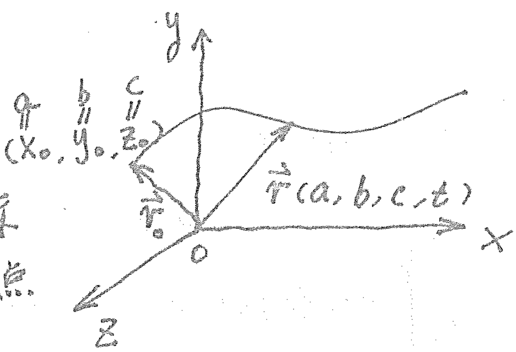
# 第二章 流体运动分析基础

本章着重围绕流体三要素中的后两个要素——"运动"和"力"来展开讨论。主要①介绍流体运动的描述方法、②建立流场的概念、③通过分析一点邻域的流动细节认识流场、④介绍流动的分类、及⑤给出常用的流动分析方法。

## 一、描述流体流动的两种数学方法

(一) 拉格朗日法(又称随体法)：跟随流体质点运动，认为流体质点的物理量是随流体质点及时间变化的。设某质点标记为 $(a, b, c)$，该质点的物理量 $f$ 的拉格朗日表示式为：




$$f = f(a, b, c, t)$$

式中 $(a, b, c)$ 称作质点的拉格朗日坐标或随体坐标，可用某特征时刻 $t_0$ 流体质点所在位置的空间坐标中 $(x_0, y_0, z_0)$ 来定义。不同的 $(a, b, c)$ 代表不同的流体质点，同一流体质点的拉格朗日坐标在运动过程中保持不变。任意时刻流体质点相对于坐标原点的位置矢量(矢径)的拉格朗日表示式为：$\vec{r} = \vec{r}(a, b, c, t)$。

(二) 欧拉法(又称当地法或空间法)：将某瞬时占据某空间点的流体质点物理量作为该空间点的物理量，物理量随空间点的位置和时间而变化。设空间点的坐标为 $(x, y, z)$，则物理量 $f$ 的空间表示式为：$f = f(x, y, z, t)$。

式中 $(x, y, z)$ 称作欧拉坐标，不同的 $(x, y, z)$ 代表不同的空间点。

(三) 两种描述方法的关系与比较.

拉格朗日描述着眼于(个别)流体质点，将物理量视为随体坐标和时间的函数；欧拉描述着眼于空间点，将物理量视为空间坐标和时间的函数。假设流体质点 $(a,b,c)$ 在 $t$ 时刻恰好运动到空间点 $(x,y,z)$，则有：

$$x = x(a,b,c,t),\quad y = y(a,b,c,t),\quad z = z(a,b,c,t)$$

$$f(x,y,z,t) = f(a,b,c,t).$$

例如：北京市城市交通部门统计全市客运量：

① 在每辆公交车上设立统计员（把公交车看成流体质点）

② 在每个公交站设立统计员（把站点看成空间坐标）

再如：你坐在飞机上，测量机舱内周围空间点的物理量属哪种方法？

作为比较：

| 拉格朗日法 | 欧拉法 |
|---|---|
| ①分别描述有限质点的轨迹； | ① 同时描述所有质点的瞬时参数； |
| ② 表述较为复杂； | ② 表达简单直观； |
| ③ 不能直接反映参数的空间分布； | ③ 直接反映参数的空间分布； |
| ④ 不适合描述流体元的运动变形特性； | ④ 适合描述流体元的运动变形特性。 |
| ⑤ 拉格朗日观点很重要； | ⑤ 流体力学最常用的解析方法。 |

物理量的欧拉表示代表该物理量的空间分布，称为该物理量场，如速度场、压强场等。因此，欧拉观点是场的观点，可运用数学上"场论"的知识，作为理论分析工具。欧拉法适用于描述空间固定域上的流动，是流体力学中最常用的描述方法，同时欧拉法符合实际问题的研究需要，通常只需关注几个重要区域的流动情况（如，城市公交调度）。

丁.[例 B2.1.2]

已知：速度分布为 $\begin{cases} u = x+t \\ v = y+t \end{cases}$，流体质点 A 在 $t=0$ 时位于 $(a, b)$ 点。求：流体质点 A 的运动轨迹.

解：属欧拉 → 拉格朗日问题.

按定义：$\begin{cases} u = \dfrac{dx}{dt} = x+t \\ v = \dfrac{dy}{dt} = y+t \end{cases} \Longrightarrow$

$$\begin{cases} x = e^{t}\left[c_1 + \int te^{-t}dt\right] = e^{t}\left[c_1-(t+1)e^{-t}\right] = c_1e^{t}-t-1 \\ y = e^{t}\left[c_2 + \int te^{-t}dt\right] = e^{t}\left[c_2-(t+1)e^{-t}\right] = c_2e^{t}-t-1 \end{cases} \quad (\#)$$

$t=0$ 时，质点 A 位于 $\begin{cases} x=a \\ y=b \end{cases}$，代入 # 可求得 $\begin{cases} c_1 = a+1 \\ c_2 = b+1 \end{cases}$，再代入 (#) 式可得质点的轨迹方程：$\begin{cases} x=(a+1)e^{t}-t-1 \\ y=(b+1)e^{t}-t-1 \end{cases}$.

本例说明，欧拉描述与拉格朗日描述在一定的条件下可以互相转化。

例：已知拉格朗日描述：$\begin{cases} x = ae^{t} \\ y = be^{-t} \end{cases}$，求速度与加速度的欧拉描述.

解：由拉格朗日描述可定义速度和加速度为：

$$\begin{cases} u = \dfrac{\partial x}{\partial t} = ae^{t} \\ v = \dfrac{\partial y}{\partial t} = -be^{-t} \end{cases}, \quad \begin{cases} a_x = \dfrac{\partial u}{\partial t} = ae^{t} \\ a_y = \dfrac{\partial v}{\partial t} = be^{-t} \end{cases}. \quad (*)$$

由已知条件：$a = xe^{-t}$，$b = ye^{t}$，分别代入 (*) 式，可得速度与加速度的欧拉描述表达式：

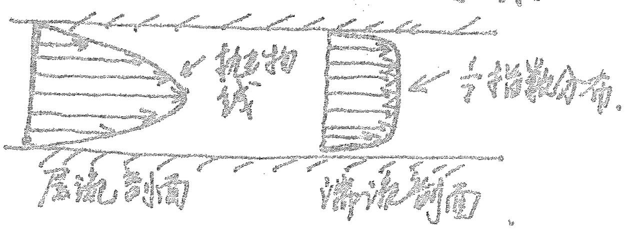
$$\begin{cases} u = ae^{t} = x \\ v = -be^{-t} = -y \end{cases}, \quad \begin{cases} a_x = ae^{t} = x \\ a_y = be^{-t} = y \end{cases}.$$

二、速度场的概念：

速度场：在任一瞬时由空间点上速度矢量构成的场，通常称速度分布，在直角坐标系中可表示为 $\vec{v}=\vec{v}(x,y,z,t)$，其分量式为

$$\begin{cases} u=u(x,y,z,t) \\ v=v(x,y,z,t) \\ w=w(x,y,z,t) \end{cases}$$

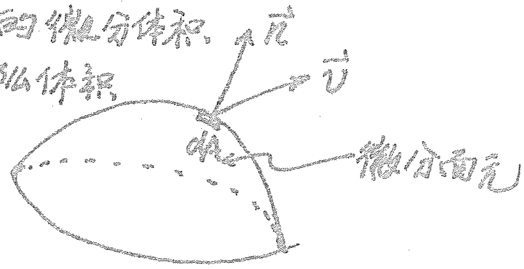
可以用速度廓线（或速度剖面）来形象地表示速度的空间分布。




(一) 流量与平均速度：

1. 体积流量：为单位时间内流经一假想曲面的流体体积，用Q表示。当 $Q>0$ 时，表示流出曲面A的体积流量，$Q<0$ 时表示流入曲面的体积流量。定义dt时间内流经面元dA的微分体积 $d\tau=(\vec{v}\cdot\vec{n})dA\,dt$，$\vec{n}$ 为面元dA的外法向；那么体积流量Q为：

$$Q=\int_A(\vec{v}\cdot\vec{n})dA=\frac{1}{dt}\int_A d\tau$$




若曲面封闭，Q表示流体的净流出量。

2. 质量流量：单位时间内流过一假想曲面的流体质量，用 $\dot{m}$ 表示。

$$\dot{m}=\frac{1}{dt}\int_A\rho\,d\tau=\int_A\rho(\vec{v}\cdot\vec{n})dA=\int_A\rho\,\vec{v}\cdot d\vec{A}$$

其中 $\rho$ 为流体的密度。

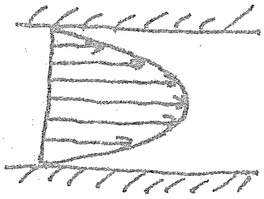
3. 平均速度：$V=\frac{Q}{A}=\frac{1}{A}\int_A(\vec{v}\cdot\vec{n})dA$

所以，体积流量可表示为 $Q=VA$。对不可压缩流体，$\rho=const$，质量流量可表示为：$\dot{m}=\rho Q=\rho VA$。

丁. 例 B2.2.1： 已知：粘性流体在半径为R的直圆管中做定常流动（流速不随时间而变化）。设管截面上速度分布为抛物线分布：

$u = u_m\left[1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right]$，其中 $u_m$ 为管轴上的最大速度。

求：① 流量Q的表达式，② 截面平均速度V。



解：① $Q = \int_A (\vec{v}\cdot\vec{n})\,dA = \int_0^R u_m\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right)2\pi r\,dr$

$= 2\pi u_m\left(\frac{r^2}{2}-\frac{r^4}{4R^2}\right)\Big|_0^R = 0.5\,u_m\pi R^2$。

② $V = \frac{Q}{\pi R^2} = 0.5\,u_m$。

（二）流动的维数：

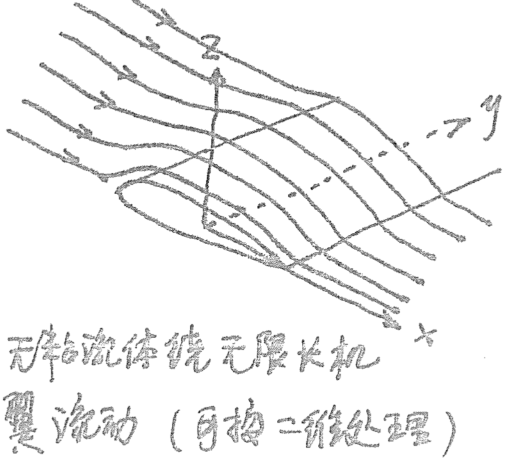
需要指出，几乎所有的实际流动都是三维空间中发生的，通常流动参数表示为三个空间坐标（及时间）的函数。但是为了研究问题方便，有时候可以做降维处理。（如龙卷风，大气边界层的大尺度运动）。

