ch.2 变形分析

2.1 位移

$$P(x,y,z) \xrightarrow{\vec{u}} \tilde{P}(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})$$

$$\vec{\tilde{r}} = \vec{r} + \vec{u}$$

假设: ~~位移单值函数~~ ⇒ 弹性体不撕裂.

(连续性公理) $\begin{cases} \tilde{x}_i(x_i, y, z) \text{ 单值} \\ x_i(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \text{ 单值} \Rightarrow \text{弹性体不重叠} \end{cases}$

Jacobi 行列式

$$J = \frac{D(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})}{D(x,y,z)} = \begin{vmatrix} 1+\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & 1+\frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & 1+\frac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix}$$

其中 $|u_{i,j}| \ll 1$, 所以 $J > 0$.

2.2 几何方程

位移分解 $u_i(\vec{r}+d\vec{r}) = u_i(\vec{r}) + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j$

$\therefore \vec{u}(\vec{r}+d\vec{r}) = \vec{u}(\vec{r}) + (\vec{u}\nabla)\cdot d\vec{r}$ (也可记为 $d\vec{r}\cdot(\nabla\vec{u})$)

其中 $\vec{u}\nabla = u_{i,j}\vec{e}_i\vec{e}_j$, $d\vec{r} = dx_i\vec{e}_i$

定义: 对称张量 $\Gamma = \frac{1}{2}(\vec{u}\nabla + \nabla\vec{u})$, 称为 Cauchy 应变张量, 或应变张量.

反对称张量 $\vec{\Omega} = \frac{1}{2}(\vec{u}\nabla - \nabla\vec{u})$

几何方程: $\Gamma = \frac{1}{2}(\vec{u}\nabla + \nabla\vec{u})$ 分量形式: $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$

它联系了位移和应变.

注: 书上的记法 γ_{ij} 在一般的书上表示工程剪应变, 且 $\gamma_{ij} = 2\varepsilon_{ij}$. ($i\neq j$).

定义: 正应变 $\varepsilon_x = \varepsilon_{11} = \frac{\partial u}{\partial x}$, ($\varepsilon_y, \varepsilon_z$ 依此类推)

剪应变 $\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{12}$ (其它依此类推)

$\vec{\Omega}$ 对应的轴矢量 $\vec{\omega}$ 可记为 $\vec{\omega} = \frac{1}{2}(\nabla\times\vec{u})$

位移分解式重新写成

$$\vec{u}(\vec{r}+d\vec{r}) = \vec{u}(\vec{r}) + \vec{\Omega}\cdot d\vec{r} + \Gamma\cdot d\vec{r}$$

或 $$\vec{u}(\vec{r}+d\vec{r}) = \underbrace{\vec{u}(\vec{r})}_{\text{平移}} + \underbrace{\vec{\omega}\times d\vec{r}}_{\text{旋转}} + \underbrace{\Gamma\cdot d\vec{r}}_{\text{变形}}$$

2.3 变形.

ε_x 的几何意义为 x 方向上微线元的相对伸长。

ε_{xy} 的几何意义为 x、y 方向上微线元角度变化的一半.

弹性应变的限度为 $|\varepsilon_{ij}| < 0.2\%$

2.4 应变分析.

① 已知位置场 $\vec{r}$，位移场 $\vec{u}$，对于一点 P 及其附近的点 A，微线元 $\vec{PA}$ 的相对伸长为

$$\varepsilon = \vec{\xi}\cdot\vec{\Gamma}\cdot\vec{\xi}$$

（忽略应变高阶小量；$\vec{\xi}=\frac{\vec{PA}}{|PA|}$）

推导：$\vec{PA} = (\vec{r}+d\vec{r}) - \vec{r} = d\vec{r}$

$$\vec{\tilde{P}\tilde{A}} = (\vec{r}+d\vec{r}+\vec{u}+d\vec{u}) - (\vec{r}+\vec{u}) = d\vec{r}+d\vec{u} = d\tilde{\vec{r}}$$

