第4章 光的衍射

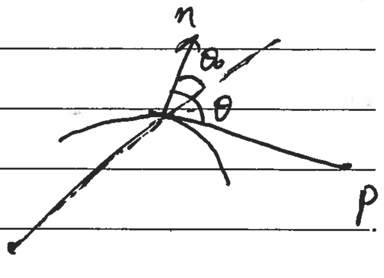
1、惠更斯-菲涅耳原理：

波前上每一个面元，都可以看作次波源，向四周发射次波；

波场中每一点的扰动是所有次波源贡献的次级扰动的相干叠加。

数学形式 $\tilde{U}(P) = \underbrace{K}_{\text{比例系数}} \underbrace{\oint_{(\Sigma)}}_{\text{波前}} \underbrace{f(\theta_0,\theta)}_{\text{倾斜因子}} \underbrace{\tilde{U}_0(Q)}_{\text{次波源复振幅}} \underbrace{\frac{e^{ikr}}{r}}_{\text{传播项}} \underbrace{dS}_{\text{面元}}$

基尔霍夫衍射积分公式：



$$\tilde{U}(P) = \frac{-i}{\lambda}\oint_{(\Sigma)} \frac{\cos\theta_0+\cos\theta}{2}\,\tilde{U}_0(Q)\,\frac{e^{ikr}}{r}\,dS$$

贡献：1° 比例系数 $K=\frac{-i}{\lambda}$

2° 倾斜因子 $f(\theta_0,\theta)=\frac{1}{2}(\cos\theta_0+\cos\theta)$

3° 波前面(Σ)不一定是等相面.

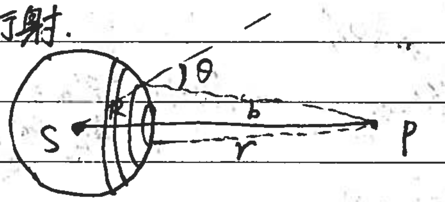
衍射分类 { 菲涅耳衍射：光源—衍射屏—接受屏 间距有限远
夫琅禾费衍射：光源—衍射屏—接受屏 间距无限远

衍射巴比涅原理 (叠加性).

$$\tilde{U}_a(P)+\tilde{U}_b(P)=\tilde{U}(P)$$

2、圆孔、圆屏菲涅耳衍射.

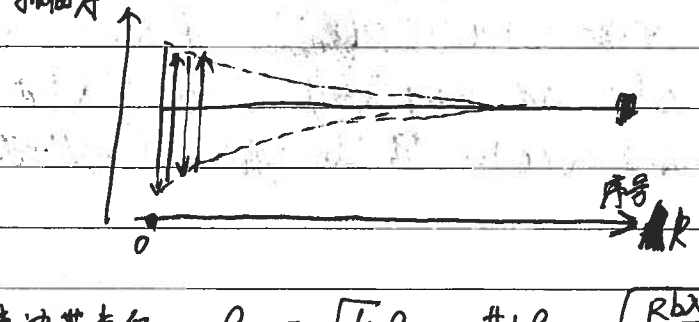
半波带方法：



$r=b+\frac{\lambda}{2},\ b+\frac{2\lambda}{2},\ \cdots$

积分部分 $f(\theta_0,\theta)\,\tilde{U}_0(Q)\,\frac{e^{ikr}}{r}\,dS \propto \underline{(-1)^n\,\frac{1}{2}(1+\cos\theta)\,\frac{\pi R\lambda}{R+b}}$

其中 $r=b+\frac{n}{2}\lambda$.



半波带半径：$\rho_k=\sqrt{k}\,\rho_1$ 其中 $\rho_1=\sqrt{\frac{Rb\lambda}{R+b}}$

波带片：依据半波带半径规律开放偶数半波带或奇数半波带的屏。

菲涅耳波带片具有若干实焦点和虚焦点，既有汇聚透镜的功能，又有发散透镜的功能。

物点发射球面波时，可以产生若干实像和虚像，成像公式为

$$\frac{1}{R}+\frac{1}{b}=\frac{1}{f_k},\quad k=\pm1,\pm2,\cdots$$

焦点位置：对于主焦距 f_1，第一半波带半径 $\rho_1=\sqrt{\frac{Rb\lambda}{R+b}}$

令 $R\to\infty$，则 $b\to f_1$

$$\therefore\ f_1=\frac{\rho_1^2}{\lambda}$$

对于焦距 f_k，第一半波带半径 $\rho_1=\rho'_{2k-1}=\sqrt{\frac{(2k-1)Rb\lambda}{R+b}}$

令 $R\to\infty$，则 $b\to f_k$

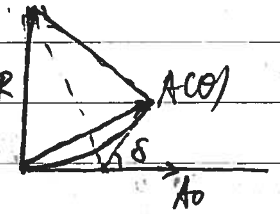
$$\therefore\ f_k=\frac{\rho_1^2}{(2k-1)\lambda}=\frac{f_1}{2k-1}$$

