ch. 4 本构关系

4.1 广义胡克定律.

从本构关系 $\sigma_{ij} = f_{ij}(\varepsilon_{kl})$ （参见4.2）

展开 $\sigma_{ij} = (f_{ij})_0 + \left(\dfrac{\partial f_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}}\right)_0 \varepsilon_{kl} + o(\varepsilon_{kl})$

略去高阶量，并假定无初应力，

得到广义胡克定律

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl}\,\varepsilon_{kl}$$

其中 E_{ijkl} 为弹性系数.

4.2 热力学定律.（基本本构关系）

由热力学第一定律

$$dV_I + dE_k = dW + dQ$$

V_I — 内能

动能 $E_k = \frac{1}{2}\iiint_\Omega \rho \dot{u}_i \dot{u}_i \, d\Omega$

则 $\dfrac{dE_k}{dt} = \iiint_\Omega \rho \dot{u}_i \ddot{u}_i \, d\Omega$ （假设 $\dfrac{d\rho}{dt} = 0$）

体力功 $dW_1 = \iiint_\Omega f_i du_i \, d\Omega$

面力功 $dW_2 = \iint_{\partial\Omega} t_i du_i dS = \iint_{\partial\Omega} (\vec{n}\cdot\vec{T})\cdot d\vec{u}\, dS = \iiint_\Omega \nabla\cdot(\vec{T}\cdot d\vec{u})\, d\Omega$

$= \iiint_\Omega (\nabla\cdot\vec{T})\cdot d\vec{u}\, d\Omega + \iiint_\Omega \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}\, d\Omega$ （运用张量运算）

由平衡方程 $\nabla\cdot\vec{T} + \vec{f} = \rho\ddot{\vec{u}}$ 得

总功 $dW = dW_1 + dW_2 = \iiint_\Omega \rho\ddot{\vec{u}} d\vec{u}\, d\Omega + \iiint_\Omega \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}\, d\Omega$

① 对绝热过程, $dQ = 0$，则

$$dV_I = \iiint_\Omega \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}\, d\Omega$$

记 U 为内能密度，则

$$V_I = \iiint_\Omega U\, d\Omega \quad , \quad dV_I = \iiint_\Omega dU\, d\Omega$$

$\therefore \quad dU = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}$

假设 U 仅是 ε_{ij} 和 S 的函数，且弹性体的绝热过程可逆。

由 $dS = \dfrac{dQ}{T}$ 得 $dS = 0$

$\therefore$ 原式为 U 的全微分，且

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ij}}$$

② 对等温过程， $dT=0$

因为弹性体的等温过程可逆，由热力学第二定律

$$dS = \frac{dQ}{T}$$

$\therefore \quad dQ = T\,dS = d(TS)$

定义亥姆霍兹自由能密度 $F = U - T\cdot s$

则 $\quad dV_I - dQ = \iiint_\Omega \sigma_{ij}\, d\varepsilon_{ij}\, d\Omega$

$$V_I - Q = (V_I - TS)$$
$$= \iiint_\Omega F\, d\Omega$$

$\therefore \quad dF = \sigma_{ij}\, d\varepsilon_{ij}$

假设 F 仅与 T 和 ε 有关，则因 $dT=0$，所以上式为 F 的全微分

$\therefore \quad \sigma_{ij} = \dfrac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}}$

总之，$\sigma_{ij} = \dfrac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}}$，W为应变能密度.

4.3 各向异性弹性体.

① E_{ijks} 是完全对称的，即 $E_{ijks} = E_{jiks} = E_{ijsk} = E_{ksij}$

$\cancel{\because \sigma_{ij} = \sigma_{ji}, \quad \gamma_{ks} = \gamma_{sk}}$

$\cancel{\therefore E_{ijks}\gamma_{ks} = E_{jiks}\gamma_{ks}}$

$\cancel{\therefore \gamma_{ks}}$

"证明"：$\because \varepsilon_{ks} = \varepsilon_{sk}$

$\therefore$ 可以定义 $E'_{ijkl} = E'_{ijlk} = \frac{1}{2}(E_{ijkl} + E_{ijlk})$

使本构关系 $\sigma_{ij} = E'_{ijkl}\varepsilon_{kl}$

与原来的本构关系 $\sigma_{ij} = E_{ijkl}\varepsilon_{kl}$ 等价.

