解对参数的连续性定理（局部）（定理5.1）

设初值问题 (E_λ)：$\begin{cases} \dfrac{d\vec{y}}{dx} = \vec{f}(x,\vec{y},\vec{\lambda}) \\ \vec{y}(0) = \vec{0} \end{cases}$，其中 $\vec{\lambda}$ 是参数向量。

若 $\vec{f}$ 在闭区域 $G: |x| \le a, \|\vec{y}\| \le b, \|\vec{\lambda}-\vec{\lambda}_0\| \le c$ 上连续，且对 $\vec{y}$ 满足李氏条件

$$\|\vec{f}(x,\vec{y}_1,\vec{\lambda}) - \vec{f}(x,\vec{y}_2,\vec{\lambda})\| \le L\|\vec{y}_1-\vec{y}_2\|,$$ （李氏常数 L 对 $\vec{\lambda}$ 一致）。

则 (E_λ) 的解 $\vec{y}=\vec{\varphi}(x,\vec{\lambda})$ 在闭区域 $D: |x| \le h, \|\vec{\lambda}-\vec{\lambda}_0\| \le c$ 上连续，其中

$h = \min\{a, \frac{b}{M}\}$，$M > \max\limits_{(x,\vec{y},\vec{\lambda})\in G} \|\vec{f}(x,\vec{y},\vec{\lambda})\|$。

文字表述：标准形式带参量常微分方程的初值问题，如果它的右端函数：

①在一个闭区域内连续；②在同一区域内对 $\vec{y}$ 李氏，有对参量一致的李氏常数，

则原问题的解作为自变量和参量的函数在一个闭子区域上连续。

证明：1° 初值问题 (E_λ) 的解 $\Longleftrightarrow$ 积分方程 $\vec{y} = \int_0^x \vec{f}(x,\vec{y},\vec{\lambda})\,dx$ 的解。$((x,\vec{\lambda}) \in D)$

① 设 $\vec{y}=\vec{y}(x,\vec{\lambda})$，$((x,\vec{\lambda})\in D)$ 是 (E_λ) 的解，则 $\frac{d\vec{y}}{dx} = \vec{f}(x,\vec{y}(x,\vec{\lambda}),\vec{\lambda})$

积分得
$$\vec{y}(x,\vec{\lambda}) = \vec{y}(0,\vec{\lambda}) + \int_0^x \vec{f}(x,\vec{y}(x,\vec{\lambda}),\vec{\lambda})\,dx$$
$$= \int_0^x \vec{f}(x,\vec{y}(x,\vec{\lambda}),\vec{\lambda})\,dx$$

∴ $\vec{y}(x,\vec{\lambda})$ 是积分方程的解。

② 又设 $\vec{y}=\vec{y}(x,\vec{\lambda})$，$((x,\vec{\lambda})\in D)$ 是积分方程的解，则 $\vec{y}(x,\vec{\lambda}) = \int_0^x \vec{f}(x,\vec{y}(x,\vec{\lambda}),\vec{\lambda})\,dx$

求导得
$$\frac{d\vec{y}}{dx} = \vec{f}(x,\vec{y}(x,\vec{\lambda}),\vec{\lambda})$$

又由初值 $\vec{y}(0,\vec{\lambda}) = \vec{0}$

∴ $\vec{y}(x,\vec{\lambda})$ 是 (E_λ) 的解.

2° 皮卡序列 $\begin{cases} \vec{y}_0(x,\vec{\lambda}) = \vec{0} \\ \vec{y}_{n+1}(x,\vec{\lambda}) = \int_0^x \vec{f}(x,\vec{y}_n(x,\vec{\lambda}),\vec{\lambda})\,dx \quad (n=0,1,2,\cdots) \end{cases}$ $((x,\vec{\lambda})\in D)$

在区域 D 上连续，且满足不等式 $\|\vec{y}_n(x,\vec{\lambda})\| \le M|x|$ $(n=0,1,2,\cdots)$。

① $\vec{y}_0(x,\vec{\lambda}) = \vec{0}$ 显然在区域 D 上连续，且满足 $\|\vec{y}_0(x,\vec{\lambda})\| \le M|x|$。

② 假设 $\vec{y}_k(x,\vec{\lambda})$ 在区域 D 上连续，且满足 $\|\vec{y}_k(x,\vec{\lambda})\| \le M|x|$，

则 $\|\vec{y}_k(x,\vec{\lambda})\| \le M|x| \le Mh \le b$

由条件知，$\vec{f}(x,\vec{y}_k(x,\vec{\lambda}),\vec{\lambda})$ 在区域 D 上连续.

