第九章. 可压缩流体力学简介

(气体动力学基础)

本章我们将探讨气体动力学的基础知识，着重介绍：① 热力学状态参数；② 一维等熵关系式；③ 一维正激波关系式；等。

一. 热力学基础.

1. 完全气体 (perfect gas) 状态方程 (Eqn. of State):

$$P = \rho RT \qquad (9.1.1)$$

其中 P (压强)、ρ (密度) 和 T (温度) 称为基本状态参数。状态方程也可写作：

$$Pv = RT \qquad (9.1.2)$$

其中 $v = \frac{1}{\rho}$ 称为比容. R 称为气体常数 (the specific gas constant).

$$R = \frac{R_m}{m} \qquad (9.1.3)$$

其中 $R_m = 8.314\ J/(mol \cdot K)$ 称为通用气体常数 (the universal gas constant), 而 m 为气体的摩尔质量.

如，空气可按完全气体处理： $R = 287\ J/(kg \cdot K)$.

2. 内能.

$e = e(T)$，是温度的单值函数.

(1) 热力学第一定律:

$$de = dq + dw \qquad (9.1.4)$$

即: 气体内能的变化量(增量)=对气体所加的热量+气体对外界所做的功

① 绝热过程 (adiabatic process): $\delta q = 0$ ⇒ 没有热量增加或减少.

② 可逆过程 (reversible process): 系统及周围环境可以完全回到某一初始状态.

③ 等熵过程 (isentropic process): 绝热 + 可逆.

没有耗散的缓慢过程可近似认为是等熵过程.

熵 (entropy): $$S = \int \frac{\delta q}{T} \qquad (9.1.5)$$

对于等熵过程: $ds \triangleq \frac{\delta q}{T} = 0$

(2) 热力学第二定律:

事实上, $$ds = \frac{\delta q}{T} + \underbrace{\sigma_{irrev}}_{\text{由过程的不可逆引起}} \Rightarrow ds \geq \frac{\delta q}{T}$$

≥ 0

也就是说, 气体在绝热的可逆过程中熵不变, 而在不可逆过程中熵必定增加.

因此, 对于可逆过程, 热力学第一定律可表示为:

$$\boxed{de = Tds - pdv} \qquad (9.1.6)$$

$dv = d(\frac{1}{\rho})$ 为单位质量气体的体积变化.

3. 焓 (enthalpy): 流体元除动能 (kinetic energy) 外所具有的全部能量.

$$h = e + \frac{p}{\rho} = e + \underbrace{pv}_{\text{压能}} \qquad (9.1.7)$$

$$\Rightarrow \boxed{dh = de + d(pv) = Tds + vdp} \qquad (9.1.8)$$

(可逆过程适用)

4. 定容比热与定压比热 (specific heats).

$$C_v = \left(\frac{\delta q}{dT}\right)_p = \left(\frac{T ds}{dT}\right)_p = \left(\frac{\partial e}{\partial T}\right)_p \quad (9.1.9)$$

$$\Rightarrow \quad de = C_v dT \quad (\text{热完全气体}) \quad (9.1.10)$$

$$C_p = \left(\frac{\delta q}{dT}\right)_p = \left(\frac{T ds}{dT}\right)_p = \left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_p \quad (9.1.11)$$

$$\Rightarrow \quad dh = C_p dT \quad (\text{热完全气体}) \quad (9.1.12)$$

对热完全气体:

$e = e(T)$, $h = h(T) \Rightarrow C_v = C_v(T)$ & $C_p = C_p(T)$.

由(9.1.7):

$$h = e + pv = e + RT \Rightarrow dh = de + R dT$$

$$\Rightarrow C_p dT = C_v dT + R dT$$

$$\Rightarrow (C_p - C_v - R) dT = 0 \Rightarrow \boxed{C_p - C_v = R} \quad (9.1.13)$$

我们定义比热比: $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$ (9.1.14)

$$\Rightarrow \boxed{C_p = \frac{\gamma}{\gamma - 1} R} \ \& \ \boxed{C_v = \frac{1}{\gamma - 1} R} \quad (9.1.15).$$

5. 熵增关系:

$$dh = T ds + v dp \Rightarrow ds = \frac{dh}{T} - \frac{v dp}{T} = \frac{C_p dT}{T} - \frac{R dp}{p}$$

$$\Rightarrow s_2 - s_1 = \int_{T_1}^{T_2} C_p \frac{dT}{T} - \int_{p_1}^{p_2} R \frac{dp}{p}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta s = s_2 - s_1 = C_p \ln \frac{T_2}{T_1} - R \ln \frac{p_2}{p_1}} \quad (9.1.16)$$

$$de = Tds - pdv = Tds - pd\left(\frac{1}{\rho}\right)$$

$$\Rightarrow ds = \frac{de}{T} + \frac{pd\left(\frac{1}{\rho}\right)}{T} = \frac{C_v dT}{T} + R\frac{d\left(\frac{1}{\rho}\right)}{\frac{1}{\rho}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta S = S_2 - S_1 = C_v \ln\frac{T_2}{T_1} + R\ln\frac{\rho_1}{\rho_2}} \qquad (9.1.17)$$

对于等熵过程：$\Delta S = S_2 - S_1 = 0$，则（9.1.16）和（9.1.17）联合出：

$$\ln\frac{T_2}{T_1} = \frac{R}{C_p}\ln\frac{p_2}{p_1} = -\frac{R}{C_v}\ln\frac{\rho_1}{\rho_2} \qquad (9.1.18)$$

