Ch.5 弹性力学基本方程组.

5-1 基本方程

$$
\begin{cases}
\text{几何方程：} & \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i}) & (9;6) \\
\text{平衡方程：} & \sigma_{ij,i} + f_j = 0 & (6;3) \\
\text{本构方程：} & \varepsilon_{ij} = \frac{1}{E}\left[(1+\nu)\sigma_{ij} - \nu\sigma_{kk}\delta_{ij}\right] & (12;6) \\
 & \vec{T} = \lambda\theta\vec{I} + 2\mu\vec{\Gamma} &
\end{cases}
\rightarrow (15;15) \ \text{未知量 方程 (标量)}
$$

边条件： S_u: $\vec{u} = \bar{\vec{u}}$ (位移边条件)

S_t: $\vec{n}\cdot\vec{T} = \bar{\vec{t}}$ (应力边条件)

S_e: $\vec{n}\cdot\vec{T} + k\vec{u} = 0$ (弹性边条件)

基本解法： $\vec{u} \rightarrow \vec{\Gamma} \rightarrow \vec{T}$ (位移解法)

$\vec{T} \rightarrow \vec{\Gamma} \rightarrow \vec{u}$ (应力解法)

$\uparrow$

$\nabla\times\vec{\Gamma}\times\nabla = \vec{0}$

5-2 位移解法

几何方程 $\vec{\Gamma} = \frac{1}{2}(\vec{u}\nabla + \nabla\vec{u})$ 代入本构方程 $\vec{T} = \lambda\theta\vec{I} + 2\mu\vec{\Gamma}$

得 $\vec{T} = \lambda(\nabla\cdot\vec{u})\vec{I} + \mu(\vec{u}\nabla + \nabla\vec{u})$

代入平衡方程得

$$\nabla\cdot[\lambda(\nabla\cdot\vec{u})\vec{I} + \mu(\vec{u}\nabla + \nabla\vec{u})] + \vec{f}$$

$$= (\lambda+\mu)\nabla(\nabla\cdot\vec{u}) + \mu\nabla^2\vec{u} + \vec{f} = 0$$

$$\therefore \quad \nabla^2\vec{u} + \frac{1}{1-2\nu}\nabla(\nabla\cdot\vec{u}) + \frac{1}{\mu}\vec{f} = \vec{0}$$ (3;3)(以位移表示的弹性力学方程)

应力边条件： $\vec{n}\cdot\vec{T} = \bar{\vec{t}}$

以位移表示的弹性力学方程和边条件构成了以位移表示的弹性力学边值问题.

$$\therefore \quad t_i = \lambda u_{k,k} n_i + \mu u_{i,j} n_j + \mu u_{j,i} n_j$$

$$\cancel{\vec{t} = \lambda(\nabla\cdot\vec{u})\vec{n} + \mu}$$

$$\cancel{\vec{t} = \lambda\vec{n}[(\nabla\cdot\vec{u})\vec{I}] + \mu\vec{n}\cdot(\vec{u}\nabla + \nabla\vec{u})}$$

$$\vec{t} = \lambda(\nabla\cdot\vec{u})\vec{n} + \mu\vec{n}\cdot(\vec{u}\nabla + \nabla\vec{u})$$

注：在无体力条件下，弹性力学的位移分量都是双调和函数，即 $\nabla^2\nabla^2\vec{u} = \vec{0}$

$(f_{i,xxxx} + f_{i,yyyy} + f_{i,zzzz} + 2f_{i,xxyy} + 2f_{i,xxzz} + 2f_{i,yyzz} = 0)$

5.3 应力解法

① 应力协调方程

∵ $\nabla\times\vec{\Gamma}\times\nabla=\vec{0}$ (应变协调方程) 在单连通域下

等价于 $\vec{I}\overset{\times}{\times}(\nabla\times\vec{\Gamma}\times\nabla)=\vec{0}$，即

$$\nabla^2\vec{\Gamma}+\nabla\nabla J(\vec{\Gamma})-(\nabla\cdot\vec{\Gamma})\nabla-\nabla(\vec{\Gamma}\cdot\nabla)=\vec{0}$$