$\therefore \vec{y}_{k+1}(x,\vec{\lambda}) = \int_0^x \vec{f}(x,\vec{y}_k(x,\vec{\lambda}),\vec{\lambda})\,dx$ 在区域 D 上连续

又有 $\|\vec{y}_{k+1}(x,\vec{\lambda})\| = \|\int_0^x \vec{f}(x,\vec{y}_k(x,\vec{\lambda}),\vec{\lambda})\,dx\|$

$$\leq \left|\int_0^x \|\vec{f}(x,\vec{y}_k(x,\vec{\lambda}),\vec{\lambda})\|dx\right|$$

$$\leq M|x|$$

③ 综合①、②，由数学归纳法知，结论 $2°$ 成立。

$3°$ 皮卡序列 $\vec{y}_n(x,\vec{\lambda})$ 在区域 D 上一致收敛到积分方程的解.

① 皮卡序列 $\vec{y}_n(x,\vec{\lambda})$ 在区域 D 上一致收敛。

$1'$ 结论① $\Leftrightarrow$ 级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\vec{y}_{n+1}(x,\vec{\lambda}) - \vec{y}_n(x,\vec{\lambda})\right)$ 在区域 D 上一致收敛。

$2'$ 级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\left[\vec{y}_{n+1}(x,\vec{\lambda}) - \vec{y}_n(x,\vec{\lambda})\right]$ 在区域 D 上一致收敛。

$1''$ $\|\vec{y}_1(x,\vec{\lambda}) - \vec{y}_0(x,\vec{\lambda})\| \leq M|x|$ 在区域 D 上成立

$2''$ 假设 $\|\vec{y}_{k+1}(x,\vec{\lambda}) - \vec{y}_k(x,\vec{\lambda})\| \leq \frac{M}{L}\frac{(L|x|)^{k+1}}{(k+1)!}$ 在区域 D 上成立，

则 $\|\vec{y}_{k+2}(x,\vec{\lambda}) - \vec{y}_{k+1}(x,\vec{\lambda})\| = \|\int_0^x \left(\vec{f}(x,\vec{y}_{k+1}(x,\vec{\lambda}),\vec{\lambda}) - \vec{f}(x,\vec{y}_k(x,\vec{\lambda}),\vec{\lambda})\right)dx\|$

$$\leq \left|\int_0^x \|\vec{f}(x,\vec{y}_{k+1}(x,\vec{\lambda}),\vec{\lambda}) - \vec{f}(x,\vec{y}_k(x,\vec{\lambda}),\vec{\lambda})\|\,dx\right|$$

$$\leq \left|\int_0^x L\|\vec{y}_{k+1}(x,\vec{\lambda}) - \vec{y}_k(x,\vec{\lambda})\|\,dx\right|$$

$$\leq \left|\int_0^x M\frac{(L|x|)^{k+1}}{(k+1)!}\,dx\right|$$

$$= \frac{M}{L}\frac{(L|x|)^{k+2}}{(k+2)!}$$

$3''$ 综合 $1''$, $2''$, 由数学归纳法知，

$\|\vec{y}_{k+1}(x,\vec{\lambda}) - \vec{y}_k(x,\vec{\lambda})\| \leq \frac{M}{L}\frac{(L|x|)^{k+1}}{(k+1)!}$ 在区域 D 上成立. $(n=0,1,2,\cdots)$

$\therefore$ 结论 $2'$ 成立

$\therefore$ 结论①成立.

② 皮卡序列 $\vec{y}_n(x,\vec{\lambda})$ 的极限函数 $\vec{\varphi}(x,\vec{\lambda}) = \lim_{n\to\infty}\vec{y}_n(x,\vec{\lambda})$ $((x,\vec{\lambda})\in D)$ 是积分方程的解。

$\because$ 皮卡序列 $\vec{y}_n(x,\vec{\lambda})$ 在区域 D 上连续，且一致收敛，

$\therefore$ 极限函数 $\vec{\varphi}(x,\vec{\lambda})$ 在区域 D 上连续。

$$
\begin{aligned}
\therefore \vec{\varphi}(x,\vec{\lambda}) &= \lim_{n\to\infty} \vec{y}_{n+1}(x,\vec{\lambda}) \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_0^x \vec{f}(x,\vec{y}_n(x,\vec{\lambda}),\vec{\lambda})\,dx \\
&= \int_0^x \lim_{n\to\infty} \vec{f}(x,\vec{y}_n(x,\vec{\lambda}),\vec{\lambda})\,dx \quad \left(\because \vec{f}(x,\vec{y}_n(x,\vec{\lambda}),\vec{\lambda}) \text{ 一致收敛。}\right) \\
&= \int_0^x \vec{f}(x,\lim_{n\to\infty}\vec{y}_n(x,\vec{\lambda}),\vec{\lambda})\,dx \quad \left(\because \vec{f}(x,\vec{y},\vec{\lambda}) \text{ 连续}\right) \\
&= \int_0^x \vec{f}(x,\vec{\varphi}(x,\vec{\lambda})\vec{\lambda})\,dx \quad \left((x,\vec{\lambda})\in D\right)
\end{aligned}
$$

$\therefore$ 结论②成立.