考虑到 $C_p = \frac{\gamma}{\gamma-1}R$，$C_v = \frac{1}{\gamma-1}R$，我们可得：

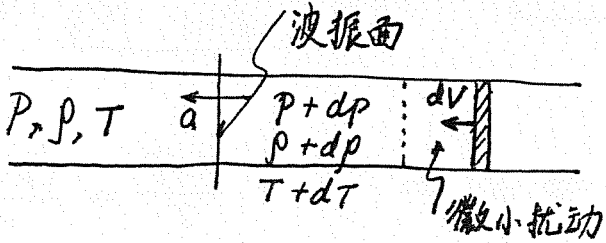
$$\boxed{\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^{\gamma}} \qquad (9.1.19)$$

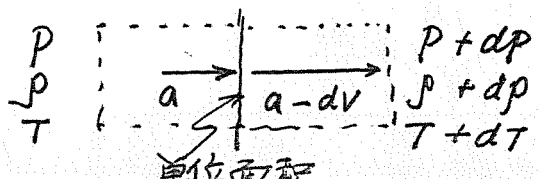
（9.1.19）称为等熵流动的状态参数关系式。

二. 声速、马赫数、以及流体的可压缩性。

1. 声速（Speed of sound）：微小扰动在流体中的传播速度。

注：扰动波传播速度与流体本身的运动速度是两回事。





① 由质量守恒: $\rho a = (\rho+d\rho)(a-dV) = \rho a + a\,d\rho - \rho\,dV - d\rho\,dV$ (= 所以量)

$\Rightarrow \quad \rho\,dV = a\,d\rho \qquad (9.1.20)$

② 由动量定理: $p - (p+dp) = (\rho+d\rho)(a-dV)^2 - \rho a^2$

$\Rightarrow -dp = -2\rho a\,dV + a^2 d\rho + \rho(dV)^2 - 2a\,d\rho\,dV + d\rho(dV)^2$

$= -2a^2 d\rho + a^2 d\rho + \rho(dV)^2 - 2\rho(dV)^2 + d\rho(dV)^2$

$= -a^2 d\rho$ (已经利用了质量守恒关系.)

$\Rightarrow \quad a^2 = \left(\frac{dp}{d\rho}\right)_s \Rightarrow a = \sqrt{\left(\frac{dp}{d\rho}\right)_s} \qquad (9.2.1)$

对于量热完全气体, $p = const.\ \rho^\gamma$ (等熵)

$\Rightarrow \quad \frac{dp}{d\rho} = \gamma\, const.\ \rho^{\gamma-1} = \frac{1}{\rho}\gamma\, const.\ \rho^\gamma$

$= \gamma\frac{p}{\rho} = \gamma RT$

代入(9.1.21) $\Rightarrow$ $\boxed{a = \sqrt{\gamma RT}} \qquad (9.2.2)$

例如. 空气 $\gamma = 1.4$, 在常温下 $a \cong 340\ m/s$.

③ 由连续条件(9.1.20):

$a\,d\rho = \rho\,dV \Rightarrow a\Delta\rho = \rho\Delta V$ (ΔV: 速度变化.)

$\Rightarrow \boxed{\frac{\Delta V}{a} = \frac{\Delta\rho}{\rho}}$

另, $d\rho = d\left(\frac{1}{v}\right) = -\frac{1}{v^2}dv$

$\Rightarrow \boxed{\frac{\Delta V}{a} = -\frac{\Delta v}{v}} \qquad (9.2.3)$

(ΔV: 速度, Δv: 比容.)

2. 马赫数 (Mach number):

$M = \frac{V}{a}$, 其中 V 为流体运动速度, a 为当地声速.

按M数分类：

$M<1$：亚音速流动
$M>1$：超音速流动
$M=1$：跨音速流动。

} 注：微弱扰动的传播规律和状态参数的变化规律在两种情况下存在本质区别。

$$\frac{\frac{1}{2}V^2}{e}=\frac{\frac{1}{2}V^2}{C_vT}=\frac{\frac{1}{2}V^2}{\frac{R}{\gamma-1}T}=\frac{\frac{1}{2}V^2}{\frac{\gamma RT}{\gamma(\gamma-1)}}=\frac{\gamma(\gamma-1)}{2}\frac{V^2}{a^2}=\frac{\gamma(\gamma-1)}{2}M^2$$

即：

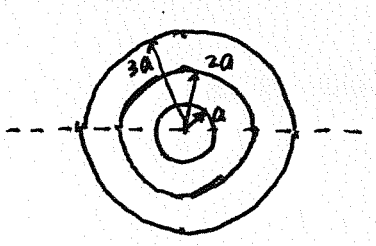
$$\boxed{\frac{\frac{1}{2}V^2}{e}=\frac{\gamma(\gamma-1)}{2}M^2} \qquad (9.2.4)$$