1. 流动维数的确定：

(1) 三维流动：速度场必须表示为三个方向坐标的函数：$v = v(x, y, z, t)$。

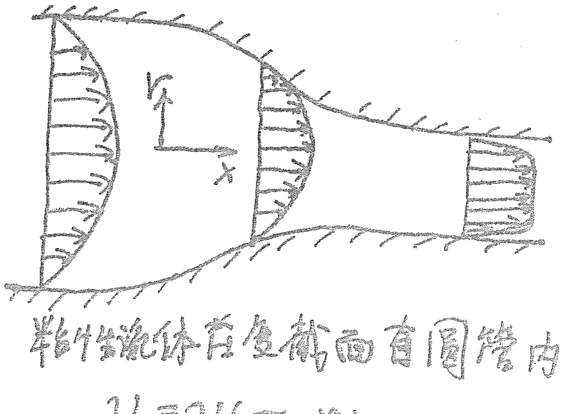
(2) 二维流动：速度场可以简化为两个空间坐标的函数：

$v = v(x, y, t)$ 或 $v = v(r, z, t)$




无粘流体绕无限长机翼流动（可按二维处理）

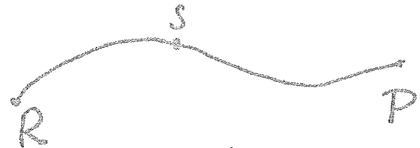
$v = v(x, z)$



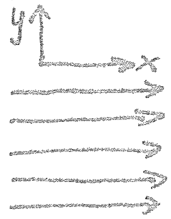

粘性流体在变截面直圆管内流动

$v = v(x, r)$

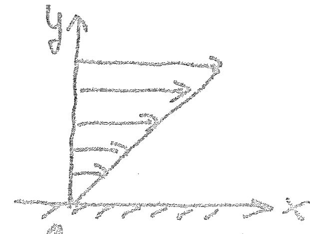
(3) 一维流动：速度场可表示为一个方向坐标的函数：$v=v(x)$ 或 $v=v(s)$.




沿曲线RP的速度可以表示成沿曲线的相对于R的距离S的函数：$v=v(s)$.




沿x方向的均匀来流 $\vec{v}=u\vec{i}$，其中 $u=\text{const}$.




剪切流 $u=u(y)$

(讨论：不能只看有几个分量，主要看每个速度分量与几个空间坐标有关).

2. 常用的流动简化形式.

(1) 二维流动：如平面流动；轴对称流动等；

(2) 一维流动：质点沿曲线的流动 $v=v(s)$；截面变化很慢，中心曲线曲率不大的弯曲圆管流动等；

讨论：为简化计算，工程上常采用"平均速度"代替截面上的速度分布，从而将二维轴对称流动简化成一维问题。对于"脉动流"，平均速度不能反映与速度分布有关的物理量，如"切应力"等，同时对所表示的其它量也要给予必要的修正。

3. 直圆管一维流动修正因子.

用平均速度描述圆管一维流动简化了流量和压强计算，却对截面上动能和动量的计算造成误差，需要人为引入动能修正因子 $\alpha$ 和动量修正因子 $\beta$，使得：

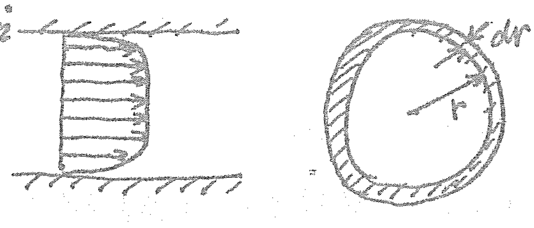
$$\begin{cases} \int_A \left(\frac{1}{2}u^2\right) d\dot{m} = \alpha\left(\frac{1}{2}V^2\right)\dot{m} \\ \int_A u\, d\dot{m} = \beta V \dot{m} \end{cases}$$

湍流速度剖面

J.例B.2.2.2. 已知直圆管粘性定常流动速度分布为 $u=u_m\left(1-\frac{r}{R}\right)^{\frac{1}{7}}$.

求：① 关于平均速的动能修正因子 $\alpha$ 和 ② 动量修正因子 $\beta$.

解：① 由定义：$\int_A\left(\frac{1}{2}u^2\right)d\dot{m}=\alpha\frac{1}{2}V^2\dot{m}$




$$\Rightarrow \alpha=\int_A\frac{1}{2}u^2d\dot{m}\Big/\frac{1}{2}V^2\dot{m}.$$

其中：
$$d\dot{m}=\rho dQ=\rho u dA=\rho u 2\pi r dr$$
$$\dot{m}=\rho Q=\rho VA=\rho V\pi R^2$$

$$\therefore \alpha=\frac{\int_0^R\frac{1}{2}u^2d\dot{m}}{\frac{1}{2}V^2\dot{m}}=\frac{\int_0^R\frac{1}{2}u^2\rho u 2\pi r dr}{\frac{1}{2}V^2\rho V\pi R^2}=\frac{2}{R^2}\int_0^R\left(\frac{u}{V}\right)^3 r dr$$

$$V=\frac{\int_0^R u_m\left(1-\frac{r}{R}\right)^{\frac{1}{7}}2\pi r dr}{\pi R^2}=\frac{98}{120}u_m.$$

$$\therefore \alpha=\frac{2}{R^2}\left(\frac{120}{98}\right)^3\int_0^R\left(1-\frac{r}{R}\right)^{\frac{3}{7}}r dr=1.05838.$$

② 由定义：
$$\int_A u d\dot{m}=\beta V\dot{m}\Rightarrow\beta=\frac{\int_A u d\dot{m}}{V\dot{m}}=\frac{\int_0^R u\rho u 2\pi r dr}{V\rho V\pi R^2}$$
$$=\frac{2}{R^2}\int_0^R\left(\frac{u}{V}\right)^2 r dr=\frac{2}{R^2}\left(\frac{120}{98}\right)^2\int_0^R\left(1-\frac{r}{R}\right)^{\frac{2}{7}}r dr=1.020$$

圆管一维粘性定常流动修正系数对比：

| 速度分布类型 | $V/u_m$ | $\alpha$ | $\beta$ |
|---|---|---|---|
| 抛物线分布 | 0.5 | 2.0 | 1.333 |
| 1/7指数分布 | 0.8167 | 1.058 | 1.020 |

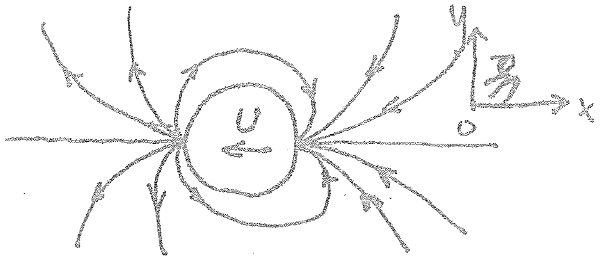
可见，与抛物线分布相比，$\frac{1}{7}$指数分布比较接近平均速度剖面，用一维流动近似计算动能和动量时，可取 $\alpha=\beta=1$，因不必修正。

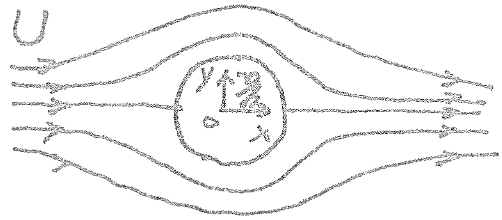
(三) 定常流动与非定常流动:

1. 定义：流动参数不随时间变化的流动称为定常流动，否则称为非定常流动。

2. 两者关系。

实验室中常用的流动状态为定常流，这样以将时间坐标去掉，很方便，同时可用示踪技术显示流场结构，并可持续观察或拍摄不同部位的流场细节。在特定条件下，经过坐标变换，有的不定常流场可变换成定常流场。如，圆球在静止的大气中以匀速U运动时，在静止的坐标系中观察圆球对大气的扰动是非定常的（如左图），然而如果将坐标系固定在圆球上，在与圆球一起前进的坐标系中观察，静止的大气以匀速U对圆球进行定常绕流（如右图）。



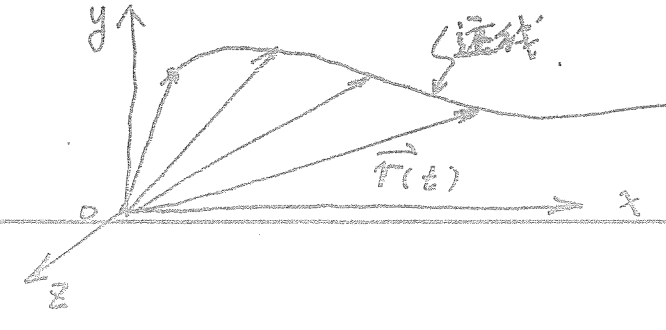




运动的相似性原理在流体力学实验中的应用。飞机模型和船舶模型都是固定在洞壁上，空气和水均匀地流经模型。

三、流体运动的几何描述。

(一) 迹线、流线、脉线和流体线。

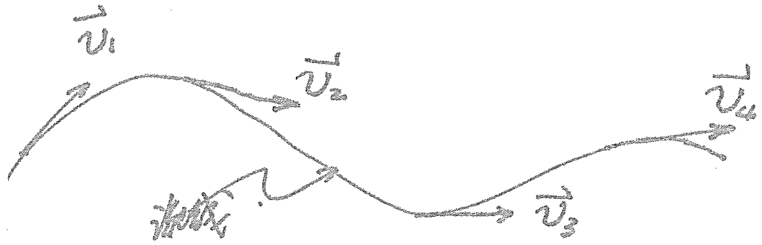
迹线(pathline)：流体质点的运动轨迹线。具有时间的累积和持续性。




$$\frac{d\vec{r}}{dt}=\vec{v}(\vec{r},t)$$

$$\frac{dx}{dt}=u(x,y,z,t)$$

流线（Streamline）：（某一给定时刻）线上任意点的切线方向与该点处流体质点的速度方向一致的假想曲线。




$$d\vec{r}\times\vec{v}=0$$

迹线和流线的对比说明：

| 迹线 | 流线 |
|---|---|
| 反映了拉格朗日描述方法 | 反映了欧拉描述方法 |
| 同一质点的路径（时间序列） | 不同质点在同一时刻所占空间位置 |
| $\dfrac{dx}{u(x,y,z,t)}=\dfrac{dy}{v(x,y,z,t)}=\dfrac{dz}{w(x,y,z,t)}=dt$ | $\dfrac{dx}{u(x,y,z,t)}=\dfrac{dy}{v(x,y,z,t)}=\dfrac{dz}{w(x,y,z,t)}$ |
| 其中 $t$ 为自变量，$x,y,z$ 均为 $t$ 的函数。 | 其中 $t$ 是参数，$x,y,z$ 是自变量。 |
| 迹线是流场中实际存在~~的[illegible]线~~ | 流线是假想的。 |
| 迹线具有持续性（$t$ 是自变量） | 流线具有瞬时性（$t$ 是参数） |

