$f(z)$ 有任意阶导数，且

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\,d\zeta$$

原函数：如果在一个区域 $D$ 内有 $F'(z) = f(z)$，则 $F(z)$ 称为 $f(z)$ 在区域 $D$ 内的一个原函数。

定理：设 $f(z)$ 在单连通区域 $D$ 内连续；且对 $D$ 内任意闭路 $C$，有 $\int_C f(z)\,dz = 0$. 那么函数

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,d\zeta$$ 是 $D$ 内的解析函数，且

$$F'(z) = f(z) \qquad (z \in D)$$

定理：在单连通区域 $D$ 内，

① $f(z)$ 在 $D$ 内连续，且对 $D$ 内任意闭路 $C$，有 $\int_C f(z)\,dz = 0$.

$$\Updownarrow$$

② $f(z)$ 在 $D$ 内解析.

解析函数与调和函数

调和函数：实二元函数 $u(x,y)$ 在区域 $D$ 内有二阶连续偏导数，且 $\nabla^2 u = 0$，则 $u(x,y)$ 是域 $D$ 内的调和函数.

定理：设 $f(z) = u + iv$ 在域 $D$ 内解析，则 $u, v$ 都是 $D$ 内的调和函数.

定理：设 $u(x,y)$ 是单连通区域 $D$ 内的调和函数；则由线积分所确定的函数 $v(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} -\frac{\partial u}{\partial y}dx + \frac{\partial u}{\partial x}dy + C$.

使得 $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ 在 $D$ 内解析。其中 $C$ 是实数.

注：$\nabla \times \left(-\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\hat{k} = 0$

∴ 上述线积分与路径无关

注：复变函数的积分里没有牛顿－莱布尼兹公式这样的式子，故不可效仿实函数里的方法积分.
多数情况下，我们用柯西积分公式积分；少数情况下用原函数做.

# 第4章 解析函数的级数表示

复数项级数：复数列 $\{z_n = x_n + iy_n, n=1,2,\cdots\}$；$S_n = \sum_{k=1}^{n} z_k$.

级数 $S = \lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{k=1}^{\infty} z_k$.

定理：级数收敛 $\Longleftrightarrow$ 实级数 $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$，$\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ 收敛.

推论：级数收敛的必要条件是 $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$.

绝对收敛：若 $\sum_{k=1}^{+\infty} |z_k|$ 收敛，则 $\sum_{k=1}^{+\infty} z_k$ 绝对收敛.

定理：绝对收敛 $\Rightarrow$ 收敛.

幂级数：$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-a)^n$ 称为幂级数

若 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z_0-a)^n$ 收敛，则称幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-a)^n$ 在 $z_0$ 点收敛.

定理：(Abel 定理).

1° 若幂级数在 $z_0$ 点 $(z_0 \neq a)$ 收敛，则它在圆 $|z-a| < |z_0-a|$ 内绝对收敛

2° 若幂级数在 $z_1$ 点发散，则它在 $|z-a| > |z_1-a|$ 内处处发散.

定理：设实幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| x^n$ 的收敛半径为 $R$，

则 1° 若 $0 < R < +\infty$，则级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-a)^n$ 在圆 $D: |z-a| < R$ 内绝对收敛，

在 $|z-a| > R$ 处处发散.

2° 若 $R = +\infty$，则级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-a)^n$ 在全平面收敛.

3° 若 $R = 0$，则级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-a)^n$ 只在 $z=a$ 收敛.

定理：在收敛圆内，幂级数的和函数 $f(z)$ 解析，且 $a_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$ $(k=0,1,2,\cdots)$

定理：设函数 $f(z)$ 在点 $a$ 解析，且在以 $a$ 为圆心的一个圆内解析，则在此圆内，

$f(z)$ 可展开成幂级数.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-a)^n,\quad 其中\ a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \quad (n=0,1,2,\cdots)$$

定理：$f(z)$ 在区域 $D$ 内解析

$\Updownarrow$

$f(z)$ 在 $D$ 内任一点 $a$ 可展开成 $z-a$ 的幂级数.

m级零点：设 $f(z)$ 是在 $z_0$ 的某邻域内不恒为零的解析函数，且 $f(z_0) = 0$.

若 $f(z)$ 在 $U$ 内的泰勒展开式如

NO.