因此，马赫数表征了动能与内能的比值 —— 马赫数的物理解释。

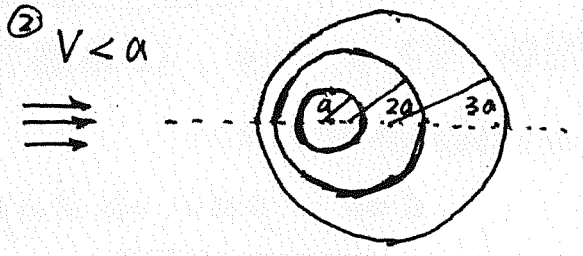
3. 马赫角：

我们考察声源在可压缩流体中的传播：设流体以速度V自左向右运动，当地声速为a。

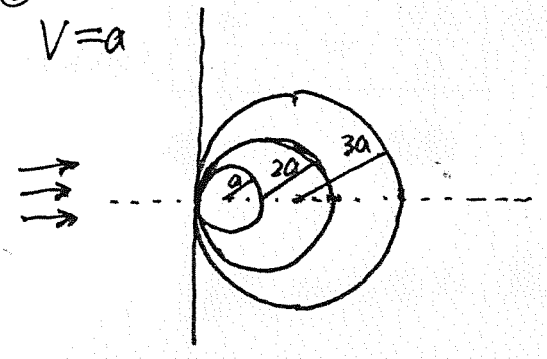
① $V=0$



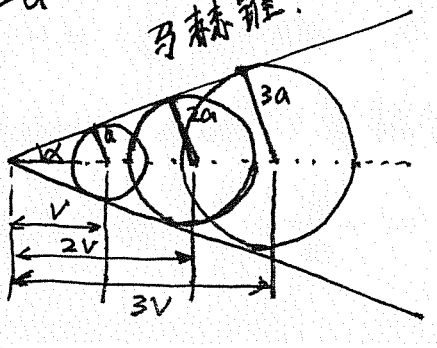
② $V<a$



③ $V=a$



④ $V>a$



$$\alpha=\arcsin\frac{a}{V}=\arcsin\frac{1}{M}$$

4. 可压缩性：

可压缩性的热力学定义：$\tau = -\frac{1}{v}\frac{dv}{dp} = -\left(\frac{dv}{v}\right)\frac{1}{dp}$ (9.2.5)

即：单位质量的气体的体积的相对变化与压强变化的比值.

$\Rightarrow \frac{\Delta v}{v} = -\tau \Delta p$ (9.2.5) 压强变化与体积变化关系.

讨论：

① 我们通常讲可压缩流动(Compressible Flow)，而不是可压缩流体(Compressible Fluid).

② 当 $\frac{\Delta v}{v} \gtrsim 0.05$ 时，认为流动是可压缩的，相当于 $M \gtrsim 0.3$.

③ 表征流动可压缩性的参数：τ，M，和 a 等.

三. 无粘可压缩流体定常等熵流动的伯努利方程：

无粘可压缩流体运动的方程组：

$$\begin{cases} \frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \vec{u} = 0 & (9.3.1) \\ \frac{D\vec{u}}{Dt} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u} = -\frac{1}{\rho}\nabla p & (9.3.2) \\ p = \rho R T & (9.3.3) \\ p = C\rho^{\gamma} & (9.3.4) \end{cases}$$

① 由热力学第一定律：$T ds = dh - \frac{1}{\rho} dp$

$\Rightarrow T\nabla s = \nabla h - \frac{1}{\rho}\nabla p$ (9.3.5)

② 定常：$\frac{\partial}{\partial t} = 0$，则 (9.3.2) $\Rightarrow -\frac{1}{\rho}\nabla p = \nabla\left(\frac{|\vec{u}|^2}{2}\right) - \vec{u}\times\vec{\omega}$ (9.3.6)

比较 (9.3.5) 和 (9.3.6) 有：$T\nabla s - \nabla\underbrace{\left(h + \frac{|\vec{u}|^2}{2}\right)}_{h_0 \text{ 称为总焓}} = -\vec{u}\times\vec{\omega}$ (9.3.7)

在(9.3.7)中，等熵 $\Rightarrow ds=0$，沿流线积分有：

$$h+\frac{|\vec{v}|^2}{2}=\text{常数}\quad(\text{沿流线})\qquad(9.3.8)$$

(9.3.8)为无粘可压缩流体定常等熵流动的伯努利方程(一般形式)

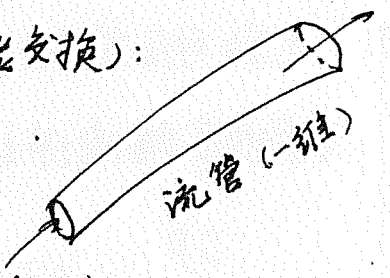
1. 对完全气体，(9.3.8)可表示成(沿流线)：

- ① 等熵流动沿流线总焓不变.
- ② 绝能流全场总焓不变.

$$\begin{cases}\dfrac{|\vec{v}|^2}{2}+C_pT=\text{const.} & (9.3.9)\\ \dfrac{|\vec{v}|^2}{2}+\dfrac{\gamma R}{\gamma-1}T=\text{const.} & (9.3.10)\\ \dfrac{|\vec{v}|^2}{2}+\dfrac{\gamma}{\gamma-1}\dfrac{p}{\rho}=\text{const.} & (9.3.11)\\ \dfrac{|\vec{v}|^2}{2}+\dfrac{a^2}{\gamma-1}=\text{const.} & (9.3.12)\end{cases}$$

2. 对于绝能流：(与外界既无热交换，也无机械能交换)：

上述方程在全流场都适用，即总焓保持不变。



Ⅳ. 等熵流气动函数(一维等熵关系式).