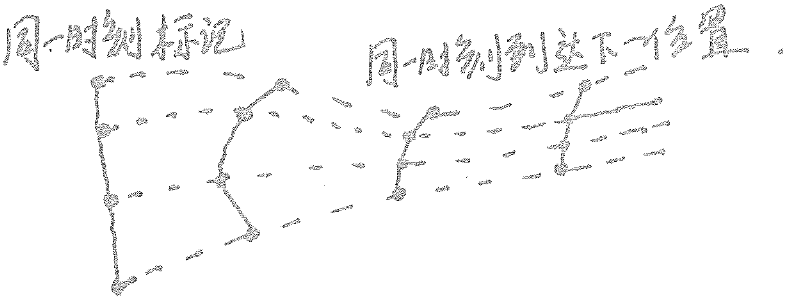
思考：给定（欧拉）速度场，怎样获得迹线和流线？

脉线（Streakline）：相继通过某一空间点的流体质点连成的线，也称为条纹线、染色线或烟线。（由不同的流体质点构成）

如流动显示卡门涡街现象：

空气中释放的烟线绕圆柱流动。
（瞬时拍照）

流体线，也称时间线（timeline）：在流场中某一时刻的一串首尾相接的流体质点的连线。




讨论：

① 在定常流中脉线、流线及迹线重合（说法见书）；

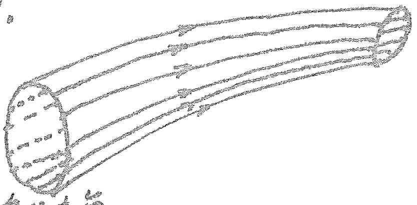
② 非定常流动中脉线与流线、迹线均不重合；

③ 在流线上每一质点沿各自的迹线运动；

④ 任何流动中，流线不能相交（驻点和奇点除外），为什么？

（二）流管、流束与总流

流管：在流场中通过一任意非流线的封闭曲线上每一点作流线所围成的管状面。



特点：① 具有流线的所有特点；

② 在定常流动中，流管的形状不变，像固定的管道。

流束：流管内的流体（可看作无数流线的集束）。

① 当流束内所有流线均相互平行时称为平行流；虽不完全平行，但流线之间夹角很小时称为缓变流；

② 处处与流线垂直的截面称为有效截面；

③ 有效截面为无限小的流束称为微元流束。

总流：所有微元流束的总和称为总流。（如工程上常将管道或渠道壁所围的流体流动称为总流。

例. 已知速度场 $u=x+t$, $v=-y-t$.

求: (1) $t=1$ 时, 过 $(1,1)$ 点的流体质点的迹线;

(2) 过 $(1,1)$ 点的流线.

解: (1) 由迹线方程定义:

$$\frac{dx}{dt}=u=x+t \quad \& \quad \frac{dy}{dt}=v=-y-t$$

积分可得: $x=C_1e^{t}-t-1$

$y=C_2e^{-t}-t+1$

当 $t=1$ 时, 过 $(x,y)=(1,1)$ 的质点, 即.

$$\left.\begin{aligned} 1&=C_1e-1-1 \\ 1&=C_2e^{-1}-1+1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} C_1=\frac{3}{e} \\ C_2=e \end{cases}$$

因此, 此质点的迹线方程为 $\boxed{\begin{cases} x=3e^{t-1}-t-1 \\ y=e^{1-t}-t+1 \end{cases}}$.

(2) 由流线方程定义:

$$\frac{dx}{u}=\frac{dy}{v} \Rightarrow \frac{dx}{x+t}=\frac{dy}{-y-t}$$

$$\Rightarrow (x+t)(y+t)=\alpha$$

过空间点 $(1,1) \Rightarrow \alpha=(1+t)^2$

∴ 过 $(1,1)$ 点的流线方程: $(x+t)(y+t)=(1+t)^2$.

当 $t=1$ 时, 流线方程为 $\boxed{(x+1)(y+1)=4}$

本例说明在流动非定常时, 流线与迹线不一致.

例: 已知速度场 $u=x/t$, $v=y$, $w=0$.

求: 经过空间固定点 $(x_1, y_1, z_1)$ 在 $t$ 时刻的脉线方程.

# 北京大学工学院

解：首先确定某流体质点的迹线方程：

$$\frac{dx}{dt}=u=\frac{x}{t},\quad \frac{dy}{dt}=v=y,\quad \frac{dz}{dt}=w=0$$

两边积分得：$x=e^{A}t$，$y=e^{B}e^{t}$，$z=C$.

假设在 $t_0$ 时刻流体质点位于 $x=a$，$y=b$，及 $z=c$ 位置，

则有 $a=e^{A}t_0 \Rightarrow e^{A}=\frac{a}{t_0}$

$b=e^{B}e^{t_0} \Rightarrow e^{B}=be^{-t_0}$

$c=C \Rightarrow C=c$

因此：迹线方程可写作：$x=a\frac{t}{t_0}$，$y=be^{t-t_0}$，$z=c$. (1)

由(1)，$a=\frac{t_0}{t}x$，$b=ye^{t_0-t}$，$c=z$. (2)

现在设在 $t_1$ 时刻流体质点 $(a,b,c)$ 恰好到达固定点 $(x_1,y_1,z_1)$

∴ $a=\frac{t_0}{t_1}x_1$，$b=y_1e^{t_0-t_1}$，$c=z_1$ (3)

将上述3式代入(1)式得：

$x=\frac{t}{t_1}x_1$，$y=y_1e^{t-t_1}$，$z=z_1$ (4)

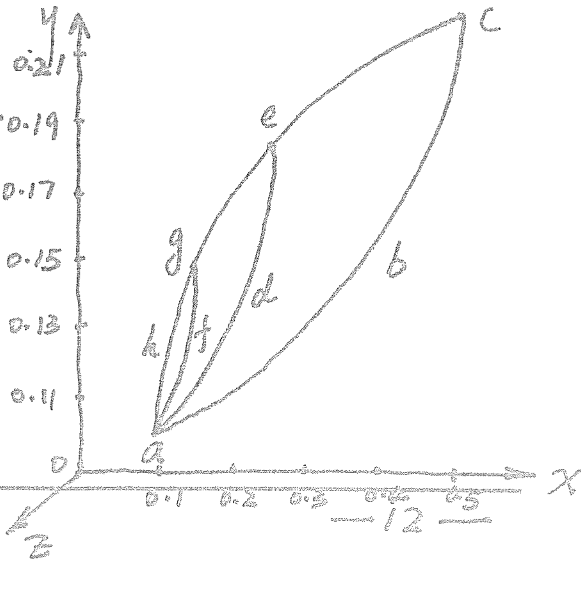
式(4)就是经过空间固定点 $(x_1,y_1,z_1)$ 的各流体质点（以不同的 $t_1$ 表示）在 $t$ 时刻的脉线方程。

现在考察固定点 $x_1=0.1$，$y_1=0.1$，$z_1=$任意，$0.2\le t_1\le 1$，$t=1$ 时的脉线.

① $t_1=0.2$ 时，位于 $(0.1,0.1)$ 的质点沿迹线 abc 在 $t=1$ 时到达 c 点.

② $t_1=0.4$ 时，位于 $(0.1,0.1)$ 的质点沿迹线 ade 在 $t=1$ 时到达 e 点.

③ $t_1=0.6$ 时，位于 $(0.1,0.1)$ 的质点沿迹线 afg 在 $t=1$ 时到达 g 点.




迹线 cegha 为经过固定点 $(0.1,0.1)$ 在时间段 $(0.2,1)$ 内的脉线.

四. 流体质点的随体导数.

随体导数：属拉格朗日观点，反映了运动的物理量随时间的变化率，也叫物质导数。我们的任务就是用欧拉方法表示随体导数。

(一) 流体的加速度场

任一流体质点 $P$（对应的拉格朗日坐标为 $(a,b,c)$）在运动时的空间位置随时间不断变化，流体质点的速度

$$\vec{v}_p(a,b,c,t) = \frac{\partial \vec{r}_p(a,b,c,t)}{\partial t},$$

其加速度 $\vec{a}_p(a,b,c,t) = \dfrac{\partial \vec{v}_p}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 \vec{r}_p}{\partial t^2}$.

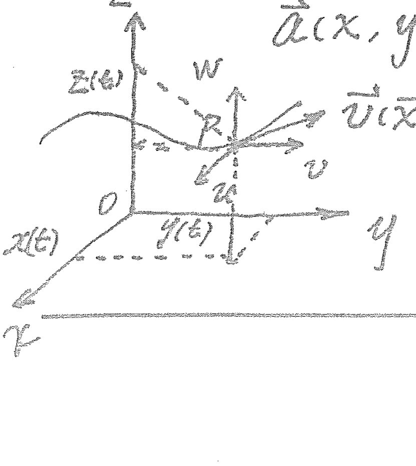
然而在运动过程中质点 $p$ 的欧拉坐标随时间变化.

$$x_p = x_p(t), \quad y_p = y_p(t), \quad z_p = z_p(t).$$

若流动的欧拉速度场 $\vec{v}(x,y,z,t) = \vec{v}(u,v,w)$ 已知，则流体质点 $P$ 在 $t$ 时刻的速度可用欧拉速度表示，即

$$\vec{v}_p = \vec{v}_p(x_p(t), y_p(t), z_p(t), t).$$

由于 $\vec{v}_p(x,y,z,t)$，$x, y, z$ 都与时间 $t$ 有关，我们可以利用全导数的概念来表示流体质点的加速度（为方便，去掉角标 $p$）




$$\vec{a}(x,y,z,t) = \frac{d}{dt}\vec{v}(x,y,z,t)$$
$$= \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$
$$= \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + u\frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + v\frac{\partial \vec{v}}{\partial y} + w\frac{\partial \vec{v}}{\partial z}$$

矢量表示可缩写为：

$$\vec{a}(\vec{x},t)=\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}+(\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u}$$

分量式：

$$\begin{cases} a_x=\dfrac{\partial u}{\partial t}+u\dfrac{\partial u}{\partial x}+v\dfrac{\partial u}{\partial y}+w\dfrac{\partial u}{\partial z} \\ a_y=\dfrac{\partial v}{\partial t}+u\dfrac{\partial v}{\partial x}+v\dfrac{\partial v}{\partial y}+w\dfrac{\partial v}{\partial z} \\ a_z=\dfrac{\partial w}{\partial t}+u\dfrac{\partial w}{\partial x}+v\dfrac{\partial w}{\partial y}+w\dfrac{\partial w}{\partial z} \end{cases}$$

或：张量标 $a_i=\dfrac{\partial u_i}{\partial t}+u_j\dfrac{\partial u_i}{\partial x_j}$，$i,j=1,2,3$，为自由指标。

(二) 质点导数（随体导数）

事实上，对欧拉速度场表示流体质点加速度的方法加以推广，可以得到任意流体质点物理量的随体导数。用表示与普通导数区别，定义随体导数算子：

$$\frac{D}{Dt}=\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}+w\frac{\partial}{\partial z}$$

矢量表示：$\dfrac{D}{Dt}=\dfrac{\partial}{\partial t}+(\vec{u}\cdot\nabla)$

张量表示法：$\dfrac{D}{Dt}=\dfrac{\partial}{\partial t}+u_j\dfrac{\partial}{\partial x_j}$，$j=1,2,3$.

