第四章 本构关系

4.1 塑性应力率和塑性应变率

弹塑性体本构关系的两个假设：

1° 小变形

2° 忽略应变率大小对变形规律的影响.（率无关材料）

塑性力学本构关系的一般形式为，

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(\varepsilon_{ij}, \xi_\beta)$$

在内变量 ξ_β 不变时，应变也可以用应力表示，

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}(\sigma_{ij}, \xi_\beta)$$

应力、应变的变化率为：

$$\dot{\sigma}_{ij} = L_{ijkl}\dot{\varepsilon}_{kl} + \dot{\sigma}^p_{ij}$$

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = M_{ijkl}\dot{\sigma}_{kl} + \dot{\varepsilon}^p_{ij}$$

其中，弹性应力率 $\dot{\sigma}^e_{ij} = L_{ijkl}\dot{\varepsilon}_{kl}$

塑性应力率 $\dot{\sigma}^p_{ij} = \dfrac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \xi_\beta}\dot{\xi}_\beta$

弹性应变率 $\dot{\varepsilon}^e_{ij} = M_{ijkl}\dot{\sigma}_{kl}$

塑性应变率 $\dot{\varepsilon}^p_{ij} = \dfrac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial \xi_\beta}\dot{\xi}_\beta$

弹性张量 $L_{ijkl} = \dfrac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}}$ （刚度）

$M_{ijkl} = \dfrac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial \sigma_{kl}}$ （柔度）

L、M 为四阶正定完全对称的互逆张量.

一般来说，弹性性质是依赖于塑性变形的，或者说弹性变形与塑性变形是耦合的。

若假设弹性变形与塑性变形不耦合，本构关系可写为

$$\sigma_{ij} = L_{ijkl}\varepsilon_{kl} + \sigma^p_{ij}$$

$$\varepsilon_{ij} = M_{ijkl}\sigma_{kl} + \varepsilon^p_{ij}$$

此时 L_{ijkl}、M_{ijkl} 成为常张量，σ^p_{ij}、ε^p_{ij} 仅是内变量的函数。

在弹性范围内，偏应力率与偏应变率间满足关系：

$$\dot{e}_{ij} = \frac{1}{2\mu}\dot{S}_{ij} \quad 或 \quad \dot{e}_{ij} = \frac{1+\nu}{E}\dot{S}_{ij}$$

由于 $\dot{S}_{kk}=0$，上述方程组只有五个是独立的。

另有关系

$$\dot{\varepsilon}_{kk} = \frac{1-2\nu}{E}\dot{\sigma}_{kk} = \frac{1}{3k}\dot{\sigma}_{kk}$$

其中，体积模量 $k = \frac{E}{3(1-2\nu)} = \lambda_0 + \frac{2}{3}\mu$

4.2 应变空间中的加载曲面和加、卸载准则

① 应变空间中的加载面：$g(\varepsilon_{kl}, \xi_\beta) = f(\sigma_{ij}(\varepsilon_{kl}, \xi_\delta), \xi_\beta) = 0$

相似地，也可以把应力空间中的加载面写为

$$f(\sigma_{kl}, \xi_\beta) = g(\varepsilon_{ij}(\sigma_{kl}, \xi_\delta), \xi_\beta) = 0$$

应力空间和应变空间中加载面的外法向为 $\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}$ 和 $\frac{\partial g}{\partial \varepsilon_{ij}}$，

它们间的关系为

$$\frac{\partial g}{\partial \varepsilon_{kl}} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} = L_{ijkl}\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = L_{klij}\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} = \frac{\partial g}{\partial \varepsilon_{ij}}\frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial \sigma_{kl}} = M_{ijkl}\frac{\partial g}{\partial \varepsilon_{ij}} = M_{klij}\frac{\partial g}{\partial \varepsilon_{ij}}$$

一致性条件：$\frac{\partial g}{\partial \varepsilon_{ij}}\dot{\varepsilon}_{ij} + \frac{\partial g}{\partial \xi_\beta}\dot{\xi}_\beta = 0$