$$\Rightarrow (d\tilde{r})^2 = d\tilde{\vec{r}}\cdot d\tilde{\vec{r}} = d\vec{r}\cdot d\vec{r} + 2d\vec{r}\cdot d\vec{u} + d\vec{u}\cdot d\vec{u}$$

$$= (dr)^2 + 2d\vec{r}\cdot(\vec{\omega}\times d\vec{r} + \vec{\Gamma}\cdot d\vec{r}) + [d\vec{r}\cdot(\nabla\vec{u})]\cdot[(\vec{u}\nabla)\cdot d\vec{r}]$$

$$= (dr)^2 + 2(dr)^2\,\vec{\xi}\cdot\vec{G}\cdot\vec{\xi}$$

其中 $\vec{G}$ 为 Green 应变张量，

$$\vec{G} = \vec{\Gamma} + \frac{1}{2}(\nabla\vec{u})\cdot(\vec{u}\nabla)$$

忽略二阶小量 $\frac{1}{2}(\nabla\vec{u})\cdot(\vec{u}\nabla)$ （关于应变的小量）

⇒ 在 ξ 方向上的相对伸长

$$\varepsilon = \frac{d\tilde{r} - dr}{dr} = \sqrt{1+2\vec{\xi}\cdot\vec{\Gamma}\cdot\vec{\xi}} - 1 \approx \vec{\xi}\cdot\vec{\Gamma}\cdot\vec{\xi} = \xi_i\varepsilon_{ij}\xi_j$$

注：1° 这说明了用某点处的应变张量，可以求出过这一点沿任意方向的微线元的相对伸长.

2° 非线性大变形需要考虑 Green 应变张量.

② 已知位置场 $\vec{r}$，位移场 $\vec{u}$，对于点 P 及其附近的点 A、B，且 PA⊥PB，微线元 $\vec{PA}$、$\vec{PB}$ 间夹角变化的一半为 （夹角变小为正）

$$\varepsilon = \vec{\xi}\cdot\vec{\Gamma}\cdot\vec{\eta}$$

（忽略应变高阶小量；$\vec{\xi}=\frac{\vec{PA}}{|PA|}$，$\vec{\eta}=\frac{\vec{PB}}{|PB|}$）

推导：$\vec{PA}=d\vec{r}$，$\vec{PB}=\delta\vec{r}$

$$\vec{\tilde{P}\tilde{A}} = d\vec{r}+d\vec{u}, \quad \vec{\tilde{P}\tilde{B}} = \delta\vec{r}+\delta\vec{u}$$

$$\Rightarrow d\tilde{\vec{r}}\cdot\delta\tilde{\vec{r}} = d\vec{r}\cdot\delta\vec{r} + d\vec{r}\cdot\delta\vec{u} + d\vec{u}\cdot\delta\vec{r} + d\vec{u}\cdot\delta\vec{u}$$

$$= d\vec{r}\cdot(\vec{\omega}\times\delta\vec{r}+\vec{\Gamma}\cdot\delta\vec{r})+(\vec{\omega}\times d\vec{r}+\vec{\Gamma}\cdot d\vec{r})\cdot\delta\vec{r}+$$
$$d\vec{r}\cdot(\nabla\vec{u})\cdot(\vec{u}\nabla)\cdot\delta\vec{r}$$
$$= 2dr\delta r\,\vec{\xi}\cdot\vec{G}\cdot\vec{\eta}$$

其中，$\vec{G}$是Green应变张量.

设γ是线元夹角变化的一半，并忽略应变的高阶小量.

$$\therefore d\vec{r}\cdot\delta\vec{r}\approx(1+\varepsilon_1)dr(1+\varepsilon_2)\delta r\cdot 2\gamma$$
$$\approx dr\delta r\cdot 2\gamma$$
$$\therefore \gamma=\vec{\xi}\cdot\vec{\Gamma}\cdot\vec{\eta}=\xi_i\varepsilon_{ij}\eta_j$$

注：1° 这说明了用某点处的应变张量可以求出过这点任意两垂直方向上微线元夹角的变化.