任意物理量 $F(x,y,z,t)$ 的随体（物质）导数可由随体导数算子求出：

$$\frac{DF}{Dt}=\frac{\partial F}{\partial t}+u\frac{\partial F}{\partial x}+v\frac{\partial F}{\partial y}+w\frac{\partial F}{\partial z}$$
$$=\frac{\partial F}{\partial t}+(\vec{u}\cdot\nabla)F=\frac{\partial F}{\partial t}+u_j\frac{\partial F}{\partial x_j}.$$

$\dfrac{\partial F}{\partial t}$ — 为当地物理量F随时间的变化率，称为当地变化率（也叫当地导数或局部导数），反映流场的不定常性。

$(V\cdot\nabla)F$ — 为不同位置上物理量的差异引起的变化率，称为迁移变化率（也叫位变导数或对流导数），反映了流场的不均匀性。

一维流动的加速度：沿流线或总流，若平均速度 $V=V(s,t)$，

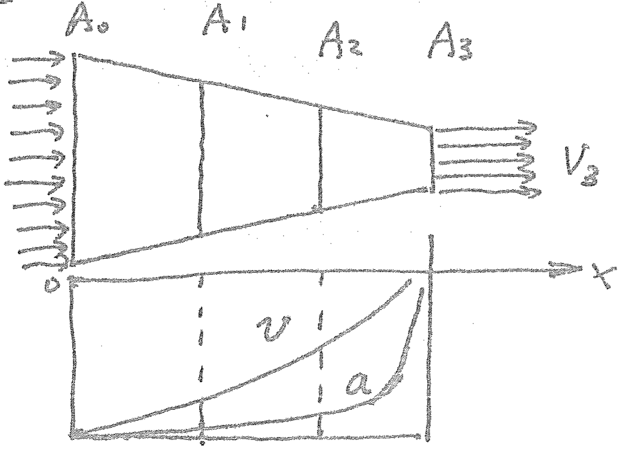
加速度为：
$$a_s=\frac{\partial V}{\partial t}+V\frac{\partial V}{\partial s}.$$

J. 例：B2.4.2

已知：一圆锥形收缩喷管，长为 36 cm，[redacted]入口 $A_0$ 和出口 $A_3$ 的直径分别为 $d_0=9cm$ 和 $d_3=3cm$。流量 $Q=0.02\,m^3/s$ 保持恒定。$A_1$ 和 $A_2$ 为两个三分点的圆截面。

求：按一维流动计算 $A_0$、$A_1$，$A_2$ 和 $A_3$ 四个截面上的速度和加速度。

解：流动定常；当地导数为0，只有迁移加速度：




$$a=V\frac{\partial V}{\partial x}$$，V 为管内 x（距入口距离）处截面上的平均速度，[redacted] x 处的截面积

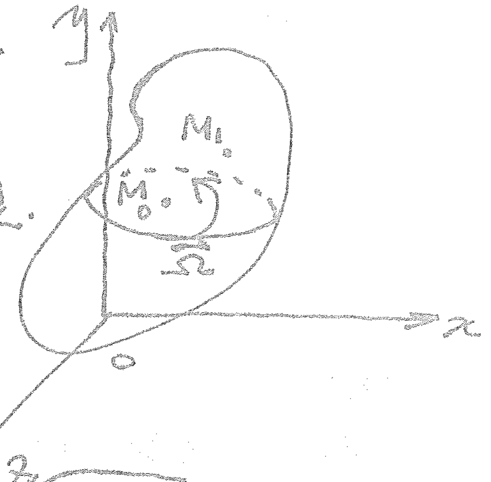
$$A=\pi\left(0.045-\frac{x}{12}\right)^2$$

此截面上的平均速度：$V=\frac{Q}{A}$

$$a=V\frac{\partial V}{\partial x}=\frac{0.0235-0.0436x}{A^3}Q^2$$

结果表明：喷管进出口的直径比为 3:1，速度比为 1:9，加速度比为 1:242。按牛顿第二定律流体有加速度必产生对喷管的冲击力，而且该冲击力在不同截面上不同。

五. 流场中一点邻域内相对运动分析.




(一) 刚体运动的速度分解定理:

$\vec{V}_0$ 是刚体中选定一点 $M_0$ 上的平动速度.

$\vec{\Omega}$ 是刚体绕 $M_0$ 点旋转的瞬时角速度.

$\vec{r}$ 是刚体上另一点 $M_1$ 到 $M_0$ 的矢径.

则 $M_1$ 点的运动速度可分解成一个平动项加一个转动项: $\boxed{\vec{v}_1=\vec{v}_0+\vec{\Omega}\times\vec{r}}$

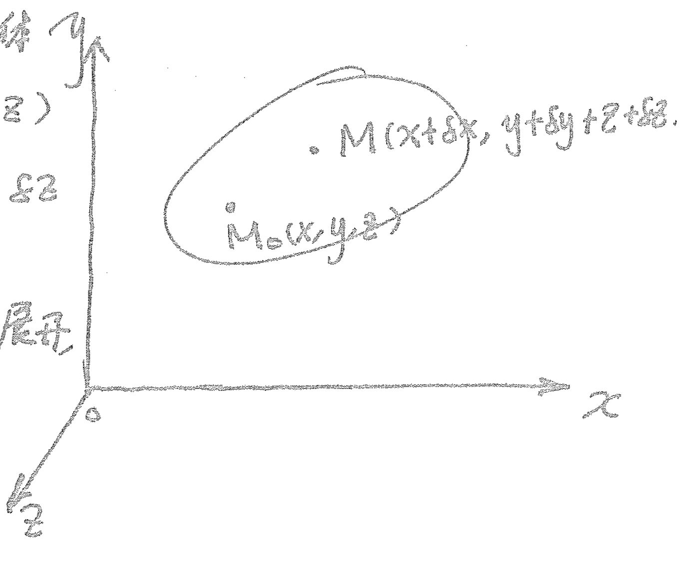
(二) 流体运动的亥姆霍兹(Helmholtz)速度分解定理:

流体由于其易变形性, 运动形式要比刚体复杂.

我们从流场内一点 $M_0$ 邻域内的流体质点相对运动来对 Helmholtz 速度分解定理进行推导.

假设 $M_0(x,y,z)$ 处速度为 $\vec{v}_0$, 流体微团内任一点 $M(x+\delta x, y+\delta y, z+\delta z)$ 处的速度为 $\vec{v}$, 并认为 $\delta x$, $\delta y$, $\delta z$ 都是一阶小量.

将 $\vec{v}$ 在 $M_0$ 点邻域内进行 Taylor 展开并略去二阶以上小量, 得:




$$\vec{v}=\vec{v}_0+\frac{\partial\vec{v}}{\partial x}\delta x+\frac{\partial\vec{v}}{\partial y}\delta y+\frac{\partial\vec{v}}{\partial z}\delta z$$

张量表示法:

$$v_i = v_{0i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\delta x_j \qquad (*)$$

其中 $\frac{\partial v_i}{\partial x_j}$ 为速度梯度，是二阶张量：$\bar{\bar{D}} = D_{ji} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}$

我们将 $D_{ji}$ 分解成对称张量和反对称张量之和：

$$D_{ji} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)}_{S_{ij}} + \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)}_{A_{ij}}$$

$$= S_{ij} + A_{ij} = \bar{\bar{S}} + \bar{\bar{A}}.$$

写成分量式；其中

$$\bar{\bar{S}} = S_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & \frac{1}{2}\theta_3 & \frac{1}{2}\theta_2 \\ \frac{1}{2}\theta_3 & \varepsilon_2 & \frac{1}{2}\theta_1 \\ \frac{1}{2}\theta_2 & \frac{1}{2}\theta_1 & \varepsilon_3 \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_2 = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_3 = \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\theta_1 = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \theta_2 = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \theta_3 = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}.$$

而：

$$\bar{\bar{A}} = A_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) & 0 & -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) \\ -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) & 0 \end{bmatrix}$$

令 $\Omega_1=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}\right)$, $\Omega_2=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\right)$, $\Omega_3=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)$.

则: $\vec{\Omega}=(\Omega_1,\Omega_2,\Omega_3)=\frac{1}{2}\nabla\times\vec{v}$.

$$\bar{\bar{A}}=A_{ij}=\begin{pmatrix}0 & -\Omega_3 & \Omega_2\\ \Omega_3 & 0 & -\Omega_1\\ -\Omega_2 & \Omega_1 & 0\end{pmatrix}.$$

因此: (*)式可写成:

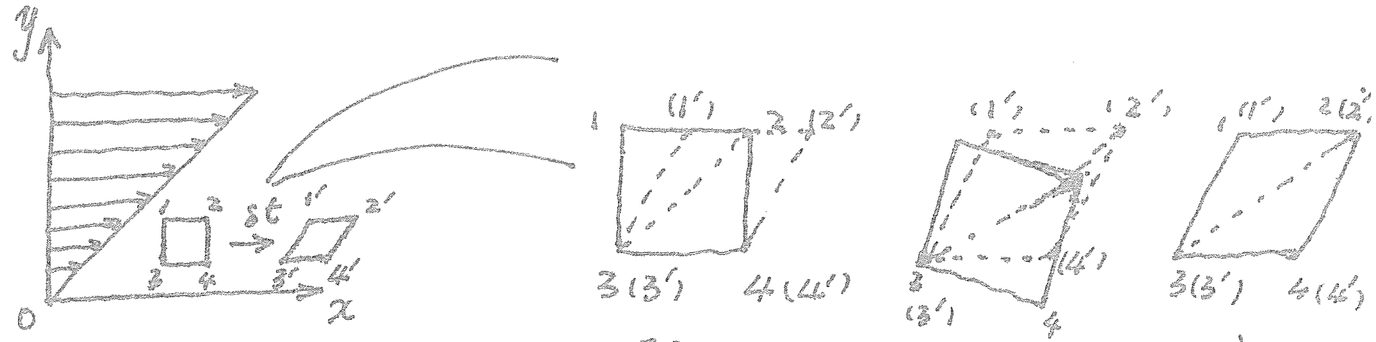
$$v_i=v_{0_i}+S_{ij}\,\delta x_j+A_{ij}\,\delta x_j$$

矢量式:
$$\vec{v}=\underbrace{\vec{v}_0}_{\vec{v}_1}+\underbrace{\bar{\bar{S}}\cdot\delta\vec{r}}_{\vec{v}_2}+\underbrace{\frac{1}{2}\nabla\times\vec{v}\times\delta\vec{r}}_{\vec{v}_3}\qquad(\#)$$

平动速度　　变形速度　　转动速度.

∴ 流体微团内对$M_0$点邻域的运动由平动、转动和变形三部分组成.

例如: 纯剪切流动, $u=ay$, $v=w=0$, 其中$a$为常数.




平动　　旋转(转动)　　变形.

在(#)式中: $\bar{\bar{S}}=S_{ij}$ 称为变形速度(或变形率、应变率)张量. strain rate tensor.

