

北京 大学 工学院

第五章. 量纲分析与相似原理

本章将主要介绍 ① 量纲一致性原则、量纲齐次性原理; ② 量纲分析和 Buckingham (π) 定理; ③ 相似准则及 ④ 相似性原理.

一. 量纲与物理量的齐次性

(一) 物理量的大小与类别

物理量的大小由相应的单位表示, 分为基本量(单位)和导出量(单位). 物理量的类别由量纲界定, 基本量的量纲为基本量纲:

质量 m : $[M]$, 长度 l : $[L]$, 时间 t : $[T]$, 温度 θ : $[\Theta]$.

而导出量的量纲可用基本量纲的幂次式表示.

(二) 同类物理量的比较:

1. 被比较的物理量必须具有相同的量纲, 称为量纲的一致性原则.

2. 物理方程中各项如果用基本量纲的幂次式表示, 那么各项的基本量纲必须齐次, 称为物理方程的量纲齐次性原理.

例: 沿流线单位体积流体满足的 Bernoulli 方程 (无粘, 定常, 体力有势):

$$\frac{1}{2} \rho V^2 + P + \rho g z = C \quad (5.1.1)$$

动能: $\dim\left\{\frac{1}{2} \rho V^2\right\} \sim (ML^{-3})(LT^{-1})^2 = ML^{-1}T^{-2}$

位置势能: $\dim\{\rho g z\} \sim (ML^{-3})(LT^{-2})L = ML^{-1}T^{-2}$

压强势能: $\dim\{P\} \sim (MLT^{-2})L^{-2} = ML^{-1}T^{-2}$

右端常数应该与左端各项具有相同的量纲: 即: $\dim\{C\} \sim ML^{-1}T^{-2}$

北京 大学 工学院

因此,方程各项可看作是相关物理量组成的量纲齐次的组合量,它们之间的关系反映了各物理量在量纲上的相互制约关系。这是对流动相关物理量作量纲分析的基础。

二. 量纲分析和 π 定理.

量纲分析: 对流动物理量作量纲幂次分析,建立组合无量纲形式的参数,用无量纲量之间的关系代替有量纲物理量之间的关系,目的是揭示物理量之间在量纲上的内在联系,指导理论分析和流体力学(模型)实验研究。量纲分析理论基础的奠基人是 E. Buckingham (1914年),他提出了:

(一) (布金汉) π 定理: 若一个流动方程包含有 n 个物理量,每个物理量的量纲均可由 r 个独立的基本量纲组成,那么这些物理量可以并且只能组成 $n-r$ 个独立的无量纲参数,也称 π 数。

换句话说: 选择 r 个独立的物理量作为基本量,其余 $n-r$ 个物理量作为导出量,设原方程为 $x_1 = f(x_2, x_3, \dots, x_n)$, 则量纲分析后有 $\pi_1 = f(\pi_2, \pi_3, \dots, \pi_{n-r})$ 。

(二) 量纲分析法(基本步骤)

1. 列举所有相关的物理量。(漏选了必需的物理量会导致错误的结果,引入无关的量会使分析复杂化)。
2. 选择包含不同基本量纲的独立物理量作为基本量(或称重复量,通常取3个)。
3. 将其余物理量分别与基本量的幂次式组合,建立 π 表达式。
4. 根据量纲一致性原则求解每一个 π 表达式中的指数,组成 π 式。
5. 用 π 数组成无量纲形式的方程。

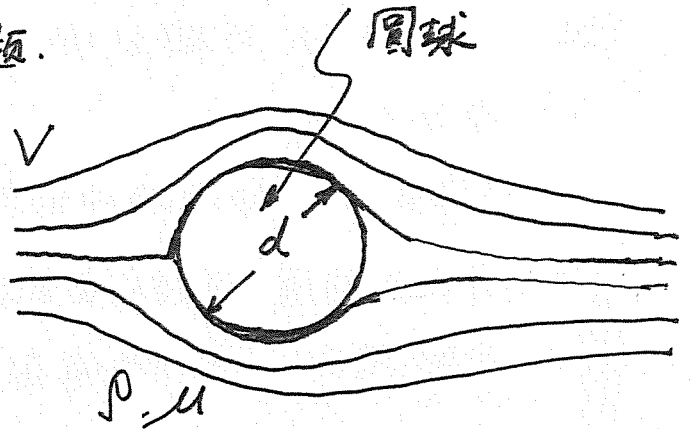
北京大学工学院

例：粘性流体绕流的阻力问题。

① 包含的相关物理量：

阻力： F_D
 流体密度： ρ
 流体粘度： μ
 来流速度： V
 圆球直径： d

} 5个物理量



则有： $F_D = \varphi(\rho, V, d, \mu)$ (5.2.1)