(一) 滞止状态和滞止参数(Stagnation parameters)

流体从当地真实状态绝热地减速到零所具有的状态称为该当地状态对应的滞止状态。流体质点当地状态参数称为静参数，对应的滞止参数称为总参数。

由完全气体的(绝热)等熵流动的伯努利积分(沿流线)：

$$\frac{V^2}{2}+\frac{\gamma R}{\gamma-1}T=\frac{\gamma R}{\gamma-1}T_0\qquad(9.4.1)$$

$$\Rightarrow\frac{T_0}{T}=1+\frac{V^2}{2}\frac{\gamma-1}{\gamma RT}=1+\frac{\gamma-1}{2}\frac{V^2}{a^2}=1+\frac{\gamma-1}{2}M^2$$

即：$$\boxed{\frac{T_0}{T}=1+\frac{\gamma-1}{2}M^2}$$ 总温计算式 (9.4.2)

其中 T_0 称为总温或滞止温度。

$h_0=C_pT_0$：总焓与总温意义相同.

由等熵流的状态参数关系式：$\frac{P_0}{P}=\left(\frac{T_0}{T}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}=\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^{\gamma}$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{P_0}{P}=\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}} \quad (9.4.3)$$

$$\boxed{\frac{\rho_0}{\rho}=\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}} \quad (9.4.4)$$

音速：$a=\sqrt{\gamma RT}$，$a_0=\sqrt{\gamma RT_0}$ $\Rightarrow \frac{a_0}{a}=\left(\frac{T_0}{T}\right)^{\frac{1}{2}}$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{a_0}{a}=\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)^{\frac{1}{2}}} \quad (9.4.5)$$

$h_0=\frac{a_0^2}{\gamma-1}$：总焓与总音速意义相同.

讨论：总温 T_0，总音速 a_0 和总焓 h_0 在绝能（绝热＋无机械能交换）时，在全流场保持不变；在等熵条件下，总压 P_0，总密度 ρ_0 也保持不变；但在熵增情况下，P_0 和 ρ_0 不一定不变。

等熵条件下，参数 T, p, ρ 只有一个独立变量；T_0 不变，则 P_0, ρ_0 不变

（二）临界状态和临界参数（Critical parameters or sonic parameters）

在绝热（$dq=0$）的情况下，改变流体质点的速度使得马赫数变为1时的流体质点速度和声速分别为 u^* 和 a^*. 由于 $M=1$，所以有 $u^*=a^*$。绝热的能量方程：

$$\frac{V^2}{2}+\frac{a^2}{\gamma-1}=\frac{u^{*2}}{2}+\frac{a^{*2}}{\gamma-1}=\frac{1}{2}\frac{\gamma+1}{\gamma-1}a^{*2}$$

又，$\frac{V^2}{2}+\frac{a^2}{\gamma-1}=\frac{a_0^2}{\gamma-1}$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{a^{*2}}{a_0^2}=\frac{2}{\gamma+1}=\frac{T^*}{T_0}} \quad (9.4.6)$$

$h_0=\frac{1}{2}\frac{\gamma+1}{\gamma-1}a^{*2}$：总焓与临界声速意义相同.

同理：总焓与临界温度意义相同.

对于空气，$\frac{T^*}{T_0}=0.833$，$\frac{a^*}{a_0}=0.913$.

若流动等熵，根据等熵状态参数关系式，有：

$$\frac{p^*}{p_0}=\left(\frac{T^*}{T_0}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}=\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}=0.528 \quad (9.4.7)$$

$$\frac{\rho^*}{\rho_0}=\left(\frac{T^*}{T_0}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}=\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}=0.634 \quad (9.4.8)$$

我们定义 $M^*=\frac{V}{a^*}$，称为速度系数，通常也用入表示，是跨音速流动中常用的概念。那么由关系式：

$$\frac{V^2}{2}+\frac{a^2}{\gamma-1}=\frac{1}{2}\frac{\gamma+1}{\gamma-1}a^{*2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}+\frac{\left(\frac{a}{V}\right)^2}{\gamma-1}=\frac{1}{2}\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\left(\frac{a^*}{V}\right)^2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\gamma-1}{2}+\frac{1}{M^2}=\frac{\gamma+1}{2}\frac{1}{M^{*2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{M^2=\frac{2}{\frac{\gamma+1}{M^{*2}}-(\gamma-1)} \quad 或 \quad M^{*2}=\frac{\gamma+1}{\frac{2}{M^2}+\gamma-1}} \quad (9.4.9)$$

速度系数计算式

因而，$M<1 \Rightarrow M^*<1$；

$M>1 \Rightarrow M^*>1$；

$M=1 \Rightarrow M^*=1$.

$M\to\infty \Rightarrow M^*=\sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}$.

五. 一维定常等熵管流

J. C5.4，$P_{177}-P_{185}$.

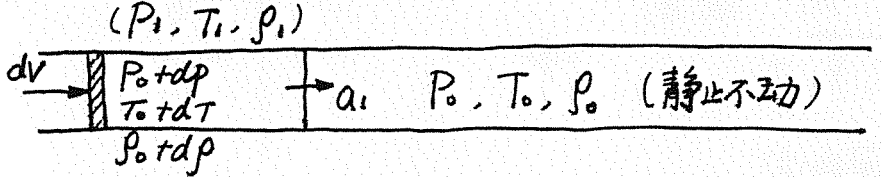
请同学自学.