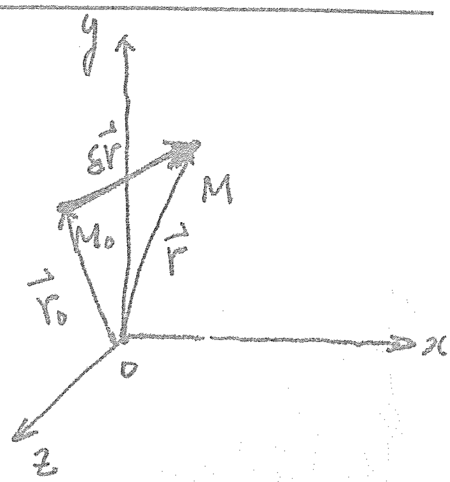
$\bar{\bar{A}}=A_{ij}$ 称为旋转张量.

数学推导

(三) 流体的变形运动.

如右图, 取由流体质点组成的线元 $\delta\vec{r}$.

由于 $\delta\vec{r} = \vec{r} - \vec{r}_0$




所以, $\frac{D}{Dt}\delta\vec{r} = \frac{D}{Dt}(\vec{r}-\vec{r}_0) = \vec{v} - \vec{v}_0 = \delta\vec{v}$

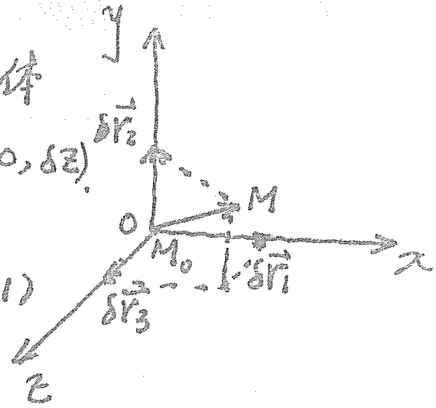
即, 线元 $\delta\vec{r}$ 的随体导数 = 同一时刻内 $M_0$ 与M两点间速度之差.

$$\frac{D}{Dt}\delta\vec{r} = \delta\vec{v} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial x}\delta x + \frac{\partial\vec{v}}{\partial y}\delta y + \frac{\partial\vec{v}}{\partial z}\delta z = (\nabla\vec{v})\cdot\delta\vec{r}$$

将 $M_0$ 点取为坐标原点, 分别取三个坐标轴上的流体线元 $\delta\vec{r}_1(\delta x, 0, 0)$, $\delta\vec{r}_2(0, \delta y, 0)$ 和 $\delta\vec{r}_3(0, 0, \delta z)$

或:

$$\delta\vec{r}_1 = \delta x\,\vec{i}, \quad \delta\vec{r}_2 = \delta y\,\vec{j}, \quad \delta\vec{r}_3 = \delta z\,\vec{k} \qquad (5.1)$$




因此, 我们有: $=(\nabla\vec{v})\cdot\delta\vec{r}_1$

$$\begin{cases} \frac{D}{Dt}\delta\vec{r}_1 = \frac{\partial\vec{v}}{\partial x}\delta x = \frac{\partial u}{\partial x}\delta x\,\vec{i} + \frac{\partial v}{\partial x}\delta x\,\vec{j} + \frac{\partial w}{\partial x}\delta x\,\vec{k} \\ \frac{D}{Dt}\delta\vec{r}_2 = \frac{\partial\vec{v}}{\partial y}\delta y = \frac{\partial u}{\partial y}\delta y\,\vec{i} + \frac{\partial v}{\partial y}\delta y\,\vec{j} + \frac{\partial w}{\partial y}\delta y\,\vec{k} \\ \frac{D}{Dt}\delta\vec{r}_3 = \frac{\partial\vec{v}}{\partial z}\delta z = \frac{\partial u}{\partial z}\delta z\,\vec{i} + \frac{\partial v}{\partial z}\delta z\,\vec{j} + \frac{\partial w}{\partial z}\delta z\,\vec{k} \end{cases} \qquad (5.2)$$

用(5.1)的第一、二、三式分别与(5.2)中三式点乘, 有

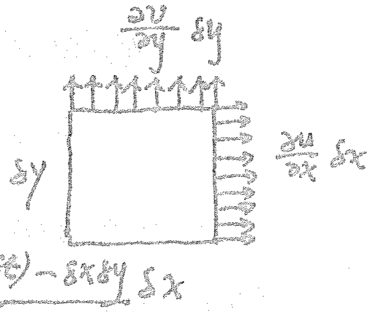
$$\begin{cases} \varepsilon_1 = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{\delta x}\frac{D}{Dt}\delta x \\ \varepsilon_2 = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{\delta y}\frac{D}{Dt}\delta y \\ \varepsilon_3 = \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{1}{\delta z}\frac{D}{Dt}\delta z \end{cases} \qquad (5.3)$$

因此，变形速度张量 $\vec{S}$ 的对角线分量 $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$ 和 $\varepsilon_3$ 的物理意义分别是流体元的线尺度 $(\delta x, \delta y, \delta z)$ 分别在 $x$, $y$, 和 $z$ 方向的局部瞬时相对拉伸速率或相对压缩速率，称为$\boxed{\text{线应变率}}$。

物理推导

1. 实际上，对于线元 $\delta x$，有：

$$\lim_{\substack{\delta x\to 0\\ \delta t\to 0}}\frac{\Delta(\delta x)}{\delta x\,\delta t}=\lim_{\substack{\delta x\to 0\\ \delta t\to 0}}\frac{\left(\delta x+\frac{\partial u}{\partial x}\delta x\,\delta t\right)-\delta x}{\delta x\,\delta t}=\frac{\partial u}{\partial x}=\varepsilon_1$$




2. 对于面元 $\delta A=\delta x\delta y$，有：

$$\lim_{\substack{\delta A\to 0\\ \delta t\to 0}}\frac{\Delta(\delta A)}{\delta A\,\delta t}=\lim_{\substack{\delta A\to 0\\ \delta t\to 0}}\frac{\left(\delta x+\frac{\partial u}{\partial x}\delta x\,\delta t\right)\left(\delta y+\frac{\partial v}{\partial y}\delta y\,\delta t\right)-\delta x\delta y}{\delta x\,\delta y\,\delta t}$$

$$=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}\delta t\overset{\delta t\to 0}{=\!=}\underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}}_{\text{面积扩张率}}$$

3. 同样道理，对于流体体元 $\delta V=\delta x\delta y\delta z$，有

$$\lim_{\substack{\delta V\to 0\\ \delta t\to 0}}\frac{\Delta(\delta V)}{\delta V\,\delta t}=\underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}}_{\text{体积膨胀率}}=\nabla\cdot\vec{v}$$

现在用(5.1)中的第一式和第二式分别点乘(5.2)中的第二式和第一式，有： $\delta\vec{r}_1\cdot\frac{D\delta\vec{r}_2}{Dt}=\frac{\partial u}{\partial y}\delta x\delta y$, $\delta\vec{r}_2\cdot\frac{D\delta\vec{r}_1}{Dt}=\frac{\partial v}{\partial x}\delta x\delta y$.

两式相加： $\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)\delta x\delta y=\frac{D}{Dt}(\delta\vec{r}_1\cdot\delta\vec{r}_2)=\frac{D}{Dt}(\delta x\delta y\cos\alpha_{xy})$

$$=\underbrace{\cos\alpha_{xy}}_{0}\frac{D}{Dt}(\delta x\delta y)-\delta x\delta y\underbrace{\sin\alpha_{xy}}_{1}\frac{D\alpha_{xy}}{Dt}=-\delta x\delta y\frac{D\alpha_{xy}}{Dt}.$$

$\delta_{xy}$ 为x轴与y轴夹角。

$$\Rightarrow \quad \theta_3 = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{D\delta_{xy}}{Dt}.$$

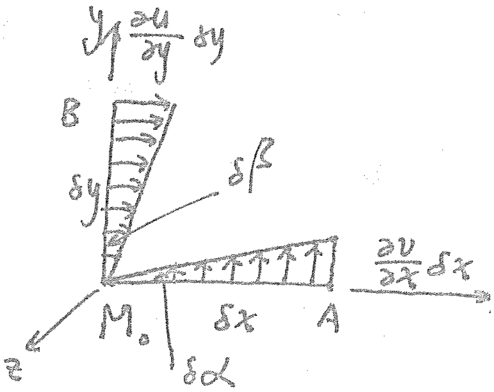
同样可以导出(由同学自己练习):

$$\theta_1 = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{D\delta_{yz}}{Dt}$$

$$\theta_2 = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{D\delta_{zx}}{Dt}.$$

因此，应变率张量 $\bar{\bar{S}}$ 非对角线分量 $\theta_1$、$\theta_2$ 和 $\theta_3$ 分别为y与z轴，z与x轴，x与y轴之间夹角的局部瞬时变化速率，称为$\boxed{\text{角变形速率}}$。

(四)流体的旋转运动。




令逆时针方向为正。以 $M_0$ 点为基准点取两正交线元 $M_0A$(沿x轴)和 $M_0B$(沿y轴)，则 $M_0A$ 绕z轴的旋转角速度

$$\Omega_{M_0A} = \lim_{\delta t\to 0}\frac{\delta\alpha}{\delta t} = \lim_{\delta t\to 0}\frac{\frac{\partial v}{\partial x}\delta x\delta t/\delta x}{\delta t} = \frac{\partial v}{\partial x}.$$

同样，
$$\Omega_{M_0B} = \lim_{\delta t\to 0}\frac{-\delta\beta}{\delta t} = \lim_{\delta t\to 0}\frac{-\frac{\partial u}{\partial y}\delta y\delta t/\delta y}{\delta t} = -\frac{\partial u}{\partial y}.$$

$M_0$ 点邻域内流体元(微团)绕z轴的(自)旋转角速度为两正交线元在xy平面内绕z轴的旋转角速度的平均值:

$$\Omega_z = \Omega_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

$\Omega_x = \Omega_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right)$ 和 $\Omega_y = \Omega_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)$ 有同样的物理意义。

## 六．流体涡旋运动的基本概念：

### (一) 涡旋和涡量的概念

Helmholtz 速度分解定理告诉我们，$\nabla\times\vec{v}$ 刻划了流体微团的转动部分（局部自转），其大小和方向分别代表了微团瞬时旋转角速度的2倍和瞬时转动轴。

定义涡量：$\underline{\vec{\omega}=\nabla\times\vec{v}}=\underline{2\vec{\Omega}}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ u & v & w\end{vmatrix}$

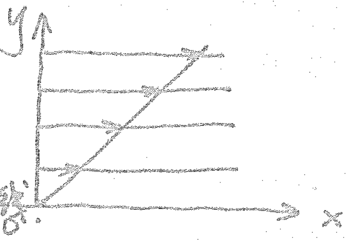
判断流动是否有旋，只要检验 $\vec{\omega}$ 是否为零即可。

两个例子：

① 剪切流动：

速度分布：$u=ay,\ v=w=0$

其中 $a$ 为常数，流线为平行于 $x$ 轴的直线。



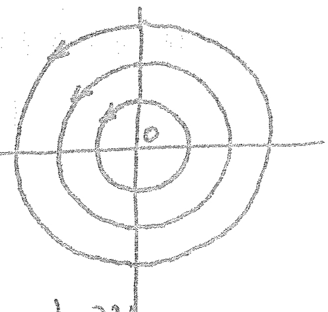
$\vec{\omega}=\nabla\times\vec{v}=(0,\ 0,\ -a)$，即 $\omega_x=\omega_y=0,\ \omega_z=-a$.