3、夫琅禾费单缝衍射

光强公式：光程差：$\Delta l=\Delta d\sin\theta$

复振幅：$\tilde{U}(\theta)=\Delta A e^{ikl_0}\left(1+e^{ik\Delta d\sin\theta}+e^{2ik\Delta d\sin\theta}+\cdots+e^{Nik\Delta d\sin\theta}\right)$

由 $N\Delta d=a$，$k=\frac{2\pi}{\lambda}$，$N\Delta A=A_0$

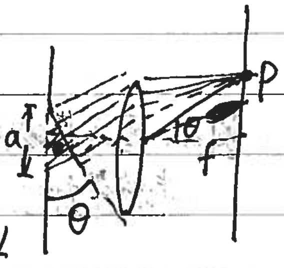


则 $\delta=\frac{2\pi}{\lambda}a\sin\theta$

$R=\frac{A_0}{\delta}$

$\therefore A(\theta)=2R\sin\frac{\delta}{2}$

$=A_0\frac{\sin\left(\frac{\pi a}{\lambda}\sin\theta\right)}{\frac{\pi a}{\lambda}\sin\theta}$



设参量 $\alpha(\theta)=\frac{\pi a}{\lambda}\sin\theta$，

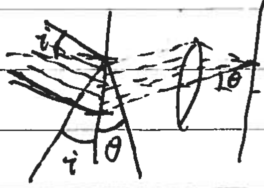
则光强 $I(\theta)=I_0\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2$　$(I_0\propto A_0^2\propto a^2)$

半角宽度公式：零级斑的半角宽度 $\Delta\theta_0\approx\frac{\lambda}{a}$　$(\alpha=\pi)$

零级斑的几何宽度 $\Delta l=f\cdot\Delta\theta_0$　（判据 $I\geq\frac{I_0}{2}$）

斜入射情形：$\Delta l=\Delta d(\sin\theta+\sin i)$，其中 i 为入射角。

$\therefore$ 参量 $\alpha(\theta)=\frac{\pi a}{\lambda}(\sin\theta+\sin i)$。其余形式相同。



No.

Date

夫琅禾费方孔衍射

$$\tilde{U}(\theta_1,\theta_2)=\frac{-i}{\lambda f}Aab\,e^{ikL_0}\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)\left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right)$$

其中 $\alpha=\dfrac{\pi a\sin\theta_1}{\lambda}$，$\beta=\dfrac{\pi b\sin\theta_2}{\lambda}$

$$I(\theta_1,\theta_2)=I_0\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2\left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right)^2$$

零级斑的半角宽 $\Delta\theta_1\approx\dfrac{\lambda}{a}$，$\Delta\theta_2\approx\dfrac{\lambda}{b}$.

夫琅禾费圆孔衍射

$ds=\rho\,d\varphi\,d\rho$　　$L=-\rho\cos\varphi\sin\theta+L_0$

$$\tilde{U}(\theta)=\tilde{c}\left(\frac{2J_1(x)}{x}\right)$$

其中 $\tilde{c}=\dfrac{-i}{\lambda f}A\pi R^2e^{ikL_0}$，$x=\dfrac{2\pi R\sin\theta}{\lambda}$

艾里斑(零级斑)的半角宽度：$\underline{\Delta\theta_0\approx 1.22\dfrac{\lambda}{D}}$　$(D=2R)$.

瑞利判据：已知两艾里斑中心夹角为$\delta\theta$，艾里斑半角宽度为$\Delta\theta_0$，则：

1° $\delta\theta>\Delta\theta_0$时，可分辨；

2° $\delta\theta=\Delta\theta_0$时，恰可分辨；

3° $\delta\theta<\Delta\theta_0$时，不能分辨

望远镜的有效放大率 $M_{eff}=\dfrac{\delta\theta_e}{\delta\theta_m}$　最小分辨角$\delta\theta_m=1.22\dfrac{\lambda}{D_0}$ — 物镜口径.　λ:空气中光波长.