$\therefore$ $\vec{\varphi}(x,\vec{\lambda})$ 是 (E_λ) 的解，且它在区域 D 上连续。由皮卡存在唯一性定理知，$\vec{\varphi}(x,\vec{\lambda})$ 是 (E_λ) 的唯一解。

解对初值的连续性定理（局部）（定理5.1推论）

设初值问题 $\begin{cases} \dfrac{d\vec{y}}{dx} = \vec{f}(x,\vec{y}) \\ \vec{y}(x_0) = \vec{\eta} \end{cases}$，其中 $\vec{f}(x,\vec{y})$ 在闭区域 R：$|x-x_0| \le a$，$\|\vec{y}-\vec{y}_0\| \le b$

上连续，且 $\vec{f}$ 对 $\vec{y}$ 满足李氏条件。

则初值问题的解 $\vec{y} = \vec{\varphi}(x,\vec{\eta})$ 在闭区域 Q：$|x-x_0| \le \frac{h}{2}$，$\|\vec{\eta}-\vec{y}_0\| \le \frac{b}{2}$ 上是连续的，其中 $h = \min\{a, \frac{b}{M}\}$，$M > \max\limits_{(x,\vec{y})\in R} \|\vec{f}(x,\vec{y})\|$。

文字表述：标准形式常微分方程的初值问题，如果它的右端函数：

①在一个闭区域内连续；②在同一区域内对 $\vec{y}$ 李氏，

则原问题的解作为自变量和初值 $\vec{y}(x_0)$ 的函数在一个闭子区域上连续。

证明：

1° 定义函数 $\vec{g}(x,\vec{z},\vec{\eta}) = \vec{f}(x+x_0, \vec{z}+\vec{\eta})$

则原初值问题等价于初值问题 (E_λ)：$\begin{cases} \dfrac{d\vec{z}}{dx} = \vec{g}(x,\vec{z},\vec{\eta}) \\ \vec{z}(0) = \vec{0} \end{cases}$

2° 则 $\vec{g}(x,\vec{z},\vec{\eta})$ 在闭区域 G：$|x| \le \frac{a}{2}$，$\|\vec{z}\| \le \frac{b}{2}$，$\|\vec{\eta}-\vec{y}_0\| \le \frac{b}{2}$ 上时，

$|(x+x_0)-x_0| \le \frac{a}{2}$；$\|(\vec{z}+\vec{\eta}) - \vec{y}_0\| \le \|\vec{z}\| + \|\vec{\eta}-\vec{y}_0\| \le b$

即 $(x+x_0, \vec{z}+\vec{\eta}) \in R$

3° $\because \vec{f}(x,\vec{y})$ 在 R 上连续

$\therefore \vec{g}(x,\vec{z},\vec{\eta})$ 在 G 上连续。

4° $\because \vec{f}(x,\vec{y})$ 在 R 上对 $\vec{y}$ 李氏

$$\therefore \|\vec{g}(x,\vec{z}_1,\vec{\eta}) - \vec{g}(x,\vec{z}_2,\vec{\eta})\| = \|\vec{f}(x+x_0,\vec{z}_1+\vec{\eta}) - \vec{f}(x+x_0,\vec{z}_2+\vec{\eta})\|$$
$$\le L\|(\vec{z}_1+\vec{\eta}) - (\vec{z}_2+\vec{\eta})\|$$
$$= L\|\vec{z}_1-\vec{z}_2\|$$

在区域 G 上成立，其中李氏常数对 $\vec{\eta}$ 一致。

由解对参数的连续性定理，初值问题 (E_λ) 的解 $\vec{z} = \vec{\psi}(x,\vec{\eta})$ 在闭区域 D：$|x| \le \frac{h}{2}$，$\|\vec{\eta}-\vec{y}_0\| \le \frac{b}{2}$ 上连续，其中 $\frac{h}{2} = \min\{\frac{a}{2}, \frac{b}{2M}\}$，$M > \max\limits_{(x,\vec{y})\in R} \|\vec{f}(x,\vec{y})\| \ge \max\limits_{(x,\vec{z},\vec{\eta})\in G} \|\vec{g}(x,\vec{z},\vec{\eta})\|$。

$\because (E_\lambda)$ 与原初值问题等价，记对应原初值问题的解为 $\vec{y} = \vec{\varphi}(x,\vec{\eta})$

$\therefore$ 原初值问题的解 $\vec{y} = \vec{\varphi}(x,\vec{\eta})$ 在闭区域 Q：$|x-x_0| \le \frac{h}{2}$，$\|\vec{\eta}-\vec{y}_0\| \le \frac{b}{2}$ 上连续，其中 $h = \min\{a, \frac{b}{M}\}$，$M > \max\limits_{(x,\vec{y})\in R} \|\vec{f}(x,\vec{y})\|$。