2° 对于非垂直的方向的夹角变化，也可以推出，不过应该不常用。

③ 由①、②可知，一个点处的应变张量包含了该点附近微元变形的全部信息。与斜截面上的应力类似，有 $\vec{n}_1\cdot\vec{\Gamma}=\varepsilon'_{11}\vec{n}_1+\varepsilon'_{12}\vec{n}_2+\varepsilon'_{13}\vec{n}_3=\vec{\varepsilon}$，$\vec{n}_1,\vec{n}_2,\vec{n}_3$是任意三个单位正交向量。

2.5 应变张量.

已知沿任一方向的伸长量 $\varepsilon=\vec{n}\cdot\vec{\Gamma}\cdot\vec{n}$。因为$\vec{n}$定义在单位球面上，是一个有界闭集，又因为$\varepsilon$是$\vec{n}$的连续函数，所以$\varepsilon$一定有最大值和最小值。现在，我们求$\varepsilon(\vec{n})$的极值：

$$\begin{cases}\varepsilon=\vec{\xi}\cdot\vec{\Gamma}\cdot\vec{\xi}=\xi_i\varepsilon_{ij}\xi_j & \text{(目标函数)}\\ f(\vec{\xi})=\xi_i\xi_i-1=0 & \text{(约束条件)}\end{cases}$$

由Lagrange乘子法，

令 $$\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial\xi_i}(\varepsilon-\lambda f)=0\\ f=0\end{cases}$$

得 $$\frac{\partial(\xi_k\varepsilon_{kj}\xi_j-\lambda(\xi_k\xi_k-1))}{\partial\xi_i}$$
$$=\xi_{k,i}\varepsilon_{kj}\xi_j+\xi_k\varepsilon_{kj}\xi_{j,i}-\lambda(2\xi_k\xi_{k,i})$$
$$=\delta_{ik}\varepsilon_{kj}\xi_j+\delta_{ij}\varepsilon_{kj}\xi_k-2\lambda\xi_k\delta_{ik}$$
$$=\varepsilon_{ij}\xi_j+\varepsilon_{ki}\xi_k-2\lambda\xi_i$$
$$=2(\varepsilon_{ij}\xi_j-\lambda\xi_i)$$

$\therefore$ 在有非零解时，
$$\begin{vmatrix} \varepsilon_{11}-\lambda & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22}-\lambda & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\therefore \lambda^3 - I_1\lambda^2 + I_2\lambda - I_3 = 0$$

其中 $I_1 = \varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33} = \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3$

$$I_2 = \begin{vmatrix} \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varepsilon_{33} & \varepsilon_{31} \\ \varepsilon_{13} & \varepsilon_{11} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} \end{vmatrix} = \lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1$$

$$I_3 = |\varepsilon_{ij}| = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$$

这里λ必为实数，因为实对称矩阵只有实特征值.

性质：① 属于不同特征值的特征向量正交。

证：设 $\vec{\Gamma}\cdot\vec{\xi_i} = \lambda_i\vec{\xi_i}$

$\vec{\Gamma}\cdot\vec{\xi_j} = \lambda_j\vec{\xi_j}$

则 $\vec{\xi_i}\cdot\vec{\Gamma}\cdot\vec{\xi_j} = \lambda_j\vec{\xi_i}\cdot\vec{\xi_j}$

$\vec{\xi_j}\cdot\vec{\Gamma}\cdot\vec{\xi_i} = \lambda_i\vec{\xi_i}\cdot\vec{\xi_j}$

$\because \vec{\Gamma} = \vec{\Gamma}^T$

$\therefore \vec{\xi_i}\cdot\vec{\Gamma}\cdot\vec{\xi_j} = \vec{\xi_j}\cdot\vec{\Gamma}\cdot\vec{\xi_i}$

$\therefore (\lambda_i-\lambda_j)\vec{\xi_i}\cdot\vec{\xi_j} = 0$

$\because \lambda_i \neq \lambda_j$

$\therefore \vec{\xi_i}\cdot\vec{\xi_j} = 0$

$\therefore \vec{\xi_i}\perp\vec{\xi_j}$

② 属于不同特征值的特征向量变形后夹角不变.