因此，流动处处有旋。

② 点涡运动：

速度分布：$v_r=0,\ v_\theta=\frac{b}{r}$，其中 $b$ 为常数。

流线是以原点O为中心的同心圆。



$r\neq0$ 时，$\omega_z=(\nabla\times\vec{v})_z=\frac{1}{r}\frac{\partial(rv_\theta)}{\partial r}-\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial\theta}=0$

除原点外，流动处处无旋。

因此，判断流动在某处是否有旋必须看流体微团本身是不是在自转，而不是看它是否绕中心作圆周运动。同时，对流体必须指出哪一点或哪个区域是否有旋，这就是流体局部性有别于刚体整体性的地方。

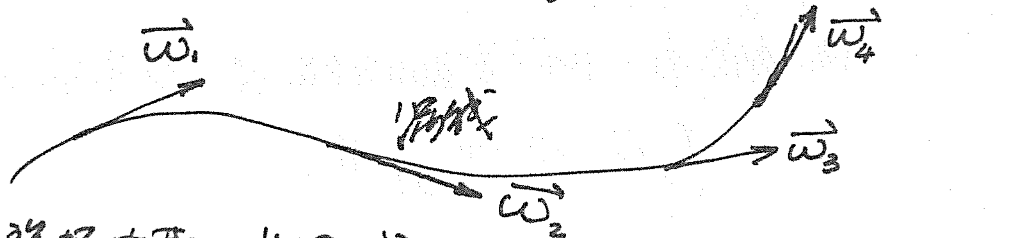
(二) 涡线、涡面、涡管的概念.

在任意时刻t，流动区域内各点均有一个确定的涡量 $\vec{\omega}=\nabla\times\vec{v}$，所组成的向量场称为涡量场或涡旋场，通常是空间坐标和时间的函数，即 $\vec{\omega}=\vec{\omega}(\vec{r},t)=(\omega_x,\omega_y,\omega_z)=\omega_x\vec{i}+\omega_y\vec{j}+\omega_z\vec{k}$.

几个表征涡量场的概念：

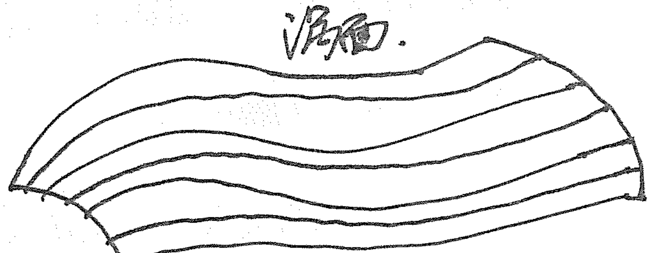
1. 涡线：流场内同一时刻由不同流体质点组成的曲线，该曲线上每一点的切线方向和该点的涡量方向重合(或一致).

$$d\vec{r}\times\vec{\omega}=0 \Rightarrow \frac{dx}{\omega_x(x,y,z,t)}=\frac{dy}{\omega_y(x,y,z,t)}=\frac{dz}{\omega_z(x,y,z,t)}.$$

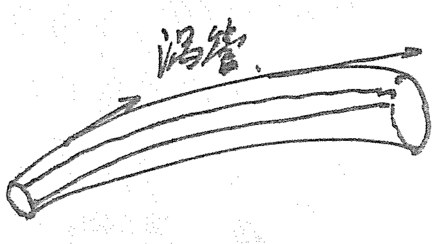



2. 涡面：在涡旋场内取一非涡线的曲线，过曲线每一点作涡线，这些涡线组成的曲面称为涡面.

3. 涡管：取一非涡线且不自交的封闭曲线，过曲线上每一点作涡线所组成的管状曲面称为涡管。



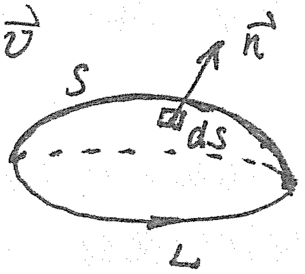

4. 涡通量和速度环量.




我们称面积分 $\int_S \vec{\omega}\cdot d\vec{S}=\int_S(\vec{\omega}\cdot\vec{n})dS$

为 $\vec{\omega}$ 通过任一截面S的涡通量，$\vec{n}$ 为S的外法向单位矢量.

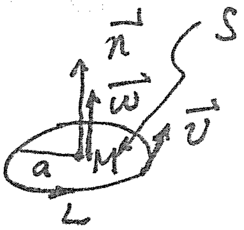
我们称线积分 $\Gamma=\int_L \vec{v}\cdot d\vec{r}$ 为速度向量 $\vec{v}$ 沿封闭曲线L的环量，简称速度环量。令逆时针方向为L正方向。它表征了流体质点沿封闭曲线L方向运动的总的趋势的大小。




由Stokes公式: $\int_L \vec{v}\cdot d\vec{r} = \int_S (\nabla\times\vec{v})\cdot d\vec{S} = \int_S \vec{\omega}\cdot d\vec{S}$.

S为张于L上的曲面，因此速度环量和涡通量都能表征涡旋强度。

5. 涡量的物理意义:




在M点邻域取一与 $\vec{\omega}$ 垂直的无限小圆，令其半径为a，则 $\int_S \vec{\omega}\cdot d\vec{S} = \int_L \vec{v}\cdot d\vec{r}$.

平均切向速度 $|\bar{v}| = \dfrac{\int_L \vec{v}\cdot d\vec{r}}{2\pi a}$

平均角速度 $|\bar{\Omega}| = \dfrac{\bar{v}}{a}$

所以，有 $|\bar{\omega}| = \dfrac{\int_L \vec{v}\cdot d\vec{r}}{\pi a^2} = 2\dfrac{|\bar{v}|}{a} = 2|\bar{\Omega}|$

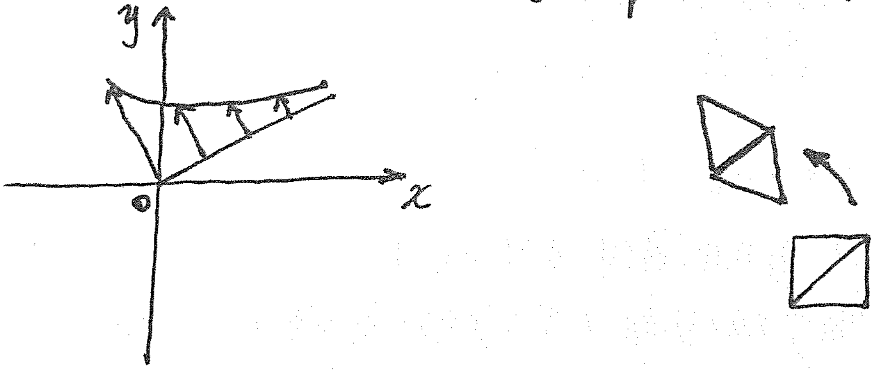
即，M点涡矢量的大小是流体微团绕该点旋转的平均角速度的两倍，方向与微团的瞬时转动轴线重合。

例: 设流场速度分布: $u=-\dfrac{cy}{x^2+y^2}$, $v=\dfrac{cx}{x^2+y^2}$, $w=0$.

求: 应变率张量 $\bar{\bar{S}}$, 旋转张量 $\bar{\bar{A}}$, 并回答流动是否有旋。

$$\bar{\bar{S}} = \begin{bmatrix} -\dfrac{2cxy}{(x^2+y^2)^2} & \dfrac{c(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2} & 0 \\ \dfrac{c(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2} & \dfrac{2cxy}{(x^2+y^2)^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{\bar{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

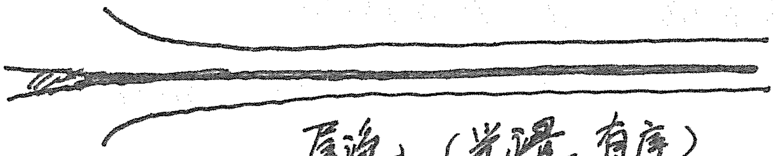
此流动有拉伸或压缩及角变形，但除原点外处处无旋。
用柱坐标表示流场分布：$v_r=0$，$v_\theta=\frac{c}{r}$，$w=0$。为点涡流动。



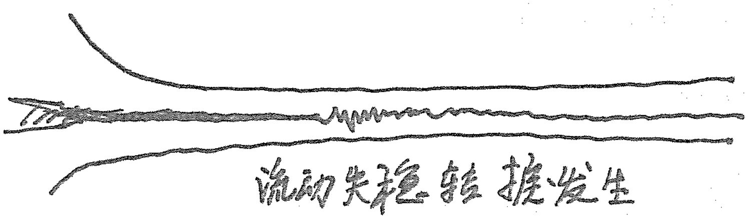

七、流体流动分类

（一）层流与湍流（Laminar Flows V.S. Turbulent Flows）
按流态进行划分

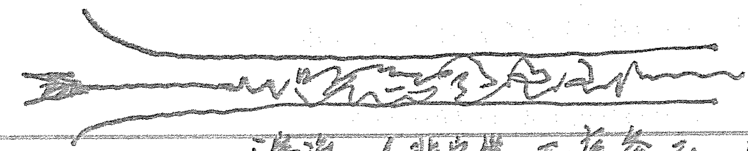
1. 英国的雷诺（O. Reynolds，1883），用红色染液显示玻璃圆管中的流动，提出了层流和湍流两种流态，并提出了雷诺数的概念。



层流（光滑、有序）



流动失稳转捩发生



湍流（非定常、无序紊乱、随机）
不规则

2. 雷诺数（Reynolds number）

Reynolds发现层流转捩到湍流取决于一个无量纲的组合数 $Re=\frac{\rho UD}{\mu}$，称为雷诺数.

(二) 内流与外流（Internal flows VS. External flows）

按流场是否被固体边界包围划分.

1. 内流：整个流场被（或几乎被）固壁包围的流动。

如：管道流、喷管流、明渠流、流体机械、发动机燃烧室、

特点：由于壁面不滑移条件，整个流场中速度梯度较大，粘性力影响显著，流动阻力主要来自壁面粘性切应力。

2. 外流：无界流场绕固体物的流动。

如：[redacted]圆柱绕流、机翼绕流等.

特点：边界层流动决定了绕流物体所受阻力。边界层外，粘性力影响可以忽略，按无粘流体分析。同时外部无粘区对绕流物体的升力和边界层内的压强分布有直接影响。

(三) 无旋流动与有旋流动.

1. 无旋流动：涡量处处为零的流动.

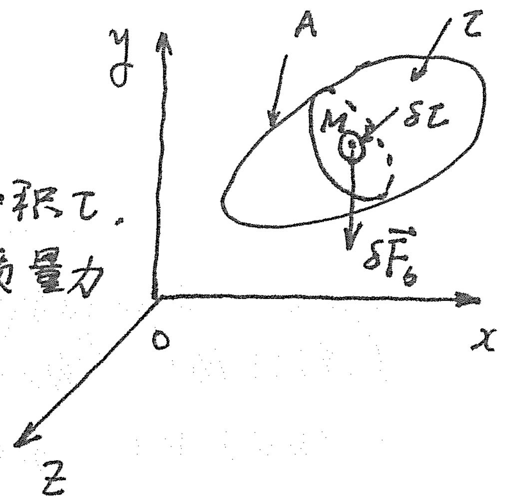
无粘流体的势流理论.