注脚：1° 积分曲线族在常点附近的"局部拉直"：

考虑变换 T：$x=x$，$\vec{y}=\vec{\varphi}(x,\vec{\eta})$，这是 Q 到 $T(Q)\subset R$ 的变换。

根据解的唯一性，只要 $\vec{\eta}_1\neq\vec{\eta}_2$，则 $\vec{\varphi}(x,\vec{\eta}_1)\neq\vec{\varphi}(x,\vec{\eta}_2)$。

∴ T 是一一映射。

∴ T 是一个拓扑变换。

∴ 对 $\forall\vec{\eta}$，$\|\vec{\eta}-\vec{y}_0\|\le\frac{b}{2}$，变换 T 把 Q 内直线段

$L_{\vec{\eta}}$：$|x-x_0|\le\frac{h}{2}$，$\vec{\eta}=\vec{\eta}$

变成积分曲线 $\Gamma_{\vec{\eta}}$：$|x-x_0|\le\frac{h}{2}$，$\vec{y}=\vec{\varphi}(x,\vec{\eta})$.

∴ 逆变换 T^{-1} 把微分方程在 $(x_0,\vec{y}_0)$ 邻域内的积分曲线族 $\Gamma_{\vec{\eta}}$ 拉直了。

解对初值的连续性定理(全局) (定理5.2)

设微分方程 $\frac{d\vec{y}}{dx}=\vec{f}(x,\vec{y})$，其中 $\vec{f}(x,\vec{y})$ 在开区域 G 上连续，且对 $\vec{y}$ 局部李氏。

若 $\vec{y}=\vec{\xi}(x)$ 是一个解，其存在区间为 J，区间 $[a,b]$ 是 J 内任一个有界闭区间，则存在闭区域 $\bar{D}_\delta$：$a\le x_0\le b$，$\|\vec{y}_0-\vec{\xi}(x_0)\|\le\delta$，($\delta>0$)，使得柯西问题(E)：

$$\begin{cases}\frac{d\vec{y}}{dx}=\vec{f}(x,\vec{y})\\ \vec{y}(x_0)=\vec{y}_0\end{cases}\quad\left((x_0,\vec{y}_0)\in\bar{D}_\delta\right)$$

其解 $\vec{y}=\vec{\varphi}(x;x_0,\vec{y}_0)$ 至少在 $x\in[a,b]$ 上存在，且在闭区域 $D_\delta:[a,b]\times\bar{D}_\delta$ 上是连续的。

文字表述：标准形式常微分方程，如果它的右端函数：
①在一个开区域上连续；②在同一区域内对 $\vec{y}$ 局部李氏，
则取原方程任一有限长的积分曲线段，从其附近一闭"管状"邻域内出发的积分曲线在整个闭区间上存在，且随自变量和初值连续变化。

证明：1° 初值问题(E)的解 $\Longleftrightarrow$ 积分方程 $\vec{y}=\vec{y}_0+\int_{x_0}^{x}\vec{f}(x,\vec{y})\,dx$ 的解. $((x;x_0,\vec{y}_0)\in D_\delta)$

2° 皮卡序列
$$\begin{cases}\vec{\varphi}_0(x;x_0,\vec{y}_0)=\vec{y}_0+\vec{\xi}(x)-\vec{\xi}(x_0)\\ \vec{\varphi}_{n+1}(x;x_0,\vec{y}_0)=\vec{y}_0+\int_{x_0}^{x}\vec{f}(x,\vec{\varphi}_n(x;x_0,\vec{y}_0))\,dx\end{cases}\quad\begin{matrix}((x;x_0,\vec{y}_0)\in D_\delta)\\ (n=0,1,2,\cdots)\end{matrix}$$

在区域 D_δ 上连续，且满足不等式 $\|\vec{\varphi}_n(x;x_0,\vec{y}_0)-\vec{\xi}(x)\|<\sigma$，和 $\|\vec{\varphi}_{n+1}-\vec{\varphi}_n\|\le\frac{(L|x-x_0|)^{n+1}}{(n+1)!}\|\vec{y}_0-\vec{\xi}(x_0)\|$

① ∵ 积分曲线段 $\Gamma=\{(x,\vec{y})\mid \vec{y}=\vec{\xi}(x),\ x\in[a,b]\}$ 是 G 内的有界闭集，由数学分析中的有限覆盖定理，$\exists\sigma>0$，使 Γ 附近的闭"管状"邻域

$$\Sigma_\sigma:\ a\le x\le b,\ \|\vec{y}-\vec{\xi}(x)\|\le\sigma$$，满足 $\Sigma_\sigma\subset G$

∴ $\vec{f}(x,\vec{y})$ 在闭区域 Σ_σ 上连续，且对 $\vec{y}$ 满足李氏条件。取 $\delta=\frac{1}{2}e^{-L(b-a)}\sigma<\sigma$。