② 率无关材料的加载和卸载准则

设内变量的演化方程具有形式 $\dot{\xi}_\beta = \gamma Z_\beta(\varepsilon_{ij}, \xi_\delta)$

由一致性条件，得 $\frac{\partial g}{\partial \varepsilon_{ij}}\dot{\varepsilon}_{ij} + \frac{\partial g}{\partial \xi_\beta}Z_\beta\gamma = 0$，即

$$\gamma = -\left(\frac{\partial g}{\partial \xi_\beta}Z_\beta\right)^{-1}\left(\frac{\partial g}{\partial \varepsilon_{kl}}\dot{\varepsilon}_{kl}\right)$$

记 $\omega = -\left(\frac{\partial g}{\partial \xi_\beta}Z_\beta\right)^{-1}$，$\hat{g} = \frac{\partial g}{\partial \varepsilon_{kl}}\dot{\varepsilon}_{kl}$

则演化方程化为 $\dot{\xi}_\beta = \omega Z_\beta(\varepsilon_{ij}, \xi_\delta)\hat{g}$

上述方程仅适用于弹塑性加载过程。

此方程表明，对率无关材料，内变量的变化率 $\dot{\xi}_\beta$ 与应变率张量 $\dot{\varepsilon}_{ij}$ 间具有一次齐次关系。

率无关材料的加载和卸载准则为

$$\dot{\xi}_\beta = \begin{cases} 0, & g<0 \quad \text{(材料处于弹性状态)} \\ 0, & g=0,\ \hat{g}<0 \quad \text{(材料处于卸载状态)} \\ 0, & g=0,\ \hat{g}=0 \quad \text{(材料处于中性变载状态)} \\ \omega z_\beta \hat{g}, & g=0,\ \hat{g}>0 \quad \text{(材料处于弹塑性加载状态)} \end{cases}$$

其中，$g<0$ 表示应变状态在加载曲面内，

$g=0$ 表示应变状态在加载曲面上，

$\hat{g}>0$ 表示应变增量指向加载曲面外，

$\hat{g}=0$ 表示应变增量与加载曲面相切。

引入记号 $\langle \hat{g} \rangle = \begin{cases} 0, & \hat{g}\le 0 \\ \hat{g}, & \hat{g}>0 \end{cases}$

则加、卸载准则化简为

$g=0$? 如何体现

$$\dot{\xi}_\beta = \omega z_\beta \langle \hat{g} \rangle$$

③ 应力表示的加、卸载准则的局限性

记 $\hat{f} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij}$，则

$$\hat{g} = \frac{\partial g}{\partial \varepsilon_{ij}} \dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{\partial g}{\partial \varepsilon_{ij}} (M_{ijkl} \dot{\sigma}_{kl} + \dot{\varepsilon}^p_{ij})$$

$$= \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} \dot{\sigma}_{kl} + \frac{\partial g}{\partial \varepsilon_{ij}} \dot{\varepsilon}^p_{ij}$$

$$= \hat{f} + \frac{\partial g}{\partial \varepsilon_{ij}} \dot{\varepsilon}^p_{ij}$$

其中，塑性应变率 $\dot{\varepsilon}^p_{ij} = \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial \xi_\beta} \dot{\xi}_\beta$

$$= \omega \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial \xi_\beta} z_\beta \langle \hat{g} \rangle$$

$$= \hat{\varepsilon}_{ij} \langle \hat{g} \rangle$$

记 $\hat{\varepsilon}_{ij} = \omega \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial \xi_\beta} z_\beta$

从而 $\hat{f}$ 与 $\hat{g}$ 满足关系：

$$\hat{f} = \phi \hat{g}, \quad \text{其中 } \phi = 1 - \frac{\partial g}{\partial \varepsilon_{ij}} \hat{\varepsilon}_{ij}$$

ϕ 是一个表征材料硬化特性的参数。$\phi>0$ 时，材料硬化；$\phi<0$ 时，材料软化；$\phi=0$ 时，材料为理想塑性阶段。

若以$\hat{f}$为加、卸载准则的判据，即 $\begin{cases} \hat{f}>0, & 加载 \\ \hat{f}=0, & 中性变载 \\ \hat{f}<0, & 卸载 \end{cases}$