现假定已经有了如上调整，则

$$E_{ijkl} = E_{ijlk}$$

又 $\because \sigma_{ij} = \sigma_{ji}$

$\therefore \quad E_{ijks}\varepsilon_{ks} = E_{jiks}\varepsilon_{ks}$

且 $E_{ijsk}\varepsilon_{sk} = E_{jisk}\varepsilon_{sk}$

由 $(\varepsilon_{ks} + \varepsilon_{sk})$ 的任意性.

$\therefore \quad E_{ijks} + E_{ijsk} = E_{jiks} + E_{jisk}$

$\because \quad E_{ijks} = E_{ijsk}$

$\therefore \quad E_{ijks} = E_{jiks}$

∵ $E_{ijks} = \dfrac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{ks}} = \dfrac{\partial}{\partial \varepsilon_{ks}}\left(\dfrac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}}\right)$

$E_{ksij} = \dfrac{\partial \sigma_{ks}}{\partial \varepsilon_{ij}} = \dfrac{\partial}{\partial \varepsilon_{ij}}\left(\dfrac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ks}}\right)$

∴ $E_{ijks} = E_{ksij}$

综合∴ E_{ijks} 完全对称

注：这里的对称性有一部分是被构造的。

② 广义Hooke定律的矩阵形式

由①中的对称性分析，广义胡克定律可记为

$$
\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \hline \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix}
=
\left(\begin{array}{ccc|ccc}
E_{1111} & E_{1122} & E_{1133} & 2E_{1123} & 2E_{1131} & 2E_{1112} \\
 & E_{2222} & E_{2233} & 2E_{2223} & 2E_{2231} & 2E_{2212} \\
 & & E_{3333} & 2E_{3323} & 2E_{3331} & 2E_{3312} \\
\hline
 & & & 2E_{2323} & 2E_{2331} & 2E_{2312} \\
 & \text{对称} & & & 2E_{3131} & 2E_{3112} \\
 & & & & & 2E_{1212}
\end{array}\right)
\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \hline \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} \\ \varepsilon_{12} \end{pmatrix}
$$

或记为规范记法

$$
\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \hline \sqrt{2}\sigma_{23} \\ \sqrt{2}\sigma_{31} \\ \sqrt{2}\sigma_{12} \end{pmatrix}
=
\left(\begin{array}{ccc|ccc}
E_{1111} & E_{1122} & E_{1133} & \sqrt{2}E_{1123} & \sqrt{2}E_{1131} & \sqrt{2}E_{1112} \\
 & E_{2222} & E_{2233} & \sqrt{2}E_{2223} & \sqrt{2}E_{2231} & \sqrt{2}E_{2212} \\
 & & E_{3333} & \sqrt{2}E_{3323} & \sqrt{2}E_{3331} & \sqrt{2}E_{3312} \\
\hline
 & & & 2E_{2323} & 2E_{2331} & 2E_{2312} \\
 & \text{对称} & & & 2E_{3131} & 2E_{3112} \\
 & & & & & 2E_{1212}
\end{array}\right)
\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \sqrt{2}\varepsilon_{23} \\ \sqrt{2}\varepsilon_{31} \\ \sqrt{2}\varepsilon_{12} \end{pmatrix}
$$

上述刚度矩阵有21个弹性常数。

③ 具有一个对称面的弹性材料

设 $z=0$ 为对称面，则刚度矩阵在坐标变换 $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$ 下不改变形式。

则 $\sigma_{11}' = \sigma_{11}$，$\sigma_{22}' = \sigma_{22}$，$\sigma_{33}' = \sigma_{33}$

$\sigma_{12}' = \sigma_{12}$，$\sigma_{23}' = -\sigma_{23}$，$\sigma_{31}' = -\sigma_{31}$