六、激波（Shock wave）

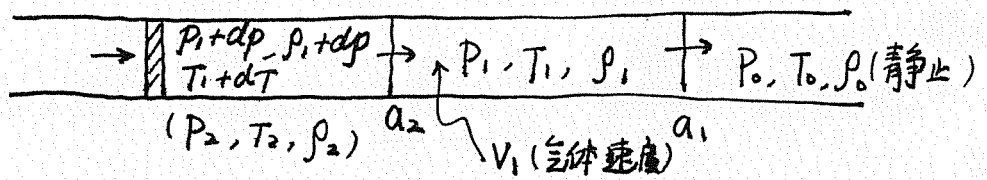
我们只讨论正激波（Normal shock）

（一）激波的形成（激波管）

考察一活塞在管道中运动而推动里面的气体运动：

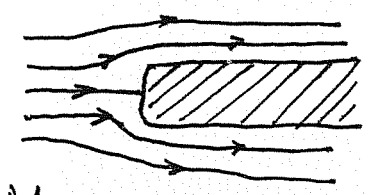


$a_1=\sqrt{\gamma RT_0}$；$\frac{T_1}{T_0}=\left(\frac{\rho_1}{\rho_0}\right)^{\gamma-1}>1$ 等熵.



$a_2=\sqrt{\gamma RT_1}$；$\frac{T_2}{T_1}=\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^{\gamma-1}>1$，等熵.

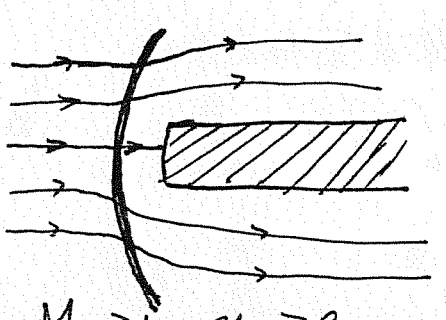
$\Rightarrow a_2+V_1>a_1$，即后面的压力波传播速度大于前面的压力波。活塞在加速运动的过程中所发出的压力波将依次赶上前面的压力波，并叠加在一起，形成一个总的压力波，称为激波。物理上，激波是一个强间断面，通过激波阵面，气流的熵将发生变化（增加），气流的各种参数也会发生变化。数学上，激波是欧拉方程等熵关系解的不连续造成的。



$M_\infty<1$，$u_\infty<a_\infty$

来流为亚音速的钝体绕流

对比

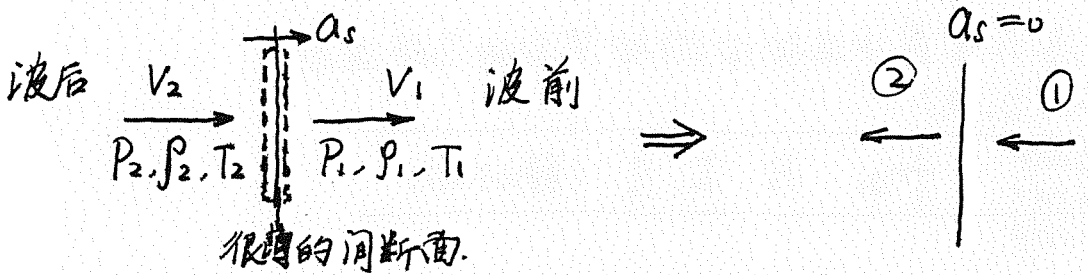


$M_\infty>1$，$u_\infty>a_\infty$

来流为超音速的钝

(二) 静止正激波的基本关系式：

我们考察的情况是：激波波振面是直的，气流方向与激波阵面垂直，激波静止不动，即 $a_s = 0$.



1. 基本方程.

① 连续性方程：

$$\rho_1 V_1 A_1 = \rho_2 V_2 A_2 \xrightarrow{A_1 = A_2} \boxed{\rho_1 V_1 = \rho_2 V_2} \quad (9.6.1)$$

② 动量方程：

$$\rho_2 V_2^2 A_2 - \rho_1 V_1^2 A_1 = P_1 A_1 - P_2 A_2 \Rightarrow \boxed{P_1 + \rho_1 V_1^2 = P_2 + \rho_2 V_2^2} \quad (9.6.2)$$

③ 能量方程：（可视为绝热过程，且无摩擦力和轴功，但过程不可逆）.

$$\boxed{h_1 + \frac{1}{2} V_1^2 = h_2 + \frac{1}{2} V_2^2} \quad (9.6.3)$$

（总焓不变，但不等熵）.

④ 热完全气体状态方程：$\boxed{P = \rho R T}$ (9.6.4)

若为量热完全气体：则 γ, C_p 为常数，那么：$\boxed{h = C_p T}$ (9.6.5)

熵增关系 $S_2 - S_1 = C_p \ln \frac{T_2}{T_1} - R \ln \frac{P_2}{P_1}$ (9.6.6)

2. 激波前后关系式：

$$\left.\begin{matrix}(9.6.2)\\(9.6.1)\end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{P_1}{\rho_1 V_1} + V_1 = \frac{P_2}{\rho_2 V_2} + V_2$$

又：$$\frac{P}{\rho} = RT = \frac{a^2}{\gamma}$$

$$\Rightarrow \frac{a_1^2}{\gamma V_1} - \frac{a_2^2}{\gamma V_2} = V_2 - V_1 \qquad (9.6.7)$$