由应变表示的加、卸载准则知，此判据仅在$\phi>0$，也就是材料处于硬化阶段时，才成立。这就是应力表示的加卸载准则的局限性。

几何解释：弹塑性加载时，$\hat{g}>0$，应变空间中的加载面$g=0$在应变状态附近局部地向外移动，但f却不是：

$\phi>0$，材料强化时，应力空间中的加载面$f=0$在应力状态附近局部地向外移动；

$\phi=0$，材料理想塑性，$f=0$局部不动；

$\phi<0$，材料软化，$f=0$局部地向内移动。

4.3 有关材料性质的几个假设

① 稳定材料假设

稳定材料：若应力的单调变化会引起应变同号的单调变化，或者说，应变的单调变化会引起应力同号的单调变化时，称材料是稳定的。

稳定材料的应力应变曲线的斜率是非负的。

稳定材料的数学表达式：

对任意的两个状态(1)、(2)，当σ_{ij}在应力空间中沿直线路径由状态(1)单调的变化到状态(2)时，或者当ε_{ij}在应变空间中沿直线路径由状态(1)单调地变化到状态(2)时，必然有

$$\left(\sigma_{ij}^{(2)}-\sigma_{ij}^{(1)}\right)\left(\varepsilon_{ij}^{(2)}-\varepsilon_{ij}^{(1)}\right)\geq 0$$

或 $$d\sigma_{ij}\,d\varepsilon_{ij}\geq 0$$

② Drucker 公设（杜拉克公设）

公设：在$\sigma-\varepsilon$ ($\varepsilon-\sigma$) 平面上，应力闭循环总是沿顺时针方向。

物理意义：在一个应力闭循环中不可能提取有用功。

③ 依留辛公设

公设：在

4.4 加载面的外凸性和正交流动法则

①一个基本不等式

构造一个应力闭循环：

(1)是加载面 $f=0$ 内任意一点；

由(1)弹性加载至加载面上任意一点(2)；

作一微应力增量 $\Delta\sigma_{ij}$，使材料产生微小的塑性应变增量 $\Delta\varepsilon_{ij}^{p}$，达到点(3)；

由(3)弹性卸载至点(1)，记为点(4)。

杜拉克公设可写成 $\int_{(1)}^{(4)}(\sigma_{ij}-\sigma_{ij}^{(1)})d\varepsilon_{ij}\geq 0$

由 $d\varepsilon_{ij}=M_{ijkl}d\sigma_{kl}+d\varepsilon_{ij}^{p}$，得

$$\int_{(1)}^{(4)}(\sigma_{ij}-\sigma_{ij}^{(1)})M_{ijkl}\,d\sigma_{kl}+\int_{(1)}^{(4)}(\sigma_{ij}-\sigma_{ij}^{(1)})d\varepsilon_{ij}^{p}\geq 0$$

上式第一项为零，第二项只在 (2)→(3) 时有塑性应变增量，即

$$\int_{(2)}^{(3)}(\sigma_{ij}-\sigma_{ij}^{(1)})\,d\varepsilon_{ij}^{p}\geq 0$$

或 $$(\sigma_{ij}^{(2)}-\sigma_{ij}^{(1)})\Delta\varepsilon_{ij}^{p}+\frac{1}{2}\Delta\sigma_{ij}\Delta\varepsilon_{ij}^{p}\geq 0$$

这就是基本不等式.

② 推论1：如果把应力起始点(1)取在加载面上，且仍能构造出上述应力闭循环，则在 Drucker 公设下，材料稳定。

证明：$\because \sigma_{ij}^{(1)}=\sigma_{ij}^{(2)}$

$\therefore$ 基本不等式化为 $d\sigma_{ij}\,d\varepsilon_{ij}^{p}\geq 0$

又 $\because d\sigma_{ij}M_{ijkl}d\sigma_{kl}=d\sigma_{ij}\,d\varepsilon_{ij}^{e}\geq 0$

$\therefore d\sigma_{ij}\,d\varepsilon_{ij}\geq 0$. □.

