《高等动力学》 刘才山

参考教材：Arnold，经典力学中的数学方法。

（联系助教）

动量定理

1、质点系内力力系的基本性质 Text

1° 质点系全部内力力系的主向量为 0。

注：主向量是合力，合力是作用在同一对象上的力系。

2° 质点系全部内力力系对任意点的力矩为0。

作业：1、6、7、9、12、13。

2、冲击力

广义函数：dirac delta 函数。

阶跃函数。

冲击力对质点的作用效果：

1° 冲击过程中常规力的效果可忽略。

2° 冲击力在速度上改变物体运动的效果。

3° 冲击力在位移上对运动效果的影响可忽略。

作业：15、16、19、20、22、26、29、30
33、35、37、39、6.4、6.7、6.9。

三种恢复系数在特定条件下的等价性：

对光滑接触的两个小球来说，Newton、Poisson和能量恢复系数给出的是对碰撞过程中能量耗散的等价性度量指标。

注：当存在摩擦时，只有能量恢复系数是从本质上反映碰撞过程中能量耗散的正确指标。

变质量系统运动方程：

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{R} + \frac{dm}{dt}(\vec{u} - \vec{v})$$

变质量后，物体的速度为 $(\vec{R}=0)$

$$\vec{V}=\vec{V_0}+\frac{\Delta m}{m}\vec{V_r}$$

动量矩定理

动点的动量矩：$\vec{G_A}=\Sigma(\vec{r_i'}\times m_i\vec{V_i'})$; $\vec{G_0}=\Sigma(\vec{r_i}\times m_i\vec{V_i})$

$$\vec{V_i'}=\vec{V_i}-\vec{V_A} \quad , \quad \vec{r_i}=\vec{r_{OA}}+\vec{r_i'}$$

$$\therefore \vec{G_A}=\Sigma\left[(\vec{r_i}-\vec{r_{OA}})\times m_i(\vec{V_i}-\vec{V_A})\right]$$

$$=\vec{G_0}-\vec{r_{OA}}\times\vec{p}+M\vec{r_{OA}}\times\vec{V_A}-M\vec{r_{OC}}\times\vec{V_A}$$

此即质点系在平动参考系下对点A的动量矩.

注：特别的，if $\vec{r_{OA}}=\vec{r_{OC}}$, $\vec{G_A}=\vec{G_C}=\vec{G_0}-\vec{r_{OC}}\times\vec{p}$

动点的动量矩定理：

$$\frac{d\vec{G_A}}{dt}=\frac{d\vec{G_0}}{dt}-\frac{d(\vec{r_{OA}}\times\vec{p})}{dt}+M\frac{d(\vec{r_{OA}}\times\vec{V_A})}{dt}-M\frac{d(\vec{r_{OC}}\times\vec{V_A})}{dt}$$

$$=\vec{L_0}-\vec{r_{OA}}\times\vec{R}+M\vec{r_{OA}}\times\frac{d\vec{V_A}}{dt}-M\vec{r_{OC}}\times\frac{d\vec{V_A}}{dt}$$

$$=\vec{L_A}+\underline{\vec{r_{AC}}\times\left(-M\frac{d\vec{V_A}}{dt}\right)}$$ 惯性部分

注：在：① A点所在参考系为惯性系；② A点为质心 的情况下，动量矩定理具有原形态：

$$\frac{d\vec{G_A}}{dt}=\vec{L_A}$$ （惯性系动量矩定理；质心动量矩定理）

~~关于速度瞬心的动量矩定理.~~

（作业：10、19、21、24、25、30、31）.

刚体的定轴转动 $G_z=J_z\omega$ （G_z：z向角动量，J_z：z轴转动惯量）

刚体定轴转动的动量矩定理.

$$L_z=J_z\dot{\omega}$$ （L_z：z向力矩）

关于速度瞬心的动量矩定理.

$$J_c\dot{\omega}=L_c+M\omega(\vec{r_{CG}}\cdot\vec{V_c})$$ ，其中G点为质心.

刚体上任一点的速度：$\vec{V_P}=\vec{\omega}\times\vec{r_{CP}}$ ，其中C点为速度瞬心.

刚体上与速度瞬心对应点的加速度：

$$\vec{a_P}=\vec{V_C}\times\vec{\omega}$$

注：速度瞬心C与刚体上速度瞬心的对应点P是不同的，C点只是一个抽象点，不是质点。$\vec{V_C}$、$\vec{V_P}$，$\vec{a_C}$、$\vec{a_P}$ 没有相互关联，其中 $\vec{V_P}=0$.

高速转子在惯性系中对质心的动量矩：

$$\vec{G} = J\cdot\vec{\omega}$$

注：1°高速转子：自转角速度 ω 远大于进动角速度 Ω.