∵ $\vec{\xi}(x)=\vec{\xi}(x_0)+\int_{x_0}^{x}\vec{f}(x,\vec{\xi}(x))\,dx$

$$\begin{aligned}\therefore\ \vec{\varphi}_1(x;x_0,\vec{y}_0)-\vec{\varphi}_0(x;x_0,\vec{y}_0)&=\vec{y}_0+\int_{x_0}^{x}\vec{f}(x,\vec{\varphi}_0(x;x_0,\vec{y}_0))\,dx\\&\quad-\vec{y}_0-\vec{\xi}(x)+\vec{\xi}(x_0)\\&=\int_{x_0}^{x}\left[\vec{f}(x,\vec{\varphi}_0(x;x_0,\vec{y}_0))-\vec{f}(x,\vec{\xi}(x))\right]dx\end{aligned}$$

∵ $\|\vec{\varphi}_0(x;x_0,\vec{y}_0)-\vec{\xi}(x)\|=\|\vec{y}_0-\vec{\xi}(x_0)\|\le\delta<\sigma$ (∵ $(x;x_0,\vec{y}_0)\in D_\delta$)

∴ $(x,\vec{\varphi}_0)\in\Sigma_\sigma$

∴ $\|\vec{\varphi}_1(x;x_0,\vec{y}_0)-\vec{\varphi}_0(x;x_0,\vec{y}_0)\|\le\left|\int_{x_0}^{x}\|\vec{f}(x,\vec{\varphi}_0(x;x_0,\vec{y}_0))-\vec{f}(x,\vec{\xi}(x))\|\,dx\right|$

$$\le \left| \int_{x_0}^{x} L \|\vec{\varphi}_0(x;x_0,\vec{\eta}_0) - \vec{\xi}(x)\|\, dx \right|$$

$$= L|x-x_0|\cdot\|\vec{\eta}_0 - \vec{\xi}(x_0)\|$$

另外，$\vec{\varphi}_0(x;x_0,\vec{\eta}_0)$在$D_\delta$上显然连续。

② 假设$\vec{\varphi}_k(x;x_0,\vec{\eta}_0)$在$D_\delta$上连续，且满足

$\|\vec{\varphi}_k(x;x_0,\vec{\eta}_0) - \vec{\xi}(x)\| < \sigma$，和

$$\|\vec{\varphi}_{k+1}(x;x_0,\vec{\eta}_0) - \vec{\varphi}_k(x;x_0,\vec{\eta}_0)\| \le \frac{(L|x-x_0|)^{k+1}}{(k+1)!}\|\vec{\eta}_0 - \vec{\xi}(x_0)\|$$

对$\forall\, k \le s-1$成立。

则当$k=s$时，$\|\vec{\varphi}_s(x;x_0,\vec{\eta}_0) - \vec{\xi}(x)\|$

$$= \left\| \sum_{k=1}^{s}\left[\vec{\varphi}_k(x;x_0,\vec{\eta}_0) - \vec{\varphi}_{k-1}(x;x_0,\vec{\eta}_0)\right] + \left[\vec{\varphi}_0(x;x_0,\vec{\eta}_0) - \vec{\xi}(x)\right] \right\|$$

$$\le \sum_{k=1}^{s} \|\vec{\varphi}_k(x;x_0,\vec{\eta}_0) - \vec{\varphi}_{k-1}(x;x_0,\vec{\eta}_0)\| + \|\vec{\varphi}_0(x;x_0,\vec{\eta}_0) - \vec{\xi}(x)\|$$

$$\le \sum_{k=1}^{s} \frac{(L|x-x_0|)^k}{k!}\|\vec{\eta}_0 - \vec{\xi}(x_0)\| + \|\vec{\eta}_0 - \vec{\xi}(x_0)\|$$

$$= \sum_{k=0}^{s} \frac{(L|x-x_0|)^k}{k!}\|\vec{\eta}_0 - \vec{\xi}(x_0)\|$$

$$\le \delta e^{L|x-x_0|}$$

$$\le \delta e^{L(b-a)}$$

$$= \frac{1}{2}\sigma < \sigma$$

$$\|\vec{\varphi}_{s+1}(x;x_0,\vec{\eta}_0) - \vec{\varphi}_s(x;x_0,\vec{\eta}_0)\|$$

$$= \left\| \int_{x_0}^{x}\left[\vec{f}(x,\vec{\varphi}_s(x;x_0,\vec{\eta}_0)) - \vec{f}(x,\vec{\varphi}_{s-1}(x;x_0,\vec{\eta}_0))\right] dx \right\|$$