③ 推论2：加载面 $f=0$ 是外凸的。

(加载面的外凸性)

证明：若点(1)在加载面内，则基本不等式化为

$$(\sigma_{ij}^{(2)}-\sigma_{ij}^{(1)})\,d\varepsilon_{ij}^{p}\geq 0$$

将应力空间的坐标轴与塑性应变空间的坐标轴重合，并在应力空间中过 $\sigma_{ij}^{(2)}$ 作一个与 $d\varepsilon_{ij}^{p}$ 垂直的超平面，则不等式表明，$\sigma_{ij}^{(1)}$ 在此超平面的另一侧。这说明整个加载面都在此超平面的另一侧。由(2)点的任意性，加载面外凸. □.

注：$g=0$ 也是外凸的。

④ 推论3：1° 如果加载面在某应力点处光滑，则相应的塑性应变增量必指向加载面在这点的外法向：

（正交流动法则）

$$d\varepsilon_{ij}^{p} = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \quad (d\lambda \geq 0)$$

或 $$\dot{\varepsilon}_{ij}^{p} = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \quad (\dot{\lambda} \geq 0)$$

2° 如果加载面在某应力点处是 r 个光滑面 $f_s=0$ 的交点，则相应的塑性应变增量可写为

$$d\varepsilon_{ij}^{p} = d\lambda_s \frac{\partial f_s}{\partial \sigma_{ij}} \quad (d\lambda_s \geq 0,\ s=1,2,\cdots,r)$$

或 $$\dot{\varepsilon}_{ij}^{p} = \dot{\lambda}_s \frac{\partial f_s}{\partial \sigma_{ij}}$$

即塑性应变增量的方向处于由这 r 个加载面 $f_s=0$ 的外法线组成的锥体内。

证明：1° 经过 $\sigma_{ij}^{(2)}$ 且与加载面相切的平面是唯一的。

如果再作一个与 $d\varepsilon_{ij}^{p}$ ~~相垂直~~的超平面 Q，Q 与上述切平面不重合，则它与加载面相割。

这时，基本不等式 $(\sigma_{ij}^{(2)}-\sigma_{ij}^{(1)})d\varepsilon_{ij}^{p} \geq 0$ 不成立，即 Q 只能是在 $\sigma_{ij}^{(2)}$ 处的切平面.

$$\therefore\ d\varepsilon_{ij}^{p} = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \quad (d\lambda \geq 0)$$

2° 证明类似

4.5 增量（率型）本构关系的一般形式.

由正交流动法则 $$\dot{\varepsilon}_{ij}^{p} = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}$$ 和

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{p} = \hat{\varepsilon}_{ij} \langle \hat{g} \rangle$$

可以记 $$\hat{\varepsilon}_{ij} = \bar{V} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \quad (\bar{V} \geq 0)$$

得 $$\dot{\varepsilon}_{ij}^{p} = \bar{V} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \langle \hat{g} \rangle \qquad (1)$$

由本构关系 $$\begin{cases} \dot{\sigma}_{ij} = L_{ijkl}\dot{\varepsilon}_{kl} + \dot{\sigma}_{ij}^{p} \\ \dot{\varepsilon}_{ij} = M_{ijkl}\dot{\sigma}_{kl} + \dot{\varepsilon}_{ij}^{p} \end{cases}$$

和互逆关系 $$M_{ijkl}L_{klpq} = L_{ijkl}M_{klpq} = \frac{1}{2}(\delta_{ip}\delta_{jq} + \delta_{iq}\delta_{jp})$$

得 $\dot{\varepsilon}_{ij} = M_{ijkl} L_{klpq} \dot{\varepsilon}_{pq} + M_{ijkl}\dot{\sigma}^{p}_{kl} + \dot{\varepsilon}^{p}_{ij}$

$$= \frac{1}{2}(\delta_{ip}\delta_{jq}+\delta_{iq}\delta_{jp})\dot{\varepsilon}_{pq} + M_{ijkl}\dot{\sigma}^{p}_{kl} + \dot{\varepsilon}^{p}_{ij}$$

$$= \frac{1}{2}(\dot{\varepsilon}_{ij}+\dot{\varepsilon}_{ji}) + M_{ijkl}\dot{\sigma}^{p}_{kl} + \dot{\varepsilon}^{p}_{ij}$$

$$= \dot{\varepsilon}_{ij} + M_{ijkl}\dot{\sigma}^{p}_{kl} + \dot{\varepsilon}^{p}_{ij}$$