② 选择 ρ, d, V 为重复量：那么将有 $5-3=2$ 个导出量，也就是有 2 个无量纲量 (π 数) (关于 F_D 和 μ)

③ $\pi_1 = \rho^{\alpha_1} V^{\beta_1} d^{\gamma_1} F_D$ (5.2.2)

$\pi_2 = \rho^{\alpha_2} V^{\beta_2} d^{\gamma_2} \mu$ (5.2.3)

④ $\pi_1 = M^0 L^0 T^0 = (ML^{-3})^{\alpha_1} (LT^{-1})^{\beta_1} L^{\gamma_1} (MLT^{-2})$

$\Rightarrow \begin{cases} M: \alpha_1 + 1 = 0 \\ L: -3\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 + 1 = 0 \\ T: -\beta_1 - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = -1 \\ \beta_1 = -2 \\ \gamma_1 = -2 \end{cases}$

代入 (5.2.2) $\Rightarrow \pi_1 = \rho^{-1} V^{-2} d^{-2} F_D = \frac{F_D}{\rho V^2 d^2} = C_D$ (5.2.4) (阻力系数)

同样地： $\pi_2 = M^0 L^0 T^0 = (ML^{-3})^{\alpha_2} (LT^{-1})^{\beta_2} L^{\gamma_2} (ML^{-1}T^{-1})$

$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_2 = -1 \\ \beta_2 = -1 \\ \gamma_2 = -1 \end{cases}$ 代入 (5.2.3) \Rightarrow

$\pi_2 = \rho^{-1} V^{-1} d^{-1} \mu = \frac{\mu}{\rho V d} = \frac{1}{Re}$ (Re 为雷诺数)

⑤ $\pi_1 = f(\pi_2)$ ，即 (5.2.5)

$C_D = \frac{F_D}{\rho V^2 d^2} = f(Re)$ 或 $F_D = \rho V^2 d^2 f(Re)$ (5.2.6)

北京大学工学院

三. 流动相似与相似准则:

(一) 流动相似

1. 几何相似: 两流场中的被绕流物体和流场中各对应线元之间夹角相同, 且对应长度成比例;
2. 运动相似: 两个几何相似的流场中, 时空对应点上的速度方向相同, 大小成比例;
3. 动力相似: 两个运动相似的流场中, 时空对应点上的对应面元所受的力, 方向相同, 大小成比例;
4. 热力学相似: 两个动力相似的流场中, 时空对应点的温度成比例, 通过对应点上对应面元的热流通量^同方向相同, 大小成比例.

(二) 相似准则:

对原型和模型分别选取相关物理量的特征量, 建立无量纲物理量 (或相似准则数), 使得对一种流场的分析结果可以推广 (换算) 到与之相似的流场中.

$$\text{长度: } \frac{l}{h} (\text{原型}) = \frac{l'}{h'} (\text{模型}) = l^*$$

$$\text{速度: } \frac{v}{U} (\text{原型}) = \frac{v'}{U'} (\text{模型}) = v^*$$

$$\text{力: } \frac{F_v}{F_i} (\text{原型}) = \frac{F'_v}{F'_i} (\text{模型}) = F_v^*$$

$$\frac{F_g}{F_i} (\text{原型}) = \frac{F'_g}{F'_i} (\text{模型}) = F_g^*$$

北京大学工学院

四. 相似准则数的确定.

(一) 量纲分析法 (因次分析法)

以不可压缩粘性流体流动为例:

相关物理量有: $\rho, V, l, \mu, g, \Delta p, t_0$ (Ω)

若取 ρ, V, l 为重复量, 则可以得到 $7-3=4$ 个无量纲量:

$$\pi_1 = \frac{\rho V l}{\mu} = Re \quad (\text{Reynolds 数}) \quad (5.4.1)$$

$$\pi_2 = \frac{g l}{V^2} = \left(\frac{V}{\sqrt{g l}}\right)^{-2} = Fr^{-2} \quad (\text{Fr 为 Froude 数}) \quad (5.4.2)$$

$$\pi_3 = \frac{\Delta p}{\rho V^2} = Eu \quad (\text{Euler 数}) \quad (5.4.3)$$

$$\pi_4 = \frac{l/V}{t_0} = \frac{\Omega l}{V} = St \quad (\text{Strouhal 数}) \quad (5.4.4)$$

优点: 适用于未知物理方程的任何流动, 也最为常用.