由临界关系（$\frac{V^2}{2} + \frac{a^2}{\gamma-1} = \frac{1}{2}\frac{\gamma+1}{\gamma-1}a^{*2}$），得：

$$a^2 = \frac{\gamma+1}{2}a^{*2} - \frac{\gamma-1}{2}V^2 \qquad (9.6.8)$$

在(9.6.8)中 a 和 V 分别 = a_1 和 V_1 及 a_2 和 V_2 并代入(9.6.7)中

$$\Rightarrow \frac{\gamma+1}{2\gamma}\frac{a^{*2}}{V_1} - \frac{\gamma-1}{2}\frac{V_1^2}{\gamma V_1} - \frac{\gamma+1}{2\gamma}\frac{a^{*2}}{V_2} + \frac{\gamma-1}{2}\frac{V_2^2}{\gamma V_2} = V_2 - V_1$$

$$\Rightarrow \frac{\gamma+1}{2\gamma}a^{*2}\frac{(V_2-V_1)}{V_1V_2} + \frac{\gamma-1}{2\gamma}(V_2-V_1) = V_2 - V_1$$

$$\Rightarrow \frac{\gamma+1}{2\gamma}\frac{a^*}{V_1}\frac{a^*}{V_2} + \frac{\gamma-1}{2\gamma} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{\gamma+1}{2\gamma}\frac{1}{\lambda_1\lambda_2} = \frac{\gamma+1}{2\gamma}$$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda_1\lambda_2 = 1} \qquad (9.6.9)$$

称为普朗特（Prandtl）关系式.

临界声速是总焓的化身，绝能流时总焓不变，所以激波前后 a^* 不变.

$$\Rightarrow \lambda_1 = \frac{1}{\lambda_2} \Rightarrow \frac{V_1}{a^*} = \frac{a^*}{V_2} \Rightarrow \boxed{V_1V_2 = a^{*2}} \qquad (9.6.10)$$

$M_1 > 1$，$M_1^* = \lambda_1 > 1 \Rightarrow M_2^* = \lambda_2 < 1 \Rightarrow M_2 < 1$.

由临界参数关系式(9.4.9)及 Prandtl 关系式(9.6.9)：

$$\lambda^2 = \frac{\gamma+1}{\gamma-1+\frac{2}{M^2}} \quad \& \quad \lambda_1^2 = \frac{1}{\lambda_2^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\gamma+1}{\gamma-1+\frac{2}{M_1^2}} = \frac{\gamma-1+\frac{2}{M_2^2}}{\gamma+1} \Rightarrow \boxed{M_2^2 = \frac{1+\frac{\gamma-1}{2}M_1^2}{\gamma M_1^2 - \frac{\gamma-1}{2}}} \qquad (9.6.11)$$

因而有：$M_1 \to 1 \Rightarrow M_2 \to 1$

$M_1 \to \infty \Rightarrow M_2 \to \sqrt{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} \cong 0.378$（空气）.

(9.6.1): $\rho_1 V_1 = \rho_2 V_2 \Rightarrow \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{V_1}{V_2} = \frac{V_1^2}{V_1 V_2} = \frac{V_1^2}{a^{*2}} = \lambda_1^2 = \frac{\gamma+1}{\gamma-1+\frac{2}{M_1^2}}$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\gamma+1)M_1^2}{(\gamma-1)M_1^2+2}} = \frac{V_1}{V_2} \quad (9.6.12)$$

(9.6.2): $P_1 + \rho_1 V_1^2 = P_2 + \rho_2 V_2^2$

$$\Rightarrow P_2 - P_1 = \rho_1 V_1^2 - \rho_2 V_2^2 = \rho_1 V_1^2 - \rho_1 V_1 V_2 = \rho_1 V_1 (V_1 - V_2) = \rho_1 V_1^2 (1 - \frac{V_2}{V_1})$$

$$\Rightarrow \frac{P_2}{P_1} = 1 + \frac{\rho_1}{P_1} V_1^2 (1 - \frac{V_2}{V_1}) = 1 + \gamma M_1^2 \left[1 - \frac{(\gamma-1)M_1^2+2}{(\gamma+1)M_1^2}\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{P_2}{P_1} = 1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1}(M_1^2 - 1)} \quad (9.6.13).$$

定义：激波强度 $\boxed{\frac{P_2 - P_1}{P_1} = \frac{2\gamma}{\gamma+1}(M_1^2 - 1)}$ (9.6.14).

由状态方程：$P = \rho R T \Rightarrow \boxed{\frac{T_2}{T_1} = \frac{P_2}{P_1} \cdot \frac{\rho_1}{\rho_2}}$ (9.6.15)

对量热完全气体：$h = C_p T \Rightarrow \boxed{\frac{h_2}{h_1} = \frac{T_2}{T_1} = \frac{P_2}{P_1}\frac{\rho_1}{\rho_2}}$ (9.6.16)

熵增关系：（量热完全气体）

$$S_2 - S_1 = C_p \ln\frac{T_2}{T_1} - R\ln\frac{P_2}{P_1}$$

$$= \frac{\gamma R}{\gamma-1}\ln\left[1 + \frac{2\gamma}{1+\gamma}(M_1^2-1)\right]\frac{(\gamma-1)M_1^2+2}{(\gamma+1)M_1^2} - R\ln\left[1+\frac{2\gamma}{\gamma+1}(M_1^2-1)\right]$$