$\varepsilon_{11}' = \varepsilon_{11}$，$\varepsilon_{22}' = \varepsilon_{22}$，$\varepsilon_{33}' = \varepsilon_{33}$

$\varepsilon_{12}' = \varepsilon_{12}$，$\varepsilon_{23}' = -\varepsilon_{23}$，$\varepsilon_{31}' = -\varepsilon_{31}$

代入②中方程，比较矩阵系数，得刚度矩阵

$$
D = \left(\begin{array}{ccc|ccc}
E_{1111} & E_{1122} & E_{1133} & 0 & 0 & \sqrt{2}E_{1112} \\
 & E_{2222} & E_{2233} & 0 & 0 & \sqrt{2}E_{2212} \\
 & & E_{3333} & 0 & 0 & \sqrt{2}E_{3312} \\
\hline
 & & & 2E_{2323} & 2E_{2331} & 0 \\
 & \text{对称} & & & 2E_{3131} & 0 \\
 & & & & & 2E_{1212}
\end{array}\right)
$$

④具有两个对称面的弹性材料（正交各向异性材料）

同理可推出刚度矩阵：

$$D=\begin{pmatrix} E_{1111} & E_{1122} & E_{1133} & & & \\ E_{2211} & E_{2222} & E_{2233} & & 0 & \\ E_{3311} & E_{3322} & E_{3333} & & & \\ & & & 2E_{2323} & & \\ & 0 & & & 2E_{3131} & \\ & & & & & 2E_{1212} \end{pmatrix}$$

可以看出，有两个对称面 $\Leftrightarrow$ 有三个对称面。

上述刚度矩阵有9个弹性常数。

⑤（横观各向同性）有一根对称轴的弹性材料

设 z轴为对称轴。

1° 转180°，变换矩阵 $C=\begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$

$E'_{1123}=C_{11}C_{11}C_{22}C_{33}E_{1123}=-E_{1123}$

$\because E'_{1123}=E_{1123}$

$\therefore E_{1123}=0$. 同理、$E_{1131}=E_{2223}=E_{2231}=E_{3323}=E_{3331}=0$

$E_{2312}=E_{3112}=0$

2° 转90°，变换矩阵 $C=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$E'_{3312}=-E_{3321}=-E_{3312}$

$\because E'_{3312}=E_{3312}$

$\therefore E_{3312}=0$

同理 $E_{2331}=0$，$E_{1112}=-E_{2212}$，$E_{1111}=E_{2222}$，

$E_{2233}=E_{1133}$，$E_{3131}=E_{2323}$

3° 转45°，变换矩阵 $C=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$E'_{1111}=\frac{1}{4}(E_{1111}+\underline{E_{1112}+E_{1121}+E_{1211}+E_{2111}}+E_{1122}+E_{2211}+E_{1212}+E_{2121}+E_{1221}+E_{2112}+\underline{E_{2221}+E_{2212}+E_{2122}+E_{1222}}+E_{2222})$$

其中画线部分和为0.（$E_{1112}=-E_{2212}$）

所以 $E_{1111}=E_{1122}+2E_{1212}$

同理 $3E_{1112}=E_{2212}$，所以 $E_{1112}=E_{2212}=0$.

综合：横观各向同性材料的刚度矩阵

$$D=\begin{pmatrix} \underline{E_{1111}} & \underline{E_{1122}} & \underline{E_{1133}} & & & \\ E_{2211} & E_{1111} & E_{1133} & & 0 & \\ E_{3311} & E_{3311} & \underline{E_{3333}} & & & \\ & & & \underline{2E_{2323}} & & \\ & 0 & & & 2E_{2323} & \\ & & & & & E_{1111}-E_{1122} \end{pmatrix}$$

其中有5个弹性常数，如画线部分。

⑥ 有两根对称轴的弹性材料（各向同性材料）

可以看出，有两个对称轴 $\Longleftrightarrow$ 各向同性

所以，有两个对称轴 $\Longleftrightarrow$ 有无数个对称轴.