证：已知 $\vec{\xi_i}\cdot\vec{\xi_j} = 0$

$\vec{\Gamma}\cdot\vec{\xi_j} = \lambda_j\vec{\xi_j}$

则 $\vec{\xi_i}\cdot\vec{\Gamma}\cdot\vec{\xi_j} = \lambda_j\vec{\xi_i}\cdot\vec{\xi_j} = 0$

$\therefore$ 正交向量 $\vec{\xi_i}$、$\vec{\xi_j}$ 变形后夹角不变.

③ 特征向量分类.

特征值数目	特征向量
3	三正交
2	一直线与其垂面
1	任意方向

④ 三线性无关特征向量（主坐标）下，应变张量为对角形.

⑤ 矩阵不变量

体应变 $$\frac{dV'-dV}{dV} = \frac{dx_1'dx_2'dx_3' - dx_1dx_2dx_3}{dx_1dx_2dx_3}$$

$$= [(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)(1+\varepsilon_3) - 1]$$

$$= \varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3$$ （忽略 ε 的高阶量）

$$= I_1$$

I_2、I_3 也是独立的矩阵不变量

⑥ 变形椭球

微线元 $d\vec{r}$ 变形前后长度关系为

$$(d\tilde{r})^2 = (1+2\tilde{\xi}\cdot\vec{\Gamma}\cdot\tilde{\xi})(dr)^2$$

两边乘以 $(1-2\tilde{\xi}\cdot\vec{\Gamma}\cdot\tilde{\xi})$，略去二阶项得

$$(1-2\tilde{\xi}\cdot\vec{\Gamma}\cdot\tilde{\xi})(d\tilde{r})^2 = (dr)^2$$

因为 $\tilde{\xi}$ 与 $\vec{\xi}$ 的区别为小量，则 $d\tilde{r}\tilde{\xi} \approx d\tilde{r}\vec{\xi}$，得

$$d\vec{r}\cdot(\vec{I}-2\vec{\Gamma})\cdot d\vec{r} = (dr)^2$$

在旋转主轴坐标系下，

$$(d\hat{x}, d\hat{y}, d\hat{z})\begin{pmatrix} 1-2\lambda_1 & & \\ & 1-2\lambda_2 & \\ & & 1-2\lambda_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d\hat{x} \\ d\hat{y} \\ d\hat{z} \end{pmatrix} = (dr)^2$$

即 $$(1-2\lambda_1)(d\hat{x})^2 + (1-2\lambda_2)(d\hat{y})^2 + (1-2\lambda_3)(d\hat{z})^2 = (dr)^2$$

忽略高阶量的意义下，得

$$\frac{(d\hat{x})^2}{(1+\lambda_1)^2} + \frac{(d\hat{y})^2}{(1+\lambda_2)^2} + \frac{(d\hat{z})^2}{(1+\lambda_3)^2} = (dr)^2$$

说明变形后微线元的末端构成一椭球面。

八面体应变（octahedral strains）本质上是一个比拟的概念。

$$\varepsilon_{oct} = \frac{1}{3}(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3) = \frac{1}{3}I_1$$

$$\frac{1}{2}\gamma_{oct} = \frac{1}{3}\sqrt{(\varepsilon_1-\varepsilon_2)^2+(\varepsilon_2-\varepsilon_3)^2+(\varepsilon_3-\varepsilon_1)^2} = \sqrt{\frac{2}{9}I_1^2 - \frac{2}{3}I_2}$$