缺点: 对复杂流动, 不易选取物理量, 所得相似准则数的物理意义不够明确.

(二) 方程分析法 (无量纲化法)

以 N-S 方程 x 方向分量为例:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = f_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

引入特征量: V, l, P_0, g, t_0 ($\frac{1}{\Omega}$), 对 N-S 方程中各物理量进行无量纲化: (5.4.5)

$$\frac{u}{V} = u^*, \quad \frac{v}{V} = v^*, \quad \frac{w}{V} = w^*$$

北京大学工学院

$$\frac{x}{l} = x^*, \quad \frac{y}{l} = y^*, \quad \frac{z}{l} = z^*$$

$$\frac{f_x}{g} = f_x^*, \quad \frac{p}{p_0} = p^*, \quad \frac{t}{t_0} = t\Omega = t^*$$

代入 (5.4.5), 有:

$$\begin{aligned} & \frac{\rho V}{t_0} \frac{\partial u^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} + w^* \frac{\partial u^*}{\partial z^*} \\ &= \frac{\rho g}{\rho V^2} f_x^* - \frac{p_0}{\rho V^2} \frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{\mu}{\rho V l} \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial z^{*2}} \right) \end{aligned} \quad (5.4.6)$$

$$Re = \frac{\rho V l}{\mu} = \frac{[\text{惯性力}]}{[\text{粘性力}]} \quad (5.4.7)$$

$$Fr = \frac{V}{\sqrt{gl}} = \frac{[\text{惯性力}]}{[\text{重力}]} \quad (5.4.8)$$

$$Eu = \frac{p_0}{\rho V^2} = \frac{[\text{压力}]}{[\text{惯性力}]} \quad (5.4.9)$$

$$St = \frac{l/V}{t_0} = \frac{l\Omega}{V} = \frac{[\text{不定常惯性力}]}{[\text{迁移惯性力}]} \quad (5.4.10)$$

优点: 导出的相似准则数有明确的物理意义.

缺点: 只适用于物理方程已知的情況.

3. 物理法则分析法 (定律分析法)

例: 已知流体元质量为 δm , 速度为 v , 沿流线的迁移加速度为 $v \frac{\partial v}{\partial s}$, 不定常加速度 (当地加速度) 为 $\frac{\partial v}{\partial t}$, 压强差为 Δp , 沿向速度梯度 $\frac{\partial v}{\partial m}$.

(方程未知, 根据物理法则或定律).

北京大学工学院

相关的物理量有: $\rho, v, l, \mu, g, \Delta p$ 和 t_0 ($\frac{1}{\Omega}$).

迁移惯性力: $F_i = (\delta m)v \frac{\partial v}{\partial s} \sim \rho l^3 v^2 / l \sim \rho v^2 l^2$

不定常惯性力: $F_{it} = (\delta m) \frac{\partial v}{\partial t} \sim \rho l^3 \frac{v}{t_0}$

重力: $F_g = (\delta m)g \sim \rho l^3 g$

粘性力: $F_v = \mu \frac{dv}{dx} \delta A \sim \mu v l$

压差力: $F_p = \Delta p \delta A \sim \Delta p l^2$

比较力的量级:

$$Re = \frac{F_i}{F_v} = \frac{\rho v^2 l^2}{\mu v l} = \frac{\rho v l}{\mu}$$

$$Fr^2 = \frac{F_i}{F_g} = \frac{\rho v^2 l^2}{\rho l^3 g} = \frac{v^2}{g l}$$

$$Eu = \frac{F_p}{F_i} = \frac{\Delta p l^2}{\rho v^2 l^2} = \frac{\Delta p}{\rho v^2}$$

$$St = \frac{F_{it}}{F_i} = \frac{\rho l^3 \frac{v}{t_0}}{\rho v^2 l^2} = \frac{l/v}{t_0} = \frac{l \Omega}{v}$$

4. 常用的相似准则数.