4.4 各向同性弹性体

① 从4.3⑥可以得出，当然也可以按教材4.2节的张量坐标变换的推导，得出各向同性弹性体的广义Hooke定律：

$$\vec{T}=\lambda J(\vec{\Gamma})\vec{I}+2\mu\vec{\Gamma}$$ ，其中λ,μ称为拉梅常数。

剪切模量：μ的别称。

均匀弹性体：各点弹性常数相同的弹性体。

其记法：1°
$$\begin{cases}\vec{T}=\lambda\theta\vec{I}+2\mu\vec{\Gamma}, & \theta=J(\vec{\Gamma})\\ \vec{\Gamma}=\frac{1}{E}[(1+\nu)\vec{T}-\nu\Theta\vec{I}], & \Theta=J(\vec{T})\end{cases}$$

其中E为杨氏模量，ν为泊松比，且 $\begin{cases}\mu=\dfrac{E}{2(1+\nu)}\\ \lambda=\dfrac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\end{cases}$ （写成分量形式推导）.

$$\boxed{\begin{array}{c}\begin{cases}E=\dfrac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}\\ \nu=\dfrac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}\end{cases}\\ \hline G=\dfrac{E}{2(1+\nu)}=\mu\end{array}}$$

2°
$$\begin{cases}\sigma_{ij}=\lambda\theta\delta_{ij}+2\mu\varepsilon_{ij}\\ \varepsilon_{ij}=\frac{1}{E}[(1+\nu)\sigma_{ij}-\nu\Theta\delta_{ij}]\end{cases}$$

② 若把本构关系写成矩阵形式：$\begin{cases}\vec{\sigma}=D\vec{\varepsilon}\\ \vec{\varepsilon}=D^{-1}\vec{\sigma}\end{cases}$ ，其中D和D^{-1}分别称为刚度矩阵、柔度矩阵，则弹性体的应变能：

$$W=\frac{1}{2}\vec{\varepsilon}^{T}D\vec{\varepsilon}=\frac{1}{2}\vec{\sigma}^{T}D^{-1}\vec{\sigma}$$

因为应变能正定，所以 D 和 D^{-1} 也正定.

得到弹性常数的限定条件：

$$\begin{cases} \mu > 0 \\ 3\lambda + 2\mu > 0 \end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases} E > 0 \\ -1 < \nu < \frac{1}{2} \end{cases}$$

③ 实验测量

1° 拉伸实验.

已知 $\sigma_z = T$，$\sigma_x = \sigma_y = \tau_{yz} = \tau_{zx} = \tau_{xy} = 0$

测定 $\varepsilon_x = \varepsilon_y = -\frac{\nu}{E} T$，$\varepsilon_z = \frac{1}{E} T$

可求得 E, ν.

2° 纯剪实验

已知 $\tau_{xy} = \tau$，$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$

测定 $\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2\mu} \tau$，

可求得 μ.

3° 均匀压缩实验

已知 $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -p$，$\tau_{yz} = \tau_{zx} = \tau_{xy} = 0$

测定 $\theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{\Theta}{3\lambda + 2\mu} = \frac{-p}{K_0}$，其中压缩模量

$$K_0 = \frac{3\lambda + 2\mu}{3} = \frac{E}{3(1-2\nu)}$$

可求得 K_0.

注：
$$D = \begin{pmatrix} \lambda+2\mu & \lambda & \lambda & & & \\ \lambda & \lambda+2\mu & \lambda & & 0 & \\ \lambda & \lambda & \lambda+2\mu & & & \\ & & & 2\mu & & \\ & 0 & & & 2\mu & \\ & & & & & 2\mu \end{pmatrix}$$

$$D^{-1} = \frac{1}{E} \begin{pmatrix} 1 & -\nu & -\nu & & & \\ -\nu & 1 & -\nu & & 0 & \\ -\nu & -\nu & 1 & & & \\ & & & 1+\nu & & \\ & 0 & & & 1+\nu & \\ & & & & & 1+\nu \end{pmatrix}$$