人眼的分辨本领 $\delta\theta_e=1.22\dfrac{\lambda}{D_e}$（注：反推而来）

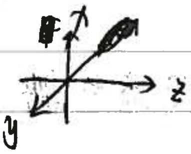
显微镜的分辨本领 $\delta y_{om}=0.61\dfrac{\lambda_0}{n_0\sin u_0}=0.61\dfrac{\lambda}{N.A.}$　(N.A.：显微镜的数值孔径)

记录介质的空间分辨率.(12次)

位移—相移定理

夫琅禾费衍射场中，一个图像位移时，衍射场响应一个相移：

$$\tilde{U}'(\theta_1,\theta_2)=e^{i(\delta_1+\delta_2)}\cdot\tilde{U}(\theta_1,\theta_2)$$



其中 $\begin{cases}\delta_1=-kx_0\sin\theta_1\\ \delta_2=-ky_0\sin\theta_2\end{cases}$　相位落后

光栅衍射场　$\tilde{U}(\theta)=\tilde{U}_0(\theta)\dfrac{1-e^{iN\delta}}{1-e^{i\delta}}=\tilde{U}_0(\theta)e^{i(N-1)\beta}\left(\dfrac{\sin N\beta}{\sin\beta}\right)$

其中 $\beta=\dfrac{\delta}{2}=\dfrac{\pi}{\lambda}d\sin\theta$，$\tilde{U}_0(\theta)=\tilde{c}\left(\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}\right)$，$\alpha=\dfrac{\pi a\sin\theta}{\lambda}$.

d为光栅常数，a为单缝宽度

$$\therefore\ \tilde{U}(\theta)=\tilde{c}\,e^{i(N-1)\beta}\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)\left(\frac{\sin N\beta}{\sin\beta}\right)$$

主峰位置：$\beta=k\pi$，即 $\underline{d\sin\theta_k=k\lambda}$，$(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 光栅公式

主极大光强 $I(\theta_k)=N^2I_0(\theta_k)$

No.

Date

半角宽度：$d\sin(\theta_k+\Delta\theta_k)=(k+\frac{1}{N})\lambda \Rightarrow d\cos\theta_k\cdot\Delta\theta_k=\frac{\lambda}{N}$

$\therefore \Delta\theta_k=\frac{\lambda}{Nd\cos\theta_k}=\frac{\lambda}{D\cos\theta_k}$，D：有效宽度

(补充) 两主峰间有N-1个零点和N-2个次极大。

缺级：当 $\frac{d}{a}=n$ 时，第 nk $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 个主极大消失.

光谱仪的设计

角色散本领：波长 λ，λ' 的光经光栅衍射后，k级主极大的方位角为 θ_k，θ_k'.

则角色散率 $D_\theta\equiv\frac{\delta\theta}{\delta\lambda}$

(由光栅公式 $d\sin\theta_k=k\lambda \Rightarrow d\cos\theta_k\, d\theta=k\,d\lambda$

$\therefore D_\theta=\frac{k}{d\cos\theta_k}$ d：光栅周期)

线色散本领：$D_l\equiv\frac{\delta l}{\delta\lambda}$，$\delta l$：光分开距离.

(由 $\delta l\approx f\cdot\delta\theta$，f为凹面镜焦距.

$\therefore D_l=f\frac{k}{d\sin\theta_k}$.)

色分辨本领：$R\equiv\frac{\lambda}{\delta\lambda_m}$ $\delta\lambda_m$：波长 λ 处可分辨的最小波长差.

(由 $\delta\theta_k=\Delta\theta_k$，$\delta\theta_k$：k级主峰半角宽，$\delta\theta_k$：色散角

得 $\frac{k}{d\sin\theta_k}\delta\lambda_m=\frac{\lambda}{Nd\cos\theta_k}$

$\therefore R=kN$)

闪耀光栅：1° 相邻槽衍射线间光程差 $\Delta L=d\sin(2\theta_b)$ (θ_b：闪耀角)

$d\sin(2\theta_b)=\lambda_{1b}$ 的光波在 $2\theta_b$ 方向上出现一级主峰，λ_{1b} 称为一级闪耀波长；

$d\sin(2\theta_b)=2\lambda_{2b}$ 的光波在 $2\theta_b$ 方向上出现二级主峰，λ_{2b} 称为二级闪耀波长。

2° $a\approx d$，故闪耀光栅除一级主峰以外，其余主极大全部缺级，即闪耀光栅只有一级光谱。

3° 衍射场：$I(\theta)=i_0\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2\left(\frac{\sin N\beta}{\sin\beta}\right)^2$

其中 $\alpha=\frac{\pi}{\lambda}a(\sin(\theta-\theta_b)-\sin\theta_b)$，$\beta=\frac{\pi}{\lambda}d\sin\theta$，$(a\approx d)$

No.

Date

(二维、三维光栅不要求) 布拉格公式：$\delta = 2d\sin\theta = k\lambda$，不同晶面间干涉时 k 级主级大出现的条件。

d：晶面间距　θ：掠射角.