$\therefore \quad \dot{\varepsilon}^{p}_{ij} = -M_{ijkl}\dot{\sigma}^{p}_{kl}$

同理可得 $\dot{\sigma}^{p}_{ij} = -L_{ijkl}\dot{\varepsilon}^{p}_{kl}$

$\therefore \quad \dot{\sigma}^{p}_{ij} = -L_{ijkl}\dot{\varepsilon}^{p}_{kl}$

$$= -\bar{V} L_{ijkl}\frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}}\langle \hat{g}\rangle$$

$$= -\bar{V}\frac{\partial g}{\partial \varepsilon_{ij}}\langle \hat{g}\rangle \qquad (\bar{V}\geq 0) \qquad (2)$$

这说明塑性应力率指向应变空间中加载面 $g=0$ 的内法向。这与正交流动法则正相反。

由 $\phi = 1-\frac{\partial g}{\partial \varepsilon_{ij}}\hat{\varepsilon}_{ij}$ 和 $\hat{\varepsilon}_{ij} = \bar{V}\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}$ 得

$$\phi = 1-\bar{V}\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}\frac{\partial g}{\partial \varepsilon_{ij}} = 1-\bar{V}H$$

其中，$H = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}\frac{\partial g}{\partial \varepsilon_{ij}} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}L_{ijkl}\frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} > 0$

当 $\bar{V}>0$ 时，记 $h=\frac{\phi}{\bar{V}}$，则 $\bar{V}=\frac{1}{H+h}$ (3)

因为 h 与 ϕ 同号，所以 h 也可以用来表征材料硬化特性。

对于弹塑性加载过程 ($\hat{g}>0$)，(2)式可写为

$$\dot{\sigma}^{p}_{ij} = -\bar{V}\frac{\partial g}{\partial \varepsilon_{ij}}\cdot\frac{\partial g}{\partial \varepsilon_{kl}}\dot{\varepsilon}_{kl}$$

$$= -\frac{1}{H+h}\frac{\partial g}{\partial \varepsilon_{ij}}\frac{\partial g}{\partial \varepsilon_{kl}}\dot{\varepsilon}_{kl} \qquad (4)$$

若$\phi \neq 0$，则 $\hat{g} = \frac{\hat{f}}{\phi}$，由(1)式得

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{p} = \bar{V} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\hat{f}}{\phi}$$

$$= \frac{\bar{V}}{\phi} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} \dot{\sigma}_{kl}$$

$$= \frac{1}{h} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} \dot{\sigma}_{kl} \qquad (5)$$

由4.1中的本构关系，代入(4)、(5)得

增量本构关系的一般形式为

$$\begin{cases} \dot{\sigma}_{ij} = \left[L_{ijkl} - \frac{\alpha}{H+h} \frac{\partial g}{\partial \varepsilon_{ij}} \frac{\partial g}{\partial \varepsilon_{kl}} \right] \dot{\varepsilon}_{kl} \\ \dot{\varepsilon}_{ij} = \left[M_{ijkl} + \frac{\alpha}{h} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} \right] \dot{\sigma}_{kl} \quad (h \neq 0) \end{cases}$$

其中 $\alpha = \begin{cases} 1, & \text{弹塑性加载阶段} \\ 0, & \text{弹性状态、卸载或中性变载} \end{cases}$

注：1° 上述第二式不适用于 $h=0$，即理想塑性状态。

理想塑性材料的应力空间中的加载面始终是其初始屈服面。

此时，直接利用 $\dot{\varepsilon}_{ij}^{p} = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}$ 将第二个本构关系写为