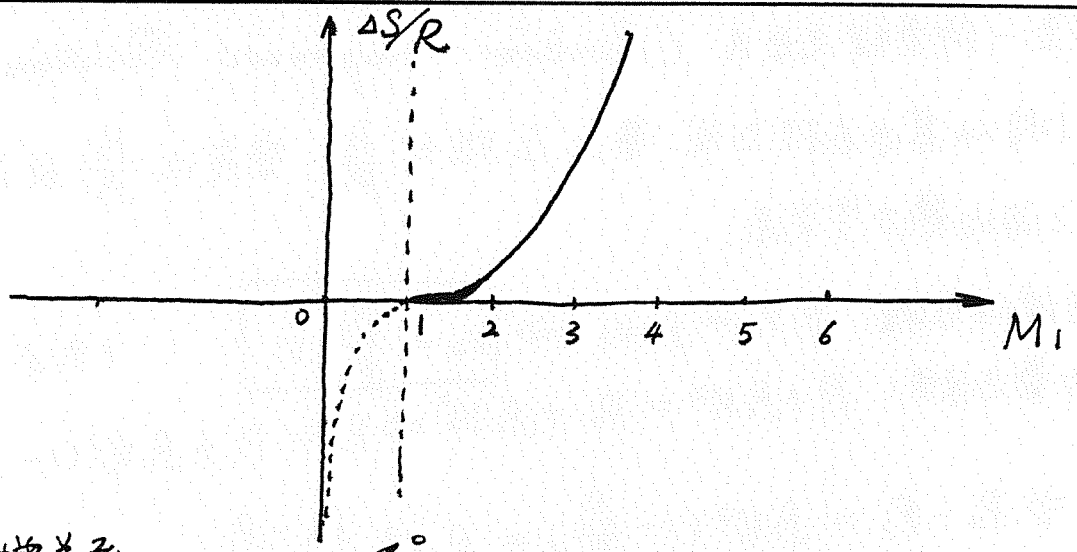
(9.6.17).

讨论：

① 只有当 $M_1 > 1$ 时，(9.6.17) 才反应真实的物理情况；

② 若 $M_1 \lesssim 1.6$，$\Delta S = S_2 - S_1 \cong 0$，流动可近似按等熵处理（属弱激波）；

③ 若 $M_1 \gtrsim 2$ 时，激波引发的不可逆过程明显加剧.



由熵增关系:

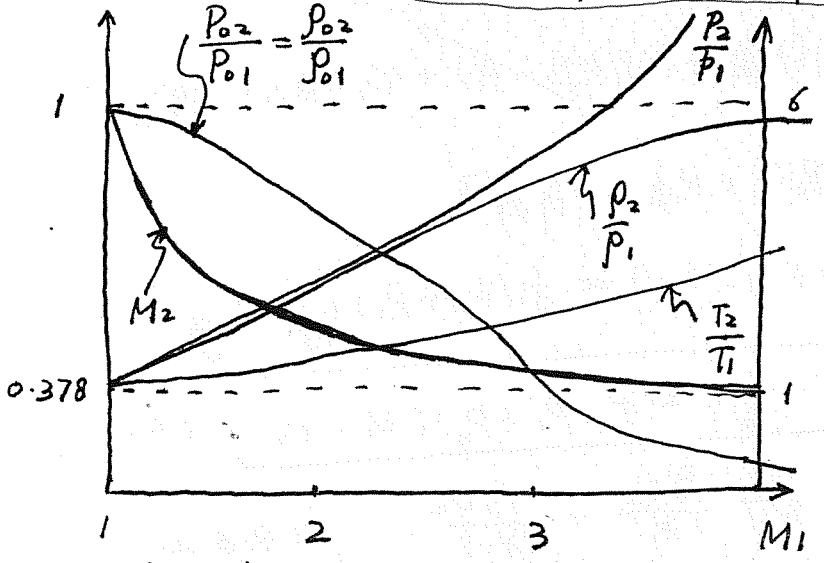
$$S_2 - S_1 = C_p \ln \frac{T_{02}}{T_{01}} - R \ln \frac{P_{02}}{P_{01}} = -R \ln \frac{P_{02}}{P_{01}}$$

$(T_{02} = T_{01})$

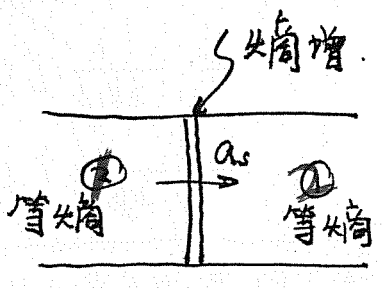
$$\Rightarrow \frac{P_{02}}{P_{01}} = \exp\left(-\frac{\Delta S}{R}\right) < 1 \Rightarrow P_{02} < P_{01}$$

由状态方程可知: $\frac{P_{02}}{P_{01}} = \frac{\rho_{02}}{\rho_{01}} < 1$. (9.6.18)

因此, 经过激波, 总压和总密度都减小.



激波前后状态参数随 M_1 的变化.



激波运动的物理过程.

3. 兰金-许贡纽关系式 (Rankine-Hugoniot Relations).

我们将从基本方程出发，导出压强比 $\frac{P_2}{P_1}$，密度比 $\frac{\rho_2}{\rho_1}$ 及温度比 $\frac{T_2}{T_1}$ 之间的热力学关系.