Date

$$f(z)=a_m(z-z_0)^m+a_{m+1}(z-z_0)^{m+1}+\cdots \qquad (a_m\neq 0)$$

则称 $z_0$ 是 $f(z)$ 的 m 级零点。

定理：下列命题等价：

1° $f(z)$ 以 $z_0$ 为 m 级零点

2° 在 $z_0$ 点附近，有 $f(z)=(z-z_0)^m g(z)$，其中 $g(z)$ 在 $z_0$ 点解析，且 $g(z_0)\neq 0$.

3° $f(z_0)=f'(z_0)=\cdots=f^{(m-1)}(z_0)=0$ 而 $f^{(m)}(z_0)\neq 0$.

罗朗级数：形如 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a_n(z-a)^n=\sum_{n=-\infty}^{-1}a_n(z-a)^n+\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(z-a)^n$

$$=\sum_{n=1}^{+\infty}a_{-n}(z-a)^{-n}+\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(z-a)^n.$$

的级数 称为罗朗级数。

当级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_{-n}(z-a)^{-n}$ 及 $\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(z-a)^n$ 都收敛时，称罗朗级数收敛。

罗朗级数的收敛域：设 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_{-n}\zeta^n$ 的收敛半径为 $\frac{1}{r}$，$\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(z-a)^n$ 的收敛半径为 $R$，

当 $R>r$ 时，罗朗级数 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a_n(z-a)^n$ 的收敛域为 $r<|z-a|<R$

定理：若 $f(z)$ 在域 $D$：$r<|z-a|<R$ 内解析，则 $f(z)$ 一定能在这个圆环中展开成罗朗级数，$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a_n(z-a)^n$，其中 $a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta$，C 是 D 内围绕 a 的任意闭路。

注：上述罗朗级数是唯一的。

孤立奇点：$f(z)$ 在点 a 的某去心邻域 $0<|z-a|<R$ 内解析，但在 a 点不解析，则 a 为 $f(z)$ 的孤立奇点

解析函数在孤立奇点的罗朗展开：

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a_n(z-a)^n \qquad (0<|z-a|<R)$$

$f(z)$ 在有限孤立奇点 a 处的罗朗展开 $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{-1}a_n(z-a)^n+\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(z-a)^n \quad (0<|z-a|<\rho)$

其中第一项称为罗朗级数的主要部分，第二项称为罗朗级数的正则部分。

1° 可去奇点：$f(z)$ 在孤立奇点 a 处的罗朗展开没有主要部分，则 a 为 $f(z)$ 的可去奇点。

2° 极点：$f(z)$ 在孤立奇点 a 处的罗朗展开的主要部分只有有限项，$a_{-m}$ 是从左第一个非零项，

则 a 是 $f(z)$ 的 m 级极点。

3° 本性奇点：$f(z)$ 在孤立奇点 a 处的罗朗展开的主要部分有无数项，则 a 是 $f(z)$ 的本性奇点。

No.
Date . .

# 第五章 留数及其应用

留数：$f(z)$ 在其孤立奇点 $a$ 处的罗朗展开的系数 $a_{-1}$，记为 $Res[f(z),a]$

留数定理：若 $f(z)$ 在闭路 $C$ 上解析，在 $C$ 的内部除去 $n$ 个孤立奇点 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 外也解析，则

$$\int_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} Res[f(z), a_k]$$

定理：若 $a$ 是 $f(z)$ 的 $m$ 级极点，则 $Res[f(z),a] = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to a}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}[(z-a)^m f(z)]$

特别地，当 $m=1$ 时，$Res[f(z),a] = \lim_{z\to a}(z-a)f(z)$

推论：若 $P(z)$ 及 $Q(z)$ 都在 $a$ 点解析，且 $P(a)\neq 0$，$Q(a)=0$，$Q'(a)\neq 0$，则

$$Res\left[\frac{P(z)}{Q(z)}, a\right] = \frac{P(a)}{Q'(a)}$$

引理1：若当 $R$ 充分大时，$f(z)$ 在圆弧 $C_R: z=Re^{i\theta}$ $(\alpha\leq\theta\leq\beta)$ 上连续，且 $\lim_{z\to\infty} zf(z)=0$

则 $\lim_{R\to+\infty}\int_{C_R} f(z)dz = 0$

特别的，当 $f(z)$ 是有理函数 $\frac{P(z)}{Q(z)}$，且 $Q(z)$ 至少比 $P(z)$ 高2次时，$\lim_{R\to+\infty}\int_{C_R}\frac{P(z)}{Q(z)}dz=0$

引理2：若当 $\rho$ 充分小时，$f(z)$ 在圆弧 $C_\rho$：$a+\rho e^{i\theta}$ $(\alpha\leq\theta\leq\beta)$ 上连续，且 $\lim_{z\to a}(z-a)f(z)=k$.