2. 有旋流动：涡量不为零的流动，又称为涡旋运动.

机翼尾部的起动涡与升力有关，钝体绕流时尾部的涡旋与阻力有关，大气涡旋与气象有关.

# 八. 作用在流体(微元)上的力.

## (一) 质量力(体积力)和表面力.




在流体中取一以封闭曲面A为界的体积τ. 则作用在流体上的力可以分为两类，即质量力和面力。

- 穿越空间作用在τ内所有流体微团上的非接触力，如重力、引力和惯性力 正比于流体元的质量，所以称为质量力；又由于这些力的大小一般与流体元的体积成正比，故又称体积力.
- 与A界面相接触的流体(或固体)作用于表面A上的力称为表面力，如压力、粘性切应力(摩擦力)等。表面力为流场中假想面一侧的流体(或固体)对另一侧流体的接触力.

### 1. 质量力或体(积)力:

在τ内任取一点M，围绕M点作体积元δτ，设其质量为δm，作用其上的质量力为$\delta \vec F_b$，现令Δτ向M点收缩，并取极限.

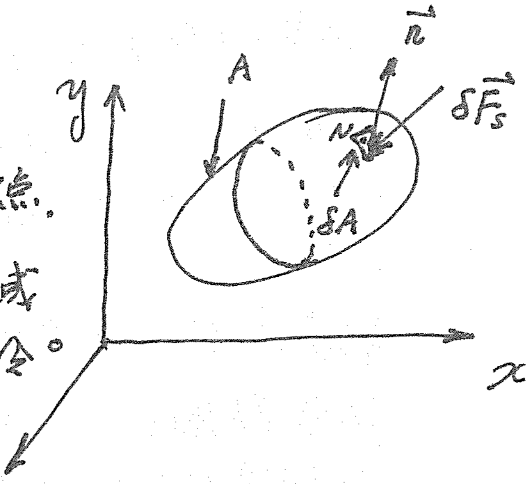
$$\vec f(x,y,z,t)=\lim_{\delta\tau\to 0}\frac{\delta \vec F_b}{\delta m}=\frac{d\vec F_b}{dm}=\frac{1}{\rho}\frac{d\vec F_b}{d\tau}$$

则$\vec f$代表M点上单位质量流体所受到的质量力，为空间坐标$\vec r$和时间t的函数，称为质量力在空间的分布密度。

因此，作用在体积元dτ上的质量力为 $d\vec F_b=\rho\vec f d\tau$，与体积元的体积成正比。由于$\vec f$值有限，dτ为体积元，所以$d\vec F_b$是三阶无穷小量.

作用在有限体积$\tau$上的质量力可表示为：

$$\int_\tau \rho \vec{f}\, d\tau .$$




2. 在A上任取一点N作面积元$\delta A$包住N点。设$\vec{n}$为$\delta A$的外法线方向，其指向的流体(或固体)作用在$\delta A$面上的表面力为$\delta\vec{F}_s$，现令$\delta A$向N点收缩，并取极限。

$$\vec{p}_n(x,y,z,t)=\lim_{\delta A\to 0}\frac{\delta \vec{F}_s}{\delta A}=\frac{d\vec{F}_s}{dA}$$

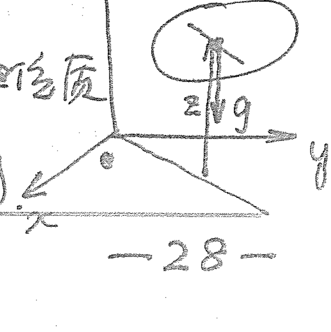
则$\vec{p}_n$代表N点上以$\vec{n}$为外法向的单位面积上所受的表面力，为空间坐标$\vec{r}$和时间$t$的函数，同时$\vec{p}_n$依赖于作用面的方向不同而不同。$\vec{p}_n$称为表面力在A面上上的分布密度，或称为应力。

因此，作用在面元$dA$上的表面力为$d\vec{F}_s=\vec{p}_n\, dA$，与面元的面积成正比。由于$\vec{p}_n$有限，$dA$为面元，所以$d\vec{F}_s$是二阶无穷小量。

作用在有限面积A上的表面力可表示为：

$$\int_A \vec{p}_n\, dA .$$

(二) 重力场：




在z轴垂直地面向上的直角坐标系中，作用在单位质量流体上的重力构成重力场：$f_x=0,\ f_y=0,\ f_z=-g$.

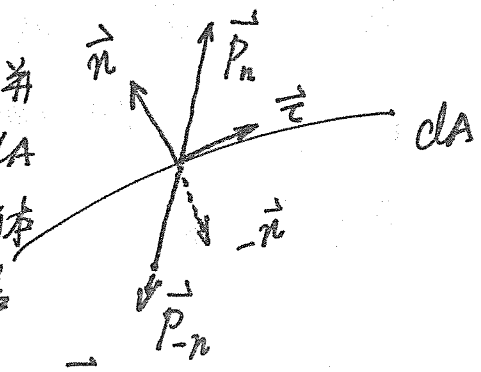
北京大学工学院

或 $$\vec{f} = -g\vec{k} = -\nabla(gz)$$

这里 $\pi = gz$ 称为重力势，是单位质量流体元具有的重力势能。

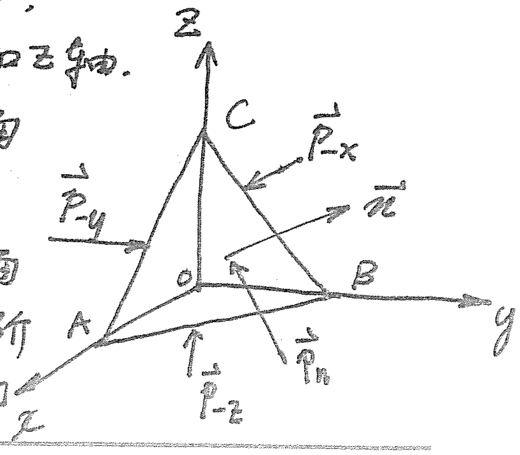
(三). 流体中任一点的应力、应力张量

如前面所说，$\vec{p}_n$ 是空间坐标 $\vec{x}$ 和时间 $t$ 以及表面外法向单位矢量 $\vec{n}$ 的函数，因此要描述一点的应力需要我们知道所有通过该点的面上受的应力。然而，过同一点不同面上所受的应力并不是互不相关的。我们将证明，只要知道三个坐标面上的应力，则任一以 $\vec{n}$ 为法线方向的表面上的应力都可以通过这三个应力矢量及 $\vec{n}$ 来表示。




如右图设 $\vec{n}$ 为面元 $dA$ 的外法线方向，并规定为正，法线 $\vec{n}$ 指向的一侧流体作用于 $dA$ 面上的应力以 $\vec{p}_n$ 表示，位于 $-\vec{n}$ 方向的流体作用于 $dA$ 面上的应力以 $\vec{p}_{-n}$ 表示。根据作用和反作用原理有：$\vec{p}_{-n} = -\vec{p}_n$ .

$$\vec{p}_n = p_{nn}\vec{n} + p_{n\tau}\vec{\tau} .$$




如右图，在流体中取四面体元OABC，其中OBC、OAC、OAB分别⊥x轴，y轴和z轴，而ABC的法线方向 $\vec{n}$ 任意。设4个微元面的面积分别为 $dA_x$、$dA_y$、$dA_z$ 和 $dA$。作用在四面体上的力有外力、惯性力和表面力三种。由于外力和惯性力都是体力，是三阶无穷小量，而表面力是二阶无穷小量，因此

当体积元OABC趋于零时，可以忽略体力（外力和惯性力）及其力矩的作用。根据达朗贝尔原理，作用于四面体各微元面上的表面力合力及合力矩应该平衡，即作用于微元面上的合力及合力矩为零。

$$\vec{P}_n dA + \vec{P}_{-x} dA_x + \vec{P}_{-y} dA_y + \vec{P}_{-z} dA_z = 0 \quad (2.8.1)$$

考虑到 $\vec{P}_{-x} = -\vec{P}_x$，$\vec{P}_{-y} = -\vec{P}_y$，$\vec{P}_{-z} = -\vec{P}_z$

$$dA_x = \cos(\vec{n}, x)\, dA = n_x\, dA$$

$$dA_y = \cos(\vec{n}, y)\, dA = n_y\, dA$$

$$dA_z = \cos(\vec{n}, z)\, dA = n_z\, dA$$

其中 $\vec{n} = n_x \vec{i} + n_y \vec{j} + n_z \vec{k}$.

于是式(2.8.1)可写成：$\vec{P}_n = \vec{P}_x n_x + \vec{P}_y n_y + \vec{P}_z n_z \quad (2.8.2)$

在直角坐标系下，(2.8.2)的分量式（在x, y, z三个方向的投影）为：

$$\begin{cases} P_{nx} = n_x P_{xx} + n_y P_{yx} + n_z P_{zx} \\ P_{ny} = n_x P_{xy} + n_y P_{yy} + n_z P_{zy} \\ P_{nz} = n_x P_{xz} + n_y P_{yz} + n_z P_{zz} \end{cases} \quad (2.8.3)$$

(2.8.3)也可用矩阵的形式表达：

$$[P_{nx} \quad P_{ny} \quad P_{nz}] = [n_x \quad n_y \quad n_z] \begin{bmatrix} P_{xx} & P_{xy} & P_{xz} \\ P_{yx} & P_{yy} & P_{yz} \\ P_{zx} & P_{zy} & P_{zz} \end{bmatrix} \quad (2.8.4)$$

定义：$\overline{\overline{P}} = \begin{bmatrix} P_{xx} & P_{xy} & P_{xz} \\ P_{yx} & P_{yy} & P_{yz} \\ P_{zx} & P_{zy} & P_{zz} \end{bmatrix}$，为一二阶张量

则(2.8.2)还可表示成： $\vec{P}_n = \vec{n}\cdot\overline{\overline{P}}$ (2.8.5)

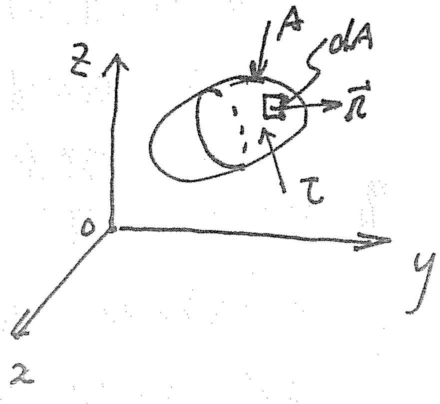
或： $P_{nj} = n_i P_{ij}$，$i,j=1,2,3$. (2.8.6)

其中 $\overline{\overline{P}}$ 称为应力张量，$P_{xx}$、$P_{yy}$、$P_{zz}$ 为法向应力张量，$P_{xy}$、$P_{yx}$、$P_{xz}$、$P_{zx}$、$P_{yz}$、$P_{zy}$ 为切向应力张量。式(2.8.2)至式(2.8.6)表明，若三个坐标面上的应力矢量 $\vec{P}_x$、$\vec{P}_y$、$\vec{P}_z$ 或应力张量 $\overline{\overline{P}}$ 已知，则任一法向为$\vec{n}$的面上的应力 $\vec{P}_n$ 就可以求出。也就是说，应力张量 $\overline{\overline{P}}$ 完全可以描述流场中一点的应力状态。

(四) 应力张量的对称性.