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = M_{ijkl} \dot{\sigma}_{kl} + \alpha \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \qquad (\dot{\lambda} \geq 0)$$

4.6 本构关系的一些常用表达式

① 具有Mises屈服条件的理想塑性材料

屈服条件 $f = J_2 - \frac{\sigma_s^2}{3} = 0$

由作业3.1知 $\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial J_2}{\partial \sigma_{ij}} = S_{ij}$

由上一节知，理想塑性状态下，应力率表示的本构关系为

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = M_{ijkl} \dot{\sigma}_{kl} + \alpha \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}$$

代入各向同性张量 $M_{ijkl} = -\frac{\nu}{E} \delta_{ij} \delta_{kl} + \frac{1+\nu}{2E} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})$

得到 $\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \dot{\sigma}_{ij} - \frac{\nu}{E} \dot{\sigma}_{kk} \delta_{ij} + \alpha \dot{\lambda} S_{ij}$

或写为
$$\begin{cases} \dot{e}_{ij} = \frac{1}{2\mu}\dot{S}_{ij} + \alpha\dot{\lambda}S_{ij} \\ \dot{\varepsilon}_{kk} = \frac{1-2\nu}{E}\dot{\sigma}_{kk} \end{cases}$$

这就是 Prandle - Reuss 关系。

在 $E\to\infty$ 时，材料简化为刚塑性模型：

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \alpha\dot{\lambda}S_{ij}$$

称为 Levy - Mises 关系。由此关系可知：

1° 塑性应变率 $\dot{\varepsilon}^p_{ij}$ 的方向可由 S_{ij} 确定，但大小无法确定。

这说明材料屈服后，塑性应变是可以任意增加的，这是理想塑性体的特点。

反过来，若已知 $\dot{\varepsilon}^p_{ij}$，则

$$J_2 = \frac{1}{2}S_{ij}S_{ij} = \frac{\dot{\varepsilon}^p_{ij}\dot{\varepsilon}^p_{ij}}{2\dot{\lambda}^2} = \frac{\sigma_s^2}{3}$$

$\therefore$ $\dot{\lambda} = \sqrt{\frac{3}{2}}\frac{\sqrt{\dot{\varepsilon}^p_{ij}\dot{\varepsilon}^p_{ij}}}{\sigma_s}$，可以确定 $\dot{\lambda}$.

进一步，$S_{ij} = \frac{\dot{\varepsilon}^p_{ij}}{\dot{\lambda}} = \sqrt{\frac{2}{3}}\frac{\sigma_s\dot{\varepsilon}^p_{ij}}{\sqrt{\dot{\varepsilon}^p_{kl}\dot{\varepsilon}^p_{kl}}}$，

$\therefore$ S_{ij} 是 $\dot{\varepsilon}^p_{ij}$ 的零次齐次式，当 $\dot{\varepsilon}^p_{ij}$ 的各分量按比例增长时，

S_{ij} 保持不变.

2° $\mu_{\dot{\varepsilon}^p} = \mu_\sigma$

其中 $\mu_{\dot{\varepsilon}^p}$ 是用塑性应变率的主值定义的 Lode 参数。

$$\mu_{\dot{\varepsilon}^p} = \frac{2\dot{\varepsilon}^p_2 - \dot{\varepsilon}^p_1 - \dot{\varepsilon}^p_3}{\dot{\varepsilon}^p_1 - \dot{\varepsilon}^p_3}$$

这是因为 $\dot{\varepsilon}^p_{ij}$ 与 S_{ij} 的分量间成比例关系。

② 具有Tresca屈服条件的理想塑性材料

屈服曲面由平面

$$\begin{cases} f_1 = \sigma_2 - \sigma_3 - \sigma_s = 0 \\ f_2 = -\sigma_3 + \sigma_1 - \sigma_s = 0 \\ f_3 = \sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_s = 0 \\ f_4 = -\sigma_2 + \sigma_3 - \sigma_s = 0 \\ f_5 = \sigma_3 - \sigma_1 - \sigma_s = 0 \\ f_6 = -\sigma_1 + \sigma_2 - \sigma_s = 0 \end{cases}$$