没有给出相应正交方向时，切应变是没有定义的；不过应变视为矢量时，总可以求出切向分量（切应变）。

2.6 应变协调方程

完整结论：在单连通域内，

$\vec{\Gamma}$是一个满足连续性公理的位移所对应的应变张量，即$\vec{\Gamma}=\frac{1}{2}(\nabla\vec{u}+\vec{u}\nabla)$ $\xLeftrightarrow[\text{Volterra积分}]{}$ $\vec{\Gamma}$满足应变协调方程：$\nabla\times\vec{\Gamma}\times\nabla=\vec{0}$

① 应变协调方程的意义

数学角度（反问题）：

几何方程联系了3个位移分量和6个应变分量，对于任意的应变函数，可能不存在满足几何方程的位移场。因此应变场需要满足额外的约束。

几何角度（连续性公理）：

物体微元发生任意变形后，按原来的相对位置拼起来，可能会出现重叠、撕裂。为了使弹性体连续，必须对应变场加以限制。

② 推导应变协调方程

已知应变场，求任一点 $P_1(x_1,y_1,z_1)$ 的位移 $\vec{u}$。

给定点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的位移 $\vec{u}_0$。

则 $\vec{u}=\vec{u}_0+\int_{P_0}^{P_1}(\vec{u}\nabla)\cdot d\vec{r}$

其中 $\vec{u}\nabla$ 的分量形式为

$$\begin{cases} du = \varepsilon_x dx + (\varepsilon_{xy}-\omega_z)dy + (\varepsilon_{zx}+\omega_y)dz \\ dv = (\varepsilon_{yx}+\omega_z)dx + \varepsilon_y dy + (\varepsilon_{yz}-\omega_x)dz \\ dw = (\varepsilon_{zx}-\omega_y)dx + (\varepsilon_{zy}+\omega_x)dy + \varepsilon_z dz \end{cases}$$

以位移分量 u 为例，继续推导，

$$u=u_0+\int_{P_0}^{P_1}\varepsilon_x dx+\varepsilon_{xy}dy+\varepsilon_{zx}dz+\int_{P_0}^{P_1}\omega_y dz-\omega_z dy$$

其中 $\int_{P_0}^{P_1}\omega_y dz-\omega_z dy$

$$=\int_{P_0}^{P_1}-\omega_y\, d(z_1-z)+\omega_z d(y_1-y)$$

$$=(\omega_y)_0(z_1-z_0)-(\omega_z)_0(y_1-y_0)-\int_{P_0}^{P_1}(y_1-y)d\omega_z-(z_1-z)d\omega_y$$

又 $d\omega_z=\frac{\partial\omega_z}{\partial x}dx+\frac{\partial\omega_z}{\partial y}dy+\frac{\partial\omega_z}{\partial z}dz$

$$=\left(\frac{\partial\varepsilon_{xy}}{\partial x}-\frac{\partial\varepsilon_x}{\partial y}\right)dx+\left(\frac{\partial\varepsilon_y}{\partial x}-\frac{\partial\varepsilon_{xy}}{\partial y}\right)dy+\left(\frac{\partial\varepsilon_{yz}}{\partial x}-\frac{\partial\varepsilon_{xz}}{\partial y}\right)dz$$

$$d\omega_y=\left(\frac{\partial\varepsilon_x}{\partial z}-\frac{\partial\varepsilon_{xz}}{\partial x}\right)dx+\left(\frac{\partial\varepsilon_{xy}}{\partial z}-\frac{\partial\varepsilon_{zy}}{\partial x}\right)dy+\left(\frac{\partial\varepsilon_{xz}}{\partial z}-\frac{\partial\varepsilon_z}{\partial x}\right)dz$$