2°上式只是一种近似结论。

陀螺力矩（回转力矩）：高速转子作用在其它物体上的力矩.

$$(-\vec{L}) = J\vec{\omega}\times\vec{\Omega} = \vec{G}\times\vec{\Omega}$$

相应的 $\vec{L} = \vec{\Omega}\times\vec{G}$

动能定理

元功的定义：1° 微小位移上的功 $\delta W = \vec{F}\cdot d\vec{r}$

2° 在速度坐标上定义的元功 $\delta W = \vec{F}\cdot\vec{v}\,dt$

3° 共点力系的元功 $\delta W = \sum_{i=1}^{n}(\vec{F_i}\cdot d\vec{r})$

4° 非共点力系的元功 $\delta W = \sum_{i=1}^{n}(\vec{F_i}\cdot d\vec{r_i})$

5° 力$\vec{F}$在路径AB上做的功 $W_{AB} = \int_{AB}\vec{F}\cdot d\vec{r}$

作用在刚体上的外力作的功.

$$\delta W = \sum_{i=1}^{n}\vec{F_i}\cdot d\vec{r_i} = \sum_{i=1}^{n}\vec{F_i}\cdot(d\vec{r_c} + \vec{\omega}\times\vec{r_i'}dt)$$

$$= \left(\sum\vec{F_i}\right)\cdot d\vec{r_c} + \left(\sum_{i=1}^{n}\vec{r_i'}\times\vec{F_i}\right)\cdot\vec{\omega}\,dt$$

$$= \vec{R}\cdot d\vec{r_c} + \vec{L}\cdot\vec{\omega}\,dt$$

其中 $\vec{r_i'}$ 是第i个外力作用点相对于质心的位矢；$\vec{r_c}$ 是质心的位矢；$\vec{R}$是外力的主向量；$\vec{L}$是外力相对质心的主矩.

（作业：33、34、36、40、7.6，7.7，7.10）

刚体作平面运动的动能：

$$T = \frac{1}{2}Mv_c^2 + \frac{1}{2}J_c\omega^2$$

动能变化定理：

$$dT = \sum_i\vec{F_i}^{外}\cdot d\vec{r_i} + \sum_i\sum_j\vec{F_{ij}}\cdot d\vec{r_i}$$

其中 $\sum_i\vec{F_i}^{外}\cdot d\vec{r_i} = \sum_i\vec{F_i}^{外}\cdot d\vec{r_c} + \sum_i\vec{F_i}^{外}\cdot d\vec{r_i'}$

$$\sum_i\sum_j\vec{F_{ij}}\cdot d\vec{r_i} = \sum_i\sum_j\vec{F_{ij}}\cdot d\vec{r_c} + \sum_i\sum_j\vec{F_{ij}}\cdot d\vec{r_i'} = \sum_i\sum_j\vec{F_{ij}}\cdot d\vec{r_i'}$$

质点系质心动能变化规律：

$$d\left(\frac{1}{2}MV_c^2\right) = \sum \vec{F}_i^{\text{外}}\cdot d\vec{r}_c$$

质心系下动能变化定理：

由 $T = \frac{1}{2}MV_c^2 + \frac{1}{2}\sum m_i v_i'^2 = \frac{1}{2}MV_c^2 + T'$ 和上式

$$dT' = \sum_i \vec{F}_i^{\text{外}}\cdot d\vec{r}_i' + \sum_i\sum_j \vec{F}_{ij}\cdot d\vec{r}_i'$$

(作业：15、17、18、20、27、36、41、44)

(作业：47、53、58、64、65、70)

变结构动力学问题：

变结构动力学问题中，系统动力学过程不连续。典型类型有：

1° 约束的单边性质 (如支撑面约束，柔索约束)

2° 多尺度动力学问题 (如碰撞)

3° 干摩擦问题

(作业：47、53、58、64、65、70)

(作业：72、74、75、78、80)

(作业：8.2、3、5、12、15、17)

非惯性参考系中的动力学定理

动量定理 $\frac{d}{dt}\left[\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{v}_i'\right] = \vec{R} + \sum_{i=1}^{n}\vec{F}_e + \sum_{i=1}^{n}\vec{F}_c$

质心运动定理 $\frac{d}{dt}[M\vec{v}_c'] = \vec{R} - M[\vec{a}_0 + \vec{\varepsilon}\times\vec{r}_c' + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}_c')] - 2M\vec{\omega}\times\vec{v}_c'$

动量矩定理 $\frac{d}{dt}\left[\sum_{i=1}^{n}\vec{r}_i'\times(m_i\vec{v}_i')\right] = \sum_{i=1}^{n}\vec{r}_i'\times\vec{F}_i + \sum_{i=1}^{n}\vec{r}_i'\times(\vec{F}_e+\vec{F}_c)$

能量定理 $dT = \delta W^{\text{外}} + \delta W^{\text{内}} + \delta W^{\text{牵}}$

其中 $\vec{F}_c\cdot d\vec{r}' = 0$.

离心力势能 $V_e = -\frac{1}{2}m\omega^2\rho^2$ $\left(= -\frac{1}{2}J_z\omega^2\right)$.

(条件：ω = constant)