No.

Date

第六章 弯曲变形

挠曲轴的曲率半径

$$\frac{1}{R} = -\frac{M_z}{EI_z}$$

挠度：梁轴上各点在y方向上的位移 v.

曲率 $$\frac{1}{R} = \pm \frac{v''}{(1+v'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

二 挠曲轴的微分方程

$$\frac{v''}{(1+v'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{M_z}{EI_z}$$

线性化挠曲轴的微分方程，(条件：$\frac{v}{l} \ll 1$，小挠度 $\Longrightarrow (v')^2 \ll 1$)

$$EI_z v'' = M_z$$

或 $$\frac{d^2}{dx^2}\left(EI_z \frac{d^2}{dx^2} v\right) = q(x).$$

注：1° 悬臂梁的纯弯曲，在挠度为跨度30%时，线性理论还是足够精确的。

2° 弯曲挠度的计算中通常不考虑剪力对挠度的影响。

弯曲方程的积分

$$v(x) = v(0) + v'(0)x + \int_0^x\int_0^x \frac{M_z}{EI_z}\,dx\,dx$$

正向加载集中力矩 M，集中力 P，分布力 q，对应弯矩为

$$M_z = -M\varphi_0(x-a);\quad M_z = P\varphi_1(x-b);\quad M_z = q\varphi_2(x-c) - q\varphi_2(x-d).$$

在 EI_z 为常数时，

转角 $$v'(x) = v'(0) + \frac{1}{EI_z}\sum\{-M\varphi_1(x-a) + P\varphi_2(x-b) + q[\varphi_3(x-c) - \varphi_3(x-d)]\}$$

挠度 $$v(x) = v(0) + v'(0)x + \frac{1}{EI_z}\sum\{-M\varphi_2(x-a) + P\varphi_3(x-b) + q[\varphi_4(x-c) - \varphi_4(x-d)]\}.$$

简支梁上加载均布载荷 q，最大挠度为 $v(\frac{l}{2}) = \frac{5}{384}\frac{ql^4}{EI_z}$

悬臂梁端部上加载正向集中力矩 M，集中力 P，梁上加载正向均布力 q，最大转角与最大挠度分别为：

$$v'_{max} = \frac{Ml}{EI_z},\quad v_{max} = \frac{Ml^2}{2EI_z}.$$

$$v'_{max} = \frac{Pl^2}{2EI_z},\quad v_{max} = \frac{Pl^3}{3EI_z}$$

$$v'_{max} = \frac{ql^3}{6EI_z},\quad v_{max} = \frac{ql^4}{8EI_z}$$

No.

Date

惯性半径：定义 $I_y = A i_y^2$，$I_z = A i_z^2$. 则 i_y, i_z 为惯性半径.

正应力分布：$\sigma_x = -\frac{P}{A}\left(1+\frac{z_0 z}{i_y^2}+\frac{y_0 y}{i_z^2}\right)$

则零线（$\sigma_x=0$）方程为

$$\frac{y y_0}{i_z^2}+\frac{z z_0}{i_y^2}+1=0 \quad ,\text{或 } \frac{y}{a}+\frac{z}{b}=1 \quad \left(a=-\frac{i_z^2}{y_0},\ b=-\frac{i_y^2}{z_0}\right)$$

两条性质：(1) 在点2处的P在点1处产生的应力，等于在点1处的P在点2处产生的应力

(2) 当极点沿某直线移动时，零线绕一固定点旋转.

截面核心：轴向压力作用点作用在截面内一个确定的区域内时，整个横截面上全为压应力。这个区域称为截面核心。

多边形截面的核心是个多边形，该多边形的顶点就是与多边形截面各边重合的零线对应的极点。

椭圆截面的核心是个线度为截面半的同心椭圆。

多边形截面的核心作法：

1° 找出形心主轴和惯性半径.

2° 找出截面各边延长线在y轴和z轴上的截距a和b.

3° 依据 $y_0=-\frac{i_z^2}{a}$，$z_0=-\frac{i_y^2}{b}$ 计算各顶点坐标.

3° 用直线连结各顶点.

简单静不定问题

梁的刚度计算

刚度定义：1° 纯弯曲悬臂梁

$$k=\frac{M}{\zeta}=\frac{EI_z}{l}$$

ζ：最大转角

2° 跨中受集中载荷 P 的简支梁

$$k=\frac{P}{v_{max}}=\frac{48EI_z}{l^3}$$

3° 受均布载荷简支梁

$$k=\frac{q}{\omega}=\frac{120EI_z}{l^5}$$

ω：与 q 关于能量共轭的广义位移，变形前后梁轴线间面积

$$\omega=\int_0^l v(x)dx=\frac{ql^5}{120EI_z}$$

梁的刚度条件：

$$\frac{v_{max}}{l}\le\left[\frac{v}{l}\right],\quad \theta_{max}\le[\theta]$$