则 $\lim_{\rho\to 0}\int_{C_R} f(z)dz = i(\beta-\alpha)k$.

推论：若 $a$ 是 $f(z)$ 的一级极点，则 $\lim_{\rho\to 0}\int_{C_\rho} f(z)dz = i(\beta-\alpha)Res[f(z),a]$

引理3：(约当引理) 若 $R$ 充分大时，$g(z)$ 在 $C_R$：$|z|=R$，$Im z>-a$ $(a>0)$ 上连续，

且 $\lim_{z\to\infty} g(z)=0$，则对任何正数 $\lambda$，有

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{C_R} g(z)e^{i\lambda z}dz = 0$$

① 形如 $I=\int_0^{2\pi} R(\sin\theta, \cos\theta)d\theta$ 的积分，其中 $R(\sin\theta,\cos\theta)$ 是关于 $\sin\theta, \cos\theta$ 的有理函数。则作代换 $z=e^{i\theta}$，$d\theta=\frac{dz}{iz}$，$\cos\theta=\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z})$，$\sin\theta=\frac{1}{2i}(z-\frac{1}{z})$。

使 $I=\int_{|z|=1} f(z)dz$，$f(z)$ 是 $z$ 的有理函数.

② 若 $R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ 是有理函数，且 $Q(x)$ 至少比 $P(x)$ 高2次，且 $Q(x)$ 在实轴上无零点，则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)dx = 2\pi i\sum_{k=1}^{n} Res[R(z), a_k]$$ ($a_1 \sim a_n$ 是 $R(z)$ 在上半平面的所有极点)

③ 形如 $I_1=\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\cos mx\,dx$ 及 $I_2=\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\sin mx\,dx$ $(m>0)$ 的积分，其中 $R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ 是有理函数，$Q(x)$ 比 $P(x)$ 至少高1次，且 $Q(x)$ 在实轴上无零点。则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)e^{imx}dx = I_1+iI_2 = 2\pi i\sum_{k=1}^{n} Res[R(z)e^{imz}, a_k]$$ ($a_1\sim a_n$ 是 $R(z)$ 在上半平面里所有极点)

a是f(z)的孤立奇点

定理：a是f(z)的可去奇点 $\Longleftrightarrow$ 存在某个正数$\rho$，使f(z)在 $0<|z-a|<\rho$ 内有界

推论：a是f(z)的孤立奇点，则 a是f(z)的可去奇点 $\Leftrightarrow \lim\limits_{z\to a} f(z)=a_0$（有限极限）

定理：a是f(z)的孤立奇点，则下列命题等价：

1° a是f(z)的m级极点

2° f(z)在某环域内可表示为 $f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{(z-a)^m}$，$\varphi(z)$在a点解析且$\varphi(a)\neq 0$.

3° a是函数 $g(z)=\dfrac{1}{f(z)}$ 的m级零点

推论：a是f(z)的孤立奇点，则 a为极点 $\Leftrightarrow \lim\limits_{z\to a} f(z)=\infty$.

定理：a是f(z)的本性奇点 $\Longleftrightarrow$ 不存在有限或无限的极限 $\lim\limits_{z\to a} f(z)$.

无穷远孤立奇点：f(z)在某个 $R<|z|<+\infty$ 内解析，则$\infty$为f(z)的孤立奇点。

作代换 $z=\frac{1}{\zeta}$，得 $\varphi(\zeta)=f(\frac{1}{\zeta})$，若$\zeta=0$是$\varphi(\zeta)$的可去奇点，(m级)极点或本性奇点，则分别称 $z=\infty$是f(z)的可去奇点，(m级)极点或本性奇点。

NO.

Date . .

# 第6章 保形变换

## 导数的几何意义

设函数 $w=f(z)$ 在区域 $D$ 内解析，且 $f'(z_0)\neq 0$ $(z_0\in D)$.