$$\le \left| \int_{x_0}^{x} \|\vec{f}(x,\vec{\varphi}_s(x;x_0,\vec{\eta}_0)) - \vec{f}(x,\vec{\varphi}_{s-1}(x;x_0,\vec{\eta}_0))\|\, dx \right|$$

$$\le \left| \int_{x_0}^{x} L\|\vec{\varphi}_s(x;x_0,\vec{\eta}_0) - \vec{\varphi}_{s-1}(x;x_0,\vec{\eta}_0)\|\, dx \right| \quad (\because (x,\vec{\varphi}_s),\ (x,\vec{\varphi}_{s-1}) \in \Sigma_\sigma)$$

$$\le \left| \int_{x_0}^{x} L\frac{(L|x-x_0|)^s}{s!}\|\vec{\eta}_0 - \vec{\xi}(x_0)\|\, dx \right|$$

$$= \frac{(L|x-x_0|)^{s+1}}{(s+1)!}\|\vec{\eta}_0 - \vec{\xi}(x_0)\|$$

$\because\ (x,\vec{\varphi}_{s-1}) \in \Sigma_\sigma$

$\therefore\ \vec{f}(x,\vec{\varphi}_{s-1}(x;x_0,\vec{\eta}_0))$在区域$D_\delta$上连续

$\therefore\ \vec{\varphi}_s(x;x_0,\vec{\eta}_0) = \vec{\eta}_0 + \int_{x_0}^{x}\vec{f}(x,\vec{\varphi}_{s-1}(x;x_0,\vec{\eta}_0))\,dx$ 在区域D_δ上连续。

③综合①、②，由第二数学归纳法，结论2°成立。

3° 皮卡序列 $\vec{\varphi}_n(x;x_0,\xi_0)$ 在区域 D_δ 上一致收敛到积分方程的解。

① 皮卡序列 $\vec{\varphi}_n(x;x_0,\xi_0)$ 在区域 D_δ 上一致收敛。

1' 级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\left[\vec{\varphi}_{n+1}(x;x_0,\xi_0)-\vec{\varphi}_n(x;x_0,\xi_0)\right]$ 在区域 D_δ 上一致收敛

$\Longleftrightarrow$ 结论①

2'' 结论1'中的级数在区域 D_δ 上一致收敛。

$\because \left\| \vec{\varphi}_{n+1}(x;x_0,\xi_0)-\vec{\varphi}_n(x;x_0,\xi_0)\right\| \leq \frac{(L|x-x_0|)^{n+1}}{(n+1)!}\left\|\xi_0-\xi(x_0)\right\|$

$\therefore$ 结论2''成立.

$\therefore$ 结论①成立.

② 皮卡序列 $\vec{\varphi}_n(x;x_0,\xi_0)$ 的极限函数 $\vec{\varphi}(x;x_0,\xi_0)=\lim\limits_{n\to\infty}\vec{\varphi}_n(x;x_0,\xi_0)$ $\left((x;x_0,\xi_0)\in D_\delta\right)$ 是积分方程的解。

$\therefore$ $\vec{\varphi}(x;x_0,\xi_0)$ 是(E)的解，且在区域 D_δ 上连续。 □.

注脚：1° ~~积分方程组~~

积分曲线族在积分曲线段 Γ 附近一个"细长管域"内的局部拉直。

解对参数的连续可微性（局部）（定理5.3）

设初值问题 (E_λ)：$\begin{cases} \dfrac{d\vec{y}}{dx} = \vec{f}(x,\vec{y},\vec{\lambda}) \\ \vec{y}(0) = \vec{0} \end{cases}$，其中 $\vec{\lambda}$ 是参数向量。

若 $\vec{f}$ 在闭区域 $G: |x| \le a,\ \|\vec{y}\| \le b,\ \|\vec{\lambda}-\vec{\lambda}_0\| \le c$ 上连续，且对 $\vec{y}$ 和 $\vec{\lambda}$ 有连续的偏微商。

则 (E_λ) 的解 $\vec{y}=\vec{\varphi}(x,\vec{\lambda})$ 在区域 $D: |x| \le h,\ \|\vec{\lambda}-\vec{\lambda}_0\| \le c$ 上连续可微，
其中 $h = \min\{a, \frac{b}{M}\}$，$M > \max\limits_{(x,\vec{y},\vec{\lambda}) \in G} \|\vec{f}(x,\vec{y},\vec{\lambda})\|$。

文字表述：标准形式带参量常微分方程的初值问题，如果它的右端函数：
①在一个闭区域内连续；②在同一区域内对 $\vec{y}$, $\vec{\lambda}$ 有连续的偏微商，
则原问题的解作为自变量和参量的函数在一个闭子区域上连续可微。

证明：1° 初值问题 (E_λ) 的解 $\Longleftrightarrow$ 积分方程 $\vec{y} = \int_0^x \vec{f}(x,\vec{y},\vec{\lambda})\,dx$ 的解