由连续性方程: $\rho_1 V_1 = \rho_2 V_2 \Rightarrow \boxed{V_2 = \frac{\rho_1}{\rho_2} V_1}$ (9.6.19)

由动量方程: $P_1 + \rho_1 V_1^2 = P_2 + \rho_2 V_2^2 \Rightarrow P_2 = P_1 + \rho_1 V_1^2 (1 - \frac{V_2}{V_1})$

$\Rightarrow P_2 - P_1 = \rho_1 V_1^2 (1 - \frac{\rho_1}{\rho_2}) = \rho_1 V_1^2 \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2}$

$\Rightarrow \boxed{V_1^2 = \frac{P_2 - P_1}{\rho_2 - \rho_1} \frac{\rho_2}{\rho_1}, \quad V_2^2 = \frac{P_2 - P_1}{\rho_2 - \rho_1} \frac{\rho_1}{\rho_2}}$ (9.6.20)

由能量方程: $e_1 + \frac{P_1}{\rho_1} + \frac{V_1^2}{2} = e_2 + \frac{P_2}{\rho_2} + \frac{V_2^2}{2}$

$\Rightarrow e_2 - e_1 = \frac{P_1\rho_2 - P_2\rho_1}{\rho_1\rho_2} + \frac{(P_2 - P_1)(\rho_2^2 - \rho_1^2)}{2\rho_1\rho_2(\rho_2 - \rho_1)}$

$= \frac{1}{2\rho_1\rho_2(\rho_2 - \rho_1)} [2(P_1\rho_2 - P_2\rho_1)(\rho_2 - \rho_1) + (P_2 - P_1)(\rho_2 + \rho_1)(\rho_2 - \rho_1)]$

$= \frac{1}{2\rho_1\rho_2} [P_1\rho_2 - P_2\rho_1 + P_2\rho_2 - P_1\rho_1]$

$= \frac{1}{2\rho_1\rho_2} [(P_1 + P_2)(\rho_2 - \rho_1)] = \frac{1}{2}(P_1 + P_2)(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2})$

$\Rightarrow \boxed{e_2 - e_1 = \frac{1}{2}(P_1 + P_2)(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2}) = \frac{1}{2}(P_1 + P_2)(v_1 - v_2)}$ (9.6.21)

对量热完全气体: $e_2 = C_v T_2 = \frac{R}{\gamma - 1} \frac{P_2 v_2}{R} = \frac{P_2 v_2}{\gamma - 1}$. (9.6.22)

同理: $e_1 = \frac{P_1 v_1}{\gamma - 1}$ (9.6.23)

将(9.6.22)和(9.6.23)分别代入(9.6.21)得:

$$\frac{P_2}{P_1}=\frac{\left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\right)\frac{v_1}{v_2}-1}{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}-\frac{v_1}{v_2}}=\frac{\left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\right)\frac{\rho_2}{\rho_1}-1}{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}-\frac{\rho_2}{\rho_1}} \qquad (9.6.24)^*$$

对比等熵关系式: $\frac{P_2}{P_1}=\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^\gamma$.

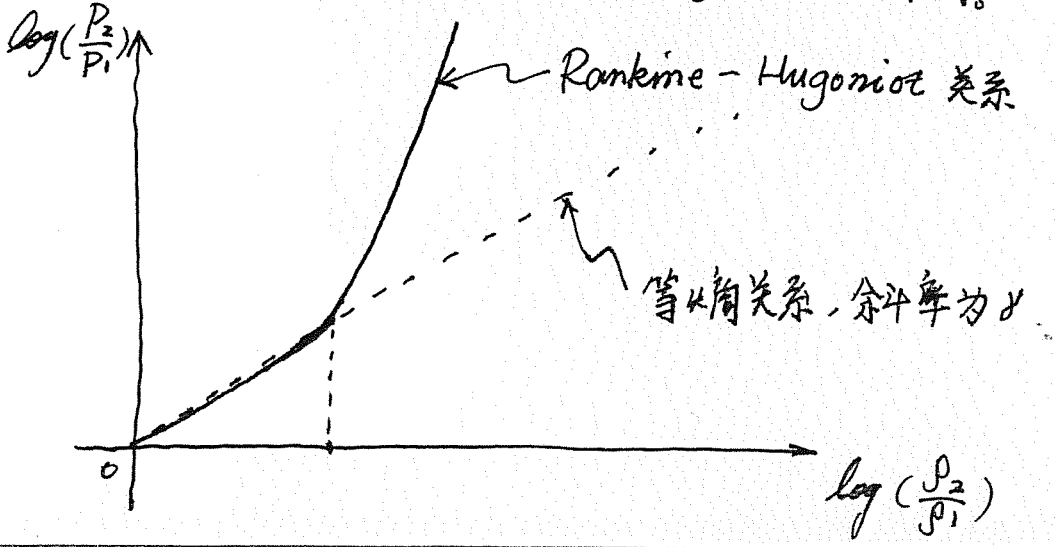
由(9.6.24)* $\Rightarrow$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1}=\frac{\left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\right)\frac{P_2}{P_1}+1}{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}+\frac{P_2}{P_1}} \qquad (9.6.25)^*$$

由状态方程: $P=\rho RT \Rightarrow$

$$\frac{T_2}{T_1}=\frac{P_2}{P_1}\frac{\rho_1}{\rho_2}=\frac{\left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\right)\frac{P_2}{P_1}+\left(\frac{P_2}{P_1}\right)^2}{\left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\right)\frac{P_2}{P_1}+1} \qquad (9.6.26)$$

$\Rightarrow$

$$\frac{T_2}{T_1}=\frac{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}+\frac{P_2}{P_1}}{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}+\frac{P_1}{P_2}} \qquad (9.6.27)^*$$

(9.6.26)*~(9.6.25)* 称为 Rankine - Hugoniot 关系式。