在 $D$ 内作任意一条过 $z_0$ 的曲线（有向，简单，连续）$C: z=z(t)=x(t)+iy(t)$ $(a\le t\le b)$

设 $z'(t)\neq 0$，记 $z(t_0)=z_0$，则 $C$ 在 $z_0$ 处的切向量为

$$z'(t_0)=x'(t_0)+iy'(t_0)$$，与实轴夹角为 $\arg z'(t_0)$

$w=f(z)$ 把曲线 $C$ 变换为 $C_1$：$w=f(z(t))$ $(a\le t\le b)$，$w'(t_0)=f'(z_0)\cdot z'(t_0)\neq$

故 $C_1$ 在点 $w_0$ 也有切向量，与实轴夹角为

$$\arg w'(t_0)=\arg(f'(z_0)\cdot z'(t_0))=\arg f'(z_0)+\arg z'(t_0)$$

所以，$C$ 在 $z_0$ 的切线变换后转动了角度 $\arg f'(z_0)$.

1° 保角性：若 $w=f(z)$ 在区域 $D$ 内解析，设 $z_0\in D$，且 $f'(z_0)\neq 0$，则变换 $w=f(z)$ 在点 $z_0$ 具有保角性，即过 $z_0$ 的任意两曲线交角保持不变。

$|f'(z_0)|=\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{|\Delta w|}{|\Delta z|}$，是曲线 $C$ 在变换后在 $z_0$ 点的伸张系数.

2° 伸张率不变性：若 $w=f(z)$ 在区域 $D$ 内解析，设 $z_0\in D$，且 $f'(z_0)\neq 0$，则伸张系数在过 $z_0$ 点的各个方向上都相同，与曲线 $C$ 无关。

保角变换：若变换 $w=f(z)$ 在 $z_0$ 具有保角性和伸张率不变性，则称变换 $w=f(z)$ 在 $z_0$ 是保角的；若 $w=f(z)$ 在域 $D$ 中每一点都是保角的，则称 $w=f(z)$ 是域 $D$ 内的保角变换.

定理：若 $f(z)$ 在域 $D$ 内解析，且 $f'(z)$ 在 $D$ 内处处不为零，则变换 $w=f(z)$ 是 $D$ 内的保角变换.

保形变换：若 $w=f(z)$ 是域 $D$ 内的一一保角变换，则称它是 $D$ 内的保形变换.

曲线在 $\infty$ 点的交角：若 $C_1, C_2$ 是 $t$ 平面上两条在 $\infty$ 点相交的曲线，则定义它们在 $\infty$ 处的交角等于它们在 $\zeta=\frac{1}{t}$ 下的相应像曲线 $C_1', C_2'$ 在原点 $\zeta=0$ 处的交角，记作 $\angle(C_1,C_2)_\infty=\angle(C_1',C_2')_0$

No.

Date · ·

分式线性变换：由函数 $w=\frac{az+b}{cz+d}$ $(a,b,c,d\in\mathbb{C}$，且 $ad-bc\neq0)$ 所确定的变换称为分式线性变换。

规定 $w(\infty)=\frac{a}{c}$，$w(-\frac{d}{c})=\infty$.

定理：分式线性变换是由闭z平面到闭w平面的保形变换。
(保形性)
( $w=\frac{a}{d}z+\frac{b}{d}$，$c=0$；$w=\frac{a}{c}+\frac{bc-ad}{c^2(z+\frac{d}{c})}$，$c\neq0$

其中前者为整线性变换，后者为整线性变换与倒数变换的复合。

因为整线性变换与倒数变换都是闭复平面上的保形变换，即得证。)

定理：分式线性变换把圆周变为圆周。
(保圆性)

注：认为直线是过无穷远点的圆周.

(分式线性变换是由平移、旋转、相似及倒数变换复合成的，前三项把圆周变为圆周，现证 $w=\frac{1}{z}$ 也如此.

因为圆周或直线方程可表示为 $Az\bar{z}+\bar{B}z+B\bar{z}+C=0$ $(A,C\in\mathbb{R},|B|^2>AC)$

变换后成为，$Cw\bar{w}+Bw+\bar{B}\bar{w}+A=0$，也是圆或直线．□)

圆的对称点：对圆周 $C:|z-z_0|=R$ $(0<R<+\infty)$，若两个有限点 $z_1$ 及 $z_2$ 在自 $z_0$ 点出发的同一条射线上，且 $|z_1-z_0|\cdot|z_2-z_0|=R^2$，则称 $z_1,z_2$ 关于圆周 $C$ 对称。