代入本构方程 $\vec{\Gamma}=\frac{1}{E}\left[(1+\nu)\vec{T}-\nu\Theta\vec{I}\right]$，

由
$$\begin{cases} J(\vec{\Gamma})=\dfrac{1-2\nu}{E}\Theta \\ \nabla\cdot\vec{\Gamma}=\vec{\Gamma}\cdot\nabla=\dfrac{1+\nu}{E}\nabla\cdot\vec{T}-\dfrac{\nu}{E}\nabla\Theta \end{cases}$$

得 $(1+\nu)\nabla^2\vec{T}+\nabla\nabla\Theta-\nu\nabla^2\Theta\vec{I}-(1+\nu)\left[(\nabla\cdot\vec{T})\nabla+\nabla(\vec{T}\cdot\nabla)\right]=\vec{0}$

代入平衡方程 $\nabla\cdot\vec{T}+\vec{f}=\vec{0}$ 得

$$(1+\nu)\nabla^2\vec{T}+\nabla\nabla\Theta-\nu\nabla^2\Theta\vec{I}+(1+\nu)\left[\vec{f}\nabla+\nabla\vec{f}\right]=\vec{0}$$

对上式取迹，得

$$\nabla^2\Theta=-\frac{1+\nu}{1-\nu}\nabla\cdot\vec{f}$$

所以

$$\nabla^2\vec{T}+\frac{1}{1+\nu}\nabla\nabla\Theta+\frac{\nu}{1-\nu}(\nabla\cdot\vec{f})\vec{I}+(\vec{f}\nabla+\nabla\vec{f})=\vec{0}$$

这就是Michell应力协调方程。在单连通域内，给定平衡方程、本构方程时，Michell应力协调方程 等价于 几何方程。

指标形式：

$$\nabla^2\sigma_{ij}+\frac{1}{1+\nu}\Theta_{,ij}+\frac{\nu}{1-\nu}(\nabla\cdot\vec{f})\delta_{ij}+f_{i,j}+f_{j,i}=0$$

② 以应力表示的应力边值问题.

应力协调方程、平衡方程 和 边条件 构成了以应力为未知量的应力边值问题：

$$\begin{cases} \nabla^2\vec{T}+\dfrac{1}{1+\nu}\nabla\nabla\Theta+\dfrac{\nu}{1-\nu}(\nabla\cdot\vec{f})\vec{I}+(\vec{f}\nabla+\nabla\vec{f})=\vec{0} & (\Omega) \\ \nabla\cdot\vec{T}+\vec{f}=\vec{0} & (\Omega) \\ \vec{n}\cdot\vec{T}=\vec{t} \quad \text{(应力边条件)} & (\partial\Omega) \end{cases} \quad (6;9)$$

注：无体力条件下，以应力为未知量的应力边值问题为

$$\begin{cases} \nabla^2\vec{T}+\dfrac{1}{1+\nu}\nabla\nabla\Theta=\vec{0} & (\Omega) \\ \nabla\cdot\vec{T}=\vec{0} & (\Omega) \\ \vec{n}\cdot\vec{T}=\vec{t} & (\partial\Omega) \end{cases}$$

此时，问题与

$$\begin{cases} \nabla^2\vec{T}+\dfrac{1}{1+\nu}\nabla\nabla\Theta=\vec{0} & (\Omega) \\ \nabla\cdot\vec{T}=\vec{0} & (\partial\Omega) \\ \vec{n}\cdot\vec{T}=\vec{t} & (\partial\Omega) \end{cases}$$

等价。(6;6)

5.4 叠加原理

原理：对同一个弹性体，在分别受两组外力和边条件限定下的解的和，等于它同时受这两组力和边条件限定下的解。

5.5 Saint-Venant 原理

原理：施加于弹性体上的平衡力系，如果作用点限定于某个给定的球内，那么该平衡力系对远离球的点上所产生的应力是可以忽略的。