得到 $u=u_0+(\omega_y)_0(z_1-z_0)-(\omega_z)_0(y_1-y_0)+\int_{P_0}^{P_1}U_x dx+U_y dy+U_z dz$

其中 $u_x=\varepsilon_x+(y_1-y)\left(\frac{\partial\varepsilon_x}{\partial y}-\frac{\partial\varepsilon_{xy}}{\partial x}\right)+(z_1-z)\left(\frac{\partial\varepsilon_x}{\partial z}-\frac{\partial\varepsilon_{xz}}{\partial x}\right)$

$u_y=\varepsilon_{xy}+(y_1-y)\left(\frac{\partial\varepsilon_{xy}}{\partial y}-\frac{\partial\varepsilon_y}{\partial x}\right)+(z_1-z)\left(\frac{\partial\varepsilon_{xy}}{\partial z}-\frac{\partial\varepsilon_{zy}}{\partial x}\right)$

$u_z=\varepsilon_{zx}+(y_1-y)\left(\frac{\partial\varepsilon_{xz}}{\partial y}-\frac{\partial\varepsilon_{yz}}{\partial x}\right)+(z_1-z)\left(\frac{\partial\varepsilon_{xz}}{\partial z}-\frac{\partial\varepsilon_z}{\partial x}\right)$

因为位移场是一个单值函数，所以上述积分与路径无关。

（假设弹性体是单连通域）约束条件为 $\nabla\times(u_x,u_y,u_z)=0$

即 $\begin{cases}\frac{\partial u_x}{\partial y}=\frac{\partial u_y}{\partial x}\\ \frac{\partial u_y}{\partial z}=\frac{\partial u_z}{\partial y}\\ \frac{\partial u_z}{\partial x}=\frac{\partial u_x}{\partial z}\end{cases}$

例如第一个等式为

$(y_1-y)(\varepsilon_{x,yy}+\varepsilon_{y,xx}-2\varepsilon_{xy,xy})+(z_1-z)(\varepsilon_{x,zy}-\varepsilon_{xz,xy}-\varepsilon_{xy,zx}+\varepsilon_{zy,xx})=0$

类似上式，可以一共列出9个等式（考虑 v, w 分量）.

充分条件为（等价） $\varepsilon_{x,yy}+\varepsilon_{y,xx}=2\varepsilon_{xy,xy}$ （∵ x_1,y_1,z_1 是任意的.）

$\varepsilon_{xy,xz}-\varepsilon_{yz,xx}+\varepsilon_{zx,xy}=\varepsilon_{x,yz}$

以及相似的一共6个等式.

这6个等式即为 Saint-Venant 应变协调方程，矢量形式为

$\nabla\times\vec{\Gamma}\times\nabla=0$

张量形式 $\varepsilon_{ij,kl}\,\varepsilon_{kip}\,\varepsilon_{jlq}\,\vec{e}_p\vec{e}_q=\vec{0}$

指标形式

↑

记这个形式，免推导！

$\begin{cases}\varepsilon_{11,22}+\varepsilon_{22,11}=2\varepsilon_{12,12} & \underline{1122}\\ \varepsilon_{22,33}+\varepsilon_{33,22}=2\varepsilon_{23,23} & \underline{2233}\\ \varepsilon_{33,11}+\varepsilon_{11,33}=2\varepsilon_{13,13} & \underline{3311}\\ \varepsilon_{12,13}+\varepsilon_{13,12}=\varepsilon_{11,23}+\varepsilon_{23,11} & \underline{1123}\\ \varepsilon_{23,21}+\varepsilon_{21,23}=\varepsilon_{22,13}+\varepsilon_{13,22} & \underline{1223}\\ \varepsilon_{31,32}+\varepsilon_{32,31}=\varepsilon_{33,12}+\varepsilon_{12,33} & \underline{1233}\end{cases}$

注：这个推导过程让人很费解，不过利用几何方程可以验证结论是正确的，说明 Saint-Venant 应变协调方程是几何方程的必要条件.