2° 皮卡序列
$$\begin{cases} \vec{\varphi}_0(x,\vec{\lambda}) = \vec{0} \\ \vec{\varphi}_{n+1}(x,\vec{\lambda}) = \int_0^x \vec{f}(x,\vec{\varphi}_n(x,\vec{\lambda}),\vec{\lambda})\,dx \quad (n=0,1,2,\cdots) \end{cases} \quad ((x,\vec{\lambda}) \in D)$$
一致收敛到积分方程的唯一解 $\vec{y}=\vec{\varphi}(x,\vec{\lambda})$，且 $\vec{\varphi}_n(x,\vec{\lambda})$ 在区域 D 上连续可微。

3° $\vec{\varphi}(x,\vec{\lambda})$ 在区域 D 上对 $\vec{\lambda}$ 有连续的偏微商 $\frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial \vec{\lambda}}(x,\vec{\lambda})$

① 序列 $\frac{\partial \vec{\varphi}_k}{\partial \vec{\lambda}}(x,\vec{\lambda})$ 在区域 D 上一致收敛。

1' 当 $k \to \infty$ 时，序列 $v_{k,s} = \left\| \frac{\partial \vec{\varphi}_{k+s}}{\partial \vec{\lambda}} - \frac{\partial \vec{\varphi}_k}{\partial \vec{\lambda}} \right\|$ 对 $(x,\vec{\lambda}) \in D$ 和 $s \in N_+$ 一致地趋于零。

由皮卡序列定义可知，
$$\frac{\partial \vec{\varphi}_{k+1}}{\partial \vec{\lambda}} = \int_0^x \left[\frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{y}}(x,\vec{\varphi}_k,\vec{\lambda}) \frac{\partial \vec{\varphi}_k}{\partial \vec{\lambda}} + \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{\lambda}}(x,\vec{\varphi}_k,\vec{\lambda}) \right] dx$$
$$\therefore v_{k+1,s} \le \left| \int_0^x \left\| \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{y}}(x,\vec{\varphi},\vec{\lambda}) \right\| v_{k,s}\,dx \right| + d_{k,s}(x,\vec{\lambda})$$
其中，
$$d_{k,s}(x,\vec{\lambda}) = \left| \int_0^x \left[\frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{y}}(x,\vec{\varphi}_{k+s},\vec{\lambda}) - \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{y}}(x,\vec{\varphi},\vec{\lambda}) \right] \frac{\partial \vec{\varphi}_{k+s}}{\partial \vec{\lambda}}\,dx \right|$$
$$+ \left| \int_0^x \left[\frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{y}}(x,\vec{\varphi},\vec{\lambda}) - \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{y}}(x,\vec{\varphi}_k,\vec{\lambda}) \right] \frac{\partial \vec{\varphi}_k}{\partial \vec{\lambda}}\,dx \right|$$
$$+ \left| \int_0^x \left[\frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{\lambda}}(x,\vec{\varphi}_{k+s},\vec{\lambda}) - \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{\lambda}}(x,\vec{\varphi}_k,\vec{\lambda}) \right] dx \right|$$

∵ 序列 $\vec{\varphi}_k(x,\vec{\lambda})$ 在D上一致收敛于 $\vec{\varphi}(x,\vec{\lambda})$，

且偏微商 $\vec{f}'_{\vec{y}}(x,\vec{y},\vec{\lambda})$，$\vec{f}'_{\vec{\lambda}}(x,\vec{y},\vec{\lambda})$ 在G上连续.

另外，∵ $\vec{f}(x,\vec{y},\vec{\lambda})$ 在闭区域G上对 $\vec{y},\vec{\lambda}$ 有连续的偏微商，

∴ $\left\|\frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{y}}\right\|$，$\left\|\frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{\lambda}}\right\|$ 在G上有上界，记为 α.

由归纳法可以证明，$\left\|\frac{\partial \vec{\varphi}_k}{\partial \vec{\lambda}}\right\| \le \sum_{i=1}^{k} \frac{(\alpha|x|)^i}{i!}$ $(k=1,2,\cdots)$

∴ $\left\|\frac{\partial \vec{\varphi}_k}{\partial \vec{\lambda}}\right\| \le \beta \le e^{\alpha h} = Const.$ $(k=1,2,\cdots)$ $((x,\vec{\lambda})\in D)$

∴ 当 $k\to\infty$ 时，$d_{k,s}(x,\vec{\lambda})$ 对 $(x,\vec{\lambda})\in D$ 和 $s\in N_+$ 一致地趋于0.