规定 $z_0$ 和 $\infty$ 点关于圆周 $C$ 对称。

引理：$z_1,z_2$ 关于圆周 $C$ 对称 $\Longleftrightarrow$ 过 $z_1,z_2$ 点的任意圆与 $C$ 直交。

定理：分式线性变换 $w=w(z)$ 具有保对称点性。即，若 $z_1,z_2$ 在闭复平面上
(保对称点性)
关于圆周 $C$ 对称，则对应 $w_1=w(z_1)$，$w_2=w(z_2)$ 关于像圆周 $C_1=w(C)$ 对称。

(过 $z_1,z_2$ 作任一圆周 $C'$，由保圆性，像为一圆周 $C_1'=w(C')$；由引理，$C,C'$ 直交；由保角性，$C_1,C_1'$ 直交；由引理，$w_1,w_2$ 关于 $C_1$ 对称)

定理：任给 z平面，w平面上各三个不同点 $z_1,z_2,z_3$；$w_1,w_2,w_3$，则存在唯一分式线性变换 $w=w(z)$，使得 $w_i=w(z_i)$，且这个变换是由关系

$$\frac{w-w_1}{w-w_2}\cdot\frac{w_3-w_2}{w_3-w_1}=\frac{z-z_1}{z-z_2}\cdot\frac{z_3-z_2}{z_3-z_1}$$ 所确定的函数。

推论：设 $w=w(z)$ 是分式线性变换，且 $w_1=w(z_1)$，$w_2=w(z_2)$，则此分式线性变换可表示为 $\frac{w-w_1}{w-w_2}=k\frac{z-z_1}{z-z_2}$ $(k\in\mathbb{C})$

注：若上述 $z_i$ 或 $w_i$ 中的某一个是 $\infty$，在计算时只需将含有这个数的因子换为1。

初等函数的映照

幂函数：$w=z^n$ $(n\geq 2, n\in N)$ 定义域为角域 $D$：$\alpha<\arg z<\beta$ $(\beta-\alpha\leq\frac{2\pi}{n})$

则 $w=z^n$ 是域 $D$ 内的一一保角变换，(不包含原点)

$w=z^n$ 保形地把域 $D$ 映成 $w$ 平面上的角域 $D_1$：$n\alpha<\arg w<n\beta$
$(n\beta-n\alpha\leq 2\pi)$

根式函数：$w=\sqrt[n]{z}$ 的单值解析分支 $w=(\sqrt[n]{z})_0=\sqrt[n]{|z|}\exp\{i\frac{\arg z}{n}\}$

$D=(\alpha<\arg z<\beta,\ \beta-\alpha\leq 2\pi)$.

则 $w=(\sqrt[n]{z})_0$ 是域 $D$ 上的一一保角变换，(不包含原点)

$w=(\sqrt[n]{z})_0$ 保形地把域 $D$ 映成 $w$ 平面上的角域 $D_1$：$\frac{\alpha}{n}<\arg w<\frac{\beta}{n}$.

在求保形变换时，要把一个角域变换成角域，常用幂函数或根式函数的一个单值解析分支

指数函数：$w=e^z$，定义域为水平条形区域 $D$：$a<\operatorname{Im}z<b$ $(b-a\leq 2\pi)$.

则 $w=e^z$ 是域 $D$ 内的一一保角变换.

$w=e^z$ 把条形域 $D$ 保形地变成 $w$ 平面上的角域 $D_1$：$a<\arg w<b$，

把 $D$ 内水平直线 $\operatorname{Im}z=y_0$ $(a<y_0<b)$ 变成 $w$ 平面上的射线 $\arg w=y_0$,

把 $D$ 内直线段 $\operatorname{Re}z=x_0$ 变成角域 $D_1$ 内圆弧 $|w|=e^{x_0}$.

对数函数：对数函数的单值解析分支 $w=\ln z=\ln|z|+i\arg z$ (域 $D$：$a<\arg z<b$, $b-a\leq 2\pi$)

则 $w=\ln z$ 是域 $D$ 内的一一保角变换，

$w=\ln z$ 把角域 $D$ 保形地变成 $w$ 平面上的条形域 $\operatorname{Im}w\in(a,b)$。

在求保形变换时，要把一条形域变成角域，可用指数函数；要把一角域变成条形域，可用对数函数的一个单值解析分支。

No.

Date . .

# 第7章 拉普拉斯变换

单位函数：$h(t) = 1\ (t\geq 0);\ 0\ (t<0)$.

在拉普拉斯变换里讨论的函数均为 $f(t)=h(t)f(t)$.