③ Volterra积分（位移—应变关系）

若区域Ω中的对称张量场满足协调方程，

则存在矢量场 $\vec{u}$，满足几何方程。

$$\vec{u}(\vec{r}) = \vec{u}_0 + \vec{w}_0 \times (\vec{r}-\vec{r}_0) + \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{\rho}\cdot \overrightarrow{\Pi} \qquad (\vec{r}\in\Omega)$$

其中 $\overrightarrow{\Pi}(\vec{\rho},\vec{r}) = \vec{\Gamma}_\rho - (\vec{\Gamma}_\rho \times \nabla_\rho)\times(\vec{r}-\vec{\rho})$

下标 ρ 表示相关量仅与 $\vec{\rho}$ 有关.

证明：1° 积分 $\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{\rho}\cdot\overrightarrow{\Pi}$ 与路径无关.

∵ $\nabla_\rho \times \overrightarrow{\Pi} = \vec{0}$ （证明见教材P40）

2° $\vec{u}$ 满足几何方程.

$$d\vec{u} = \vec{w}_0 \times d\vec{r} + \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{\rho}\cdot[\overrightarrow{\Pi}(\vec{\rho},\vec{r}+d\vec{r}) - \overrightarrow{\Pi}(\vec{\rho},\vec{r})] + \int_{\vec{r}}^{\vec{r}+d\vec{r}} d\vec{\rho}\cdot\overrightarrow{\Pi}$$

$$= \left[\vec{w}_0 - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{\rho}\cdot(\vec{\Gamma}_\rho \times \nabla_\rho)\right]\times d\vec{r} + \vec{\Gamma}_r\cdot d\vec{r}$$

∴ $(\vec{u}\nabla)\cdot d\vec{r} = (\vec{\Omega}+\vec{\Gamma})\cdot d\vec{r}$

其中 $\vec{w} = \vec{w}_0 - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{\rho}\cdot(\vec{\Gamma}_\rho\times\nabla_\rho)$

$\vec{\Omega} = \vec{w}\times\vec{I}$，是个反对称张量.

由于 $d\vec{r}$ 的任意性，得

$$\vec{u}\nabla = \vec{\Omega} + \vec{\Gamma}$$

∴ $\frac{1}{2}(\vec{u}\nabla + \nabla\vec{u}) = \frac{1}{2}(\vec{\Omega}+\vec{\Gamma}-\vec{\Omega}+\vec{\Gamma}) = \vec{\Gamma}$ □.

④ 推导Volterra公式（位移—应变关系）

已知位移场 $\vec{u}(\vec{r})$，则

$$\vec{u}(\vec{r}) = \vec{u}(\vec{r}_0) + \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{u}$$

$$= \vec{u}(\vec{r}_0) + \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} (d\vec{\rho}\cdot\vec{\Gamma}_\rho + \vec{w}_\rho\times d\vec{\rho})$$

$$= \vec{u}(\vec{r}_0) + \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \{d\vec{\rho}\cdot\vec{\Gamma}_\rho + d[\vec{w}_\rho\times(\vec{\rho}-\vec{r})] - d\vec{w}_\rho\times(\vec{\rho}-\vec{r})\}$$

$$= \vec{u}(\vec{r}_0) + \vec{w}_0\times(\vec{r}-\vec{r}_0) + \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{\rho}\cdot[\vec{\Gamma}_\rho - (\nabla_\rho\vec{w}_\rho)\times(\vec{\rho}-\vec{r})]$$

∵ $\vec{\Gamma}\times\nabla = \frac{1}{2}(\vec{u}\nabla+\nabla\vec{u})\times\nabla = \frac{1}{2}\nabla(\vec{u}\times\nabla) = -\nabla\vec{w}$

代入即得Volterra公式.

注：由②、③可知，应变场满足协调方程是位移场满足几何方程的充要条件.（假设Ω单连通）