围成。

主塑性应变率的确定：

当应力点位于 $f_1=0$ 上时，

$$\dot{\varepsilon}_i^p = \dot{\lambda}_1 \frac{\partial f_1}{\partial \sigma_i} \quad (i=1,2,3)$$

或 $(\dot{\varepsilon}_1^p, \dot{\varepsilon}_2^p, \dot{\varepsilon}_3^p) = (0, \dot{\lambda}_1, -\dot{\lambda}_1) \quad (\dot{\lambda}_1 \geq 0)$

当应力点位于 $f_1=0$ 与 $f_2=0$ 的交线上时，

$$\dot{\varepsilon}_i^p = \dot{\lambda}_1 \frac{\partial f_1}{\partial \sigma_i} + \dot{\lambda}_2 \frac{\partial f_2}{\partial \sigma_i} \quad (i=1,2,3)$$

或 $(\dot{\varepsilon}_1^p, \dot{\varepsilon}_2^p, \dot{\varepsilon}_3^p) = (\dot{\lambda}_2, \dot{\lambda}_1, -\dot{\lambda}_1 - \dot{\lambda}_2)$

$(\dot{\lambda}_1, \dot{\lambda}_2 \geq 0)$

③ 具有Mises加载条件的等向强化材料.

加载条件：$f = \bar{\sigma} - \psi(\xi) = 0$

其中内变量 ξ 的增量可取为等效塑性应变增量：

$$\dot{\xi} = \dot{\bar{\varepsilon}}^p = \left(\frac{2}{3} \dot{\varepsilon}_{kl}^p \dot{\varepsilon}_{kl}^p\right)^{\frac{1}{2}}.$$

本构关系：由 $\bar{\sigma}^2 = 3J_2$ 得

$$2\bar{\sigma} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_{ij}} = 3 \frac{\partial J_2}{\partial \sigma_{ij}} = 3S_{ij}$$

$$\therefore \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{3S_{ij}}{2\bar{\sigma}}$$

$$\because \dot{\varepsilon}_{ij}^p = \frac{1}{h} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} \dot{\sigma}_{kl}$$ 和

$$\dot{\bar{\sigma}} = \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij}$$

$$\therefore\ \dot{\varepsilon}_{ij}^{p} = \frac{3}{2h}\frac{\dot{\bar{\sigma}}}{\bar{\sigma}} S_{ij}$$

这就是本构关系。

参数h的确定：

由一致性条件

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}\dot{\sigma}_{ij} + \frac{\partial f}{\partial \xi}\dot{\xi} = 0$$

得 $\dot{\bar{\sigma}} = \frac{d\psi}{d\xi}\dot{\xi} = \psi' \dot{\bar{\varepsilon}}^{p}$

代入本构关系得

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{p} = \frac{3}{2h}\frac{\psi' \dot{\bar{\varepsilon}}^{p} S_{ij}}{\bar{\sigma}}$$

$$\therefore\ (\dot{\bar{\varepsilon}}^{p})^2 = \left(\frac{2}{3}\dot{\varepsilon}_{kl}^{p}\dot{\varepsilon}_{kl}^{p}\right)$$

$$= \frac{2}{3}\left(\frac{3}{2h}\right)^2 \psi'^2 \frac{S_{ij}S_{ij}}{\bar{\sigma}^2}(\dot{\bar{\varepsilon}}^{p})^2$$

$$= \left(\frac{\psi'}{h}\right)^2 \left(\frac{3S_{ij}S_{ij}}{2\bar{\sigma}^2}\right)(\dot{\bar{\varepsilon}}^{p})^2$$

$$= \left(\frac{\psi'}{h}\right)^2 (\dot{\bar{\varepsilon}}^{p})^2$$

$\therefore\ \psi' = h$，可以确定参数h.

注：在简单拉伸时，$\bar{\sigma}=\sigma$，$\bar{\varepsilon}^{p} = \varepsilon^{p}$，所以 $\xi = \varepsilon^{p}$

加载条件化为 $\sigma = \psi(\varepsilon^{p})$.