上面应用了所有面元上的合力为零导出了应力张量. 现在我们利用面元上的合力矩为零导出应力张量的对称性. 在流体中任意取体积元τ，其界面为A，取其中一点O为力矩参考点.

$$\int_A \vec{r}\times\vec{P}_n\,dA = 0$$




利用置换符号，并考虑到(2.8.6)：

$$\int_A \varepsilon_{ijk}x_jP_{nk}\,dA = \int_A \varepsilon_{ijk}x_jP_{lk}n_l\,dA$$

$$\overset{\text{奥高公式}}{=\!=\!=} \int_\tau \varepsilon_{ijk}\frac{\partial(x_jP_{lk})}{\partial x_l}\,d\tau$$

(高斯公式)

$$= \int_\tau \varepsilon_{ijk}\left(P_{jk} + x_j \frac{\partial P_{ek}}{\partial x_e}\right) d\tau = 0$$

由于 $x_j$ 为一阶无穷小量，所以 $x_j \frac{\partial P_{ek}}{\partial x_e}$ 和 $P_{jk}$ 相比是高阶无穷小量，可忽略不计。因此，我们有：

$$\int_\tau \varepsilon_{ijk} P_{jk}\, d\tau = 0$$

由于 $\tau$ 的任意性，所以有 $\varepsilon_{ijk} P_{jk} = 0$

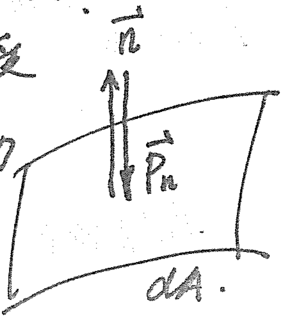
又 $\varepsilon_{ijk} P_{jk} = \varepsilon_{ikj} P_{kj} = -\varepsilon_{ijk} P_{kj} = 0$

$$\Rightarrow \varepsilon_{ijk} P_{kj} = 0$$

$$\Rightarrow \varepsilon_{ijk}(P_{jk} - P_{kj}) = 0 \Rightarrow \boxed{P_{jk} = P_{kj}}. \qquad (2.8.7)$$

即，应力张量 $\overleftrightarrow{P} = P_{jk}$ 为二阶对称张量，只有六个不同分量。切向应力分量 $P_{xy} = P_{yx}$、$P_{xz} = P_{zx}$，$P_{yz} = P_{zy}$.

(五). 静止流体和理想流体（无粘流体）的应力张量：




静止流体（包括粘性流体和理想流体）不能承受切向力作用。因此，作用在任一表面 dA 上的应力 $\vec{P_n}$ 只有法向分量 $P_{nn}$，其切线方向分量为零。又因为流体不能承受拉力，所以法向应力为向着表面 dA 的压力。

对于静止流体而言，上面提到的三个坐标面上的应力 $\vec{P_x}$，$\vec{P_y}$ 和 $\vec{P_z}$ 的法向应力 $P_{xx}$、$P_{yy}$、和 $P_{zz}$ 不为零，而切向应力

$p_{xy}=p_{yz}=p_{zx}=0$.

由应力分量表达式(2.8.3)：

$$p_{nx}=p_{xx}n_x,\quad p_{ny}=p_{yy}n_y,\quad p_{nz}=p_{zz}n_z \qquad (2.8.8)$$

又：　$\vec{p}_n=p_{nn}\vec{n}$

$$\therefore\quad p_{nx}=p_{nn}n_x,\quad p_{ny}=p_{nn}n_y,\quad p_{nz}=p_{nn}n_z \qquad (2.8.9)$$

对比(2.8.8)和(2.8.9)，我们得到：

$$p_{xx}=p_{yy}=p_{zz}=p_{nn}. \qquad (2.8.10)$$

由于$\vec{n}$取向任意，(2.8.10)说明静止流体内同一点上各个不同方向上的法向应力相等。由于压力与作用面的法线方向相反，故令法向应力以一共同值$-p$来表示，即

$$p_{xx}=p_{yy}=p_{zz}=p_{nn}=-p(x,y,z,t) \qquad (2.8.11)$$

其中$p=p(x,y,z,t)$为空间坐标$\vec{x}$和时间$t$的标量函数，称为压力函数。在静止流体中，压力函数$p$就可以完全刻划任一点上的应力状态，对应的应力张量可写为：

$$\overline{\overline{P}}=-p\delta_{ij}=\begin{bmatrix}-p & 0 & 0\\ 0 & -p & 0\\ 0 & 0 & -p\end{bmatrix}=-p\overline{\overline{I}}.$$

$\overline{\overline{I}}$称为三阶单位矩阵，或称二阶单位张量。

讨论：对于理想流体（无粘流体），由于$p_{n\tau}=0$，故上述静止流体的应力状态表达方法同样成立。

例. J [B.2.1.2]. 已知速度分布 $\begin{cases} u = x+t \\ v = y+t \end{cases}$，流体质点 A 在 $t=0$ 时位于 $(a, b)$ 点. 求：流体质点 A 在 $t=0$ 时的加速度 $\vec{a}$.

解：由从前的例题，我们知道 A 的运动轨迹方程为：

$$\begin{cases} x = (a+1)e^t - t - 1 \\ y = (b+1)e^t - t - 1 \end{cases}$$

由定义：
$$a_x = \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = (a+1)e^t \Big|_{t=0} = a+1$$
$$a_y = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = (b+1)e^t \Big|_{t=0} = b+1.$$

由质点物质导数的概念：

$$a_x = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = 1 + (x+t)\cdot 1 + (y+t)\cdot 0$$
$$= x+t+1$$
$$a_y = \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = 1 + (x+t)\cdot 0 + (y+t)\cdot 1$$
$$= y+t+1$$

由于 $t=0$ 时，质点 A 位于 $(x=a, y=b)$. 所以流体质点 A 在 $t=0$ 时的加速度 $a_x = a+1$，$a_y = b+1$.

两种解法结果一致.

例. 已知流场中某点的应力张量为：$\overline{\overline{p}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

求：作用于平面 $x+3y+z=1$ 外侧（远离原点一侧）上的应力矢量.

解：平面 $x+3y+z=1$ 的外法向单位矢量 $\vec{n} = \dfrac{\vec{i}+3\vec{j}+\vec{k}}{\sqrt{1^2+3^2+1^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{11}}(\vec{i}+3\vec{j}+\vec{k})$.

$$\therefore \vec{p}_n = \vec{n}\cdot\overline{\overline{p}} = \frac{1}{\sqrt{11}}[1\ \ 3\ \ 1]\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{11}}[5\ \ 7\ \ 3].$$

## 九. 应力张量 $\overline{\overline{P}}$ 与应变率张量 $\overline{\overline{S}}$ 之间的关系——本构关系.

### (一) 应力张量的常用表达方式:

与静止流体不同,运动的粘性流体中一点各个面的法向应力通常并不相等. 引入平均压力函数(或称平均压强) $\bar{p}$ 可以证明:

$$\bar{p} = \frac{1}{3}(p_{xx} + p_{yy} + p_{zz}) = -p \qquad (2.9.1)$$

$p$ 不等于静止流体的压力函数,但当流动停止时会趋于静止流体的压力函数。这个平均法向应力函数 $p$ 和热力学中的压力具有不同的含义,但大量实际计算表明,在大部分情况下(除高温、高频声波之外的一般气体运动),可以认为 $p$ 等于或趋近于热力学中的平衡压强.

因此,应力张量 $\overline{\overline{P}}$ 可写成各向同性部分 $-p\overline{\overline{I}}$ 和各向异性部分 $\overline{\overline{P}}'$ 之和:

$$\overline{\overline{P}} = -p\overline{\overline{I}} + \overline{\overline{P}}' = \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \tau_{zz} \end{pmatrix}$$

其中: $p_{xx} = -p + \tau_{xx}$, $p_{yy} = -p + \tau_{yy}$, $p_{zz} = -p + \tau_{zz}$.

$\tau_{xy} = p_{xy}$, $\tau_{yz} = p_{yz}$, $\tau_{xz} = p_{xz}$.

其张量表达式为:

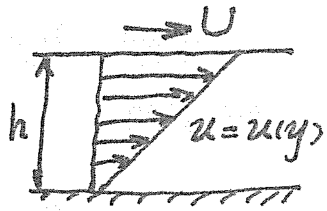
$$p_{ij} = \underbrace{-p\delta_{ij}}_{\text{“静压强”项}} + \underbrace{\tau_{ij}}_{\text{“偏应力”项}} \qquad (2.9.2)$$

式(2.9.1)称为斯托克斯(Stokes)假设.

(二) 广义牛顿粘性定律—本构关系:

牛顿(1687)对简单的剪切流动提出了牛顿粘性定律:

$$\tau = \mu \frac{du}{dy}$$




即切应力τ与剪切变形速度(速度梯度)成正比.

然而实际流动常常很复杂,需要提出有关应力张量与变形速度张量之间的更一般的关系式.

1848年,斯托克斯首先提出该问题,假设:

① 应力(张量)与应变率(张量)成线性关系;(主要指偏应力张量).

② 流体是各向同性的,即流体的所有性质(如粘性、热传导等)在每点的各个方向上都是相同的,不依赖于方向和坐标系的转换.

③ 流动静止时,流体中的应力趋于静止流体的应力(2.9.1).

$$\bar{\bar{P}} = -p\bar{\bar{I}} + 2\mu\left(\bar{\bar{S}} - \frac{1}{3}\bar{\bar{I}}\,\nabla\cdot\vec{v}\right) \qquad (2.9.3)$$

张量表式: $$P_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu\left(S_{ij} - \frac{1}{3}S_{kk}\delta_{ij}\right) \qquad (2.9.4)$$

其分量表达式:

$$\begin{cases} P_{xx} = -p - \frac{2}{3}\mu\,\mathrm{div}\,\vec{v} + 2\mu\frac{\partial u}{\partial x} \\ P_{yy} = -p - \frac{2}{3}\mu\,\mathrm{div}\,\vec{v} + 2\mu\frac{\partial v}{\partial y} \\ P_{zz} = -p - \frac{2}{3}\mu\,\mathrm{div}\,\vec{v} + 2\mu\frac{\partial w}{\partial z} \\ P_{xy} = P_{yx} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \\ P_{zx} = P_{xz} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ P_{yz} = P_{zy} = \mu\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) \end{cases} \qquad (2.9.5)$$

式(2.9.3)~(2.9.5)称为广义粘性定律.