拉普拉斯变换：$f(t)$ 是定义在 $[0,+\infty)$ 上的实值函数或复值函数，若令 $p=\sigma+is\ (\sigma,s\in\mathbb{R})$ 的积分 $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt$ 在 $p$ 的某个区域内存在，则 $F(p)=\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt$ 称为 $f(t)$ 的拉普拉斯变换，记为 $F(p)=\mathcal{L}[f(t)]$.

注：$f(t)$ — 本函数，$F(p)$ — 像函数，$f(t)=\mathcal{L}^{-1}[F(p)]$.

拉氏变换与傅立叶变换的关系：

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f(t)] &= \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}[f(t)h(t)e^{-\sigma t}]e^{-ist}dt \\ &= F[h(t)f(t)e^{-\sigma t}]\end{aligned}$$

拉氏变换的存在条件：(1) $f(t)$ 在 $t$ 轴上的任何有限区段内逐段光滑

(2) $f(t)$ 是指数增长型的，即 $\exists k>0, c\geq 0$, s.t. $\forall t\geq 0$

$|f(t)|\leq ke^{ct}$，$c$ 称为 $f(t)$ 的增长指数。

定理：若 $f(t)$ 满足 (1),(2)，则 $F(p)$ 在半平面 $\mathrm{Re}\,p>c$ 上有意义，且是一个解析函数。

## 拉普拉斯变换的基本运算法则

① 线性关系 $\forall \alpha,\beta\in\mathbb{C}$，$\mathcal{L}[\alpha f(t)+\beta g(t)]=\alpha F(t)+\beta G(t)$

② 相似定理 $\forall a>0$，$\mathcal{L}[f(at)]=\frac{1}{a}F(\frac{p}{a})$

③ 位移定理 $\forall \lambda\in\mathbb{C}$，$\mathcal{L}[e^{\lambda t}f(t)]=F(p-\lambda)$

④ 像函数微分法，$F'(p)=\mathcal{L}[-tf(t)]$,

$F^{(n)}(p)=\mathcal{L}[(-1)^n t^n f(t)]$,

$\mathcal{L}[t^n f(t)]=(-1)^n F^{(n)}(p)$

⑤ 本函数微分法。若 $f'(t)$ 满足条件(1),(2)，$\mathcal{L}[f'(t)]=pF(p)-f(0+)$

若 $f^{(i)}(t)$ 都满足条件(1),(2)，$\mathcal{L}[f^{(n)}(t)]=p^nF(p)-p^{n-1}f(0+)-p^{n-2}f'(0+)-\cdots-f^{(n-1)}(0+)$

⑥ 本函数积分法， $L[\int_0^t f(t)dt] = \frac{F(p)}{p}$

⑦ 延迟定理， $L[f(t-\tau)] = e^{-p\tau}F(p)$

其中 $f(t-\tau) = f(t-\tau)h(t-\tau)$

⑧ 卷积， 1° $L[f*g] = L[f]\cdot L[g]$

其中，$f(x)*g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-\xi)g(\xi)d\xi$

特别的，在拉氏变换中，

$$f(t)*g(t) = \begin{cases} 0, & t<0 \\ \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau, & t\geq 0 \end{cases}$$

2° $L^{-1}[F(p)\cdot G(p)] = f*g$

拉普拉斯变换的反演公式.

富里叶-梅林公式：设 $f(t)$ 满足条件(1),(2)，且 $L[f(t)] = F(p)$，则对 $\forall \sigma > c$，在 $f(t)$ 的连续点处，

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(p)e^{pt}dp.$$

定理：设 $F(p)$ 在左半平面 $Re\,p<\sigma$ $(\sigma>c)$ 内有奇点 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 外，在 $p$ 平面内处处解析，且 $\lim_{p\to\infty} F(p) = 0$，则

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} Res[F(p)e^{pt}, p_k]$$

注：若 $F(p) = \frac{A(p)}{B(p)}$，其中 $A(p)$、$B(p)$ 都是实系数多项式，$a$ 是 $F(p)$ 的一个极点，则 $\bar{a}$ 是 $F(p)$ 的一个同级极点，且

$$Res[F(p)e^{pt}, a] + Res[F(p)e^{pt}, \bar{a}] = 2Re\{Res[F(p)e^{pt}, a]\}$$

$$(\because Res[F(p)e^{pt}, \bar{a}] = \frac{A(\bar{a})}{B'(\bar{a})}e^{\bar{a}t} = \overline{\left(\frac{A(a)}{B'(a)}e^{at}\right)} = \overline{Res[F(p)e^{pt}, a]})$$