① $Re \rightarrow$ 雷诺数; ② $Fr \rightarrow$ 弗劳德数; ③ $Eu \rightarrow$ 欧拉数;

④ $St \rightarrow$ 斯特劳哈尔数; ⑤ $Ma \rightarrow$ 马赫数; ⑥ $We \rightarrow$ 韦伯数.

$$Ma = \frac{v}{a} = \frac{\text{流速}}{\text{当地声速}}$$

$$We = \frac{\rho v^2 l}{\sigma} = \frac{\text{惯性力}}{\text{表面张力}}$$

北京大学工学院

五. 模型实验与相似性原理:

(一) 模型实验: 以相似准则为基础, 在实验室内进行可控的实验观察与测量, 并将模型实验结果根据相似准则换算(推广)到原型中相应物理量(加上必要的修正).

意义: ① 节约成本(减少原型实验费用);

② 简化实验过程(简化操作, 增强可控性);

③ 科学表达实验结果.

(二) 相似性原理: 相似的流动现象(几何相似, 运动相似, 动力相似), 可以将模型实验的数据与结论定量地推广到原型流动.

根据 π 定理: 原型控制方程可化为若干 π 数方程:

$$\pi_1 = f(\pi_2, \pi_3, \dots, \pi_n)$$

π 数为无量纲数, 与具体的几何尺寸, 流动参数的大小无关, 也适用于相似的模型流动.

$$\pi_{1m} = f(\pi_{2m}, \pi_{3m}, \dots, \pi_{nm})$$

若, $\pi_{2m} = \pi_2, \pi_{3m} = \pi_3, \dots, \pi_{nm} = \pi_n$

则必有: $\pi_{1m} = \pi_1$.

在实际应用中, 要找出支配流动现象的主要条件(主要矛盾), 建立主相似准则数(主 π 数). 在几何条件相似的前提下, 保证模型和原型现象中的主 π 数相等, 就能基本满足两者流动相似.

北京大学工学院

讨论:

- ① π 定理揭示了物理量之间在量纲上的内在联系,降低了变量个数,从而指导理论分析和流体力学实验研究.
- ② 对粘性流体流动, Re 数是通常最为重要的相似数.
- ③ 要保证非定常流动相似,有必要保证 St 数相同.
- ④ 流动有自由面时,需重点保证 Fr 数和 Eu 数分别相同.
- ⑤ 在可压缩性很大的高速流动中, Ma 数很重要.

例题: 风力涡轮的发电功率^P与风轮的直径 D , 来流风速 V , 风轮转速 Ω , 空气密度 ^{ρ} 等因素有关。请用无量纲量描述这一关系。

$$P = P(D, V, \Omega, \rho)$$

现在选取 D, V, ρ 为重复物理量, 则由 π 定理:

$$\begin{cases} \pi_1 = P D^{\alpha_1} V^{\beta_1} \rho^{\delta_1} \\ \pi_2 = \Omega D^{\alpha_2} V^{\beta_2} \rho^{\delta_2} \end{cases}$$

考虑到 P 的量纲与 $\rho V^2 D^2 V = \rho V^3 D^2$ 相同,

Ω 的量纲与 V/D 相同.

$$\text{因此有: } \pi_1 = \frac{P}{\rho V^3 D^2} = \varphi(\pi_2) = \varphi\left(\frac{\Omega D}{V}\right) = \varphi(2\lambda)$$

其中: $\lambda = \frac{\frac{1}{2} D \Omega}{V}$ 称为尖速比, 为风轮叶片尖梢运动速度与来流风速之比。无量纲功率称为功率系数。功率系数与尖速比的关系是风力机的重要关系式。

THE UNIVERSITY OF CHICAGO

PHILOSOPHY DEPARTMENT

PHILOSOPHY 101

LECTURE NOTES

PLATO'S THEORY OF FORMS

1. THE PROBLEM OF UNIFORMITY

2. THE THEORY OF FORMS

3. THE DIVISION OF LABOR

4. THE THEORY OF KNOWLEDGE

5. THE THEORY OF ETHICS

6. THE THEORY OF POLITICS

7. THE THEORY OF PSYCHOLOGY

8. THE THEORY OF METAPHYSICS

9. THE THEORY OF LOGIC

10. THE THEORY OF SCIENCE