∴ ∃常数序列 $\varepsilon_k>0$，$\varepsilon_k\to 0$，使得 $d_{k,s}(x,\vec{\lambda})<\varepsilon_k$ $(k=1,2,\cdots)$

∴ $V_{k+1,s} \le \alpha\left|\int_0^x V_{k,s}\,dx\right| + \varepsilon_k$

∵ $\frac{\partial \vec{\varphi}_n}{\partial \vec{\lambda}}$ 在D上连续，且 $\left\|\frac{\partial \vec{\varphi}_n}{\partial \vec{\lambda}}\right\| \le \beta$

∴ $V_{k,s}(x,\vec{\lambda})$ 在D上连续，且 $V_{k,s} \le 2\beta$

∴ $V_{k+1,s} \le 2\alpha\beta|x| + \varepsilon_k$

由归纳法可知，$V_{k+m,s} \le 2\beta\frac{(\alpha|x|)^m}{m!} + \sum_{j=0}^{m-1} \varepsilon_{k+m-1-j}\frac{(\alpha|x|)^j}{j!}$

记序列 $\delta_k = \sup\{\varepsilon_k, \varepsilon_{k+1}, \varepsilon_{k+1}, \cdots\}$，则 δ_k 单调 $\to 0$.

∴ $V_{k+m,s} \le 2\beta\frac{(\alpha|h|)^m}{m!} + e^{\alpha|h|}\delta_k$

对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N$, st. $V_{k+m,s}(x,\vec{\lambda})<\varepsilon$，$\forall k,m>\frac{N}{2}$.

或者说 $V_{k,s}<\varepsilon$，$\forall k>N$.

② $\frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial \vec{\lambda}}(x,\vec{\lambda}) = \lim_{k\to\infty} \frac{\partial \vec{\varphi}_k}{\partial \vec{\lambda}}(x,\vec{\lambda})$

4° $\vec{\varphi}(x,\vec{\lambda})$ 在D上对x有连续的偏微商 $\frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial x}(x,\vec{\lambda})$

∵ $\vec{\varphi}(x,\vec{\lambda}) = \int_0^x \vec{f}(x,\vec{\varphi}(x,\vec{\lambda}),\vec{\lambda})\,dx$

∴ $\frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial x}(x,\vec{\lambda}) = \vec{f}(x,\vec{\varphi}(x,\vec{\lambda}),\vec{\lambda})$

解对初值的连续可微性（局部）（定理5.3推论）

设初值问题 $\begin{cases}\dfrac{d\vec{y}}{dx}=\vec{f}(x,\vec{y})\\ \vec{y}(x_0)=\vec{\eta}\end{cases}$，其中$\vec{f}(x,\vec{y})$在闭区域$R: |x-x_0|\le a, \|\vec{y}-\vec{y}_0\|\le b$

上连续，且对$\vec{y}$有连续的偏微商$\vec{f}'_{\vec{y}}(x,\vec{y})$。

则初值问题的解$\vec{y}=\vec{\varphi}(x,\vec{\eta})$在闭区域$D: |x-x_0|\le \frac{h}{2}, \|\vec{\eta}-\vec{y}_0\|\le \frac{b}{2}$上是连续可微的，其中$h=\min\{a,\frac{b}{M}\}$，$M>\max\limits_{(x,\vec{y})\in R}\|\vec{f}(x,\vec{y})\|$。

文字表述：标准形式常微分方程初值问题，如果它的右端函数：

①在一个闭区域内连续；②在同一区域内对$\vec{y}$有连续偏微商，

则原问题的解作为自变量和初值$\vec{y}(x_0)$的函数在一个闭子区域上连续可微。

证明：

证明过程与"解对初值的连续性定理（局部）"相似。

初值问题的变分方程：

对初值问题：
$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x,y,\lambda) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

设其解 $y=\varphi(x;x_0,y_0,\lambda)$ 对初值 (x_0,y_0) 及参数 λ 在定义域内连续可微。

则 $z=\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_0}$ 满足初值问题
$$\begin{cases} \dfrac{dz}{dx} = A(x,x_0,y_0,\lambda)\, z \\ z(x_0) = -f(x_0,y_0) \end{cases}$$

$z=\dfrac{\partial\varphi}{\partial y_0}$ 满足初值问题
$$\begin{cases} \dfrac{dz}{dx} = A(x,x_0,y_0,\lambda)\, z \\ z(x_0) = 1 \end{cases}$$

$z=\dfrac{\partial\varphi}{\partial\lambda}$ 满足初值问题
$$\begin{cases} \dfrac{dz}{dx} = A(x,x_0,y_0,\lambda)\, z + B(x,x_0,y_0,\lambda) \\ z(x_0) = 0 \end{cases}$$

其中，$A(x,x_0,y_0,\lambda) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,\varphi(x;x_0,y_0,\lambda),\lambda)$

$B(x,x_0,y_0,\lambda) = \dfrac{\partial f}{\partial\lambda}(x,\varphi(x;x_0,y_0,\lambda),\lambda)$

上述3个微分方程称为原初值问题对 x_0,y_0,λ 的变分方程，它们都是一阶线性的。