第四章. 流体力学的基本方程组.

本章我们将①引入系统和控制体的概念；②给出流体系统的随体导数；③推导积分形式和微分形式的流体力学基本方程组；④流体的积分关系式及其应用；等。

一. 系统与控制体

1. 系统：某一确定流体质点集合的总体。(属拉格朗日描述)
特点：①系统随其内部的流体质点一起运动，系统边界的形状和所围空间的大小在运动过程中可发生变化；②系统与外界无质量的交换(流体质点不能出入系统边界)，但可以有力的相互作用和能量交换；③可以直接利用物理基本定律.

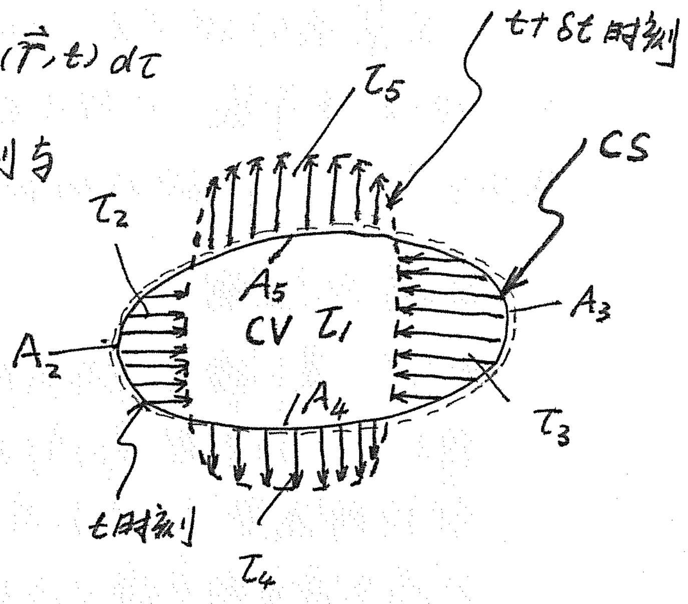
2. 控制体：在流场中从假想或真实存在的流体边界包围，固定不动形状任意的空间体积(当然，控制体也可定义为可运动、可变形的，请看稍后的例子)。包围控制体的边界称为控制面.(属欧拉描述).
特点：①通常来讲，控制体的形状和大小不变，相对给定坐标系不动，流体质点可以自由出入控制体；②控制体通过控制面与外界有质量和能量的交换，有力的相互作用；③不能直接利用物理学定律.

二. 流体系统的随体导数——系统导数(雷诺输运定理)

我们假设t时刻流体中，单位体积的流体物理量(如质量、动量和能量等)的分布函数值为 $\eta(\vec{r},t)$，那么我们分别定义：

1. 系统广延量： $N_{sys}(t)=\int_{sys}\eta(\vec{r},t)\,d\tau$

2. 控制体广延量： $N_{cv}(t)=\int_{cv}\eta(\vec{r},t)\,d\tau$



设在t时刻，系统(sys)恰好运动到与控制体(CV)重合，如右图所示。

$\tau(t) = CV = \tau_1+\tau_2+\tau_3$

在 t+δt 时刻，

$\tau(t+\delta t) = \tau_1+\tau_4+\tau_5$

$\quad = CV-(\tau_2+\tau_3)+\tau_4+\tau_5$

$CS := A_2+A_3+A_4+A_5$

$$\frac{dN_{sys}}{dt} = \lim_{\delta t\to 0}\frac{1}{\delta t}\left[N_{sys}(t+\delta t)-N_{sys}(t)\right]$$

$$=\lim_{\delta t\to 0}\frac{1}{\delta t}\left[\left(\int_{\tau}\eta\,d\tau\right)_{t+\delta t}-\left(\int_{\tau}\eta\,d\tau\right)_t\right]$$

$$=\lim_{\delta t\to 0}\frac{1}{\delta t}\Big[\left(\int_{CV}\eta\,d\tau\right)_{t+\delta t}-\left(\int_{\tau_2}\eta\,d\tau+\int_{\tau_3}\eta\,d\tau\right)_{t+\delta t}$$

$$+\left(\int_{\tau_4}\eta\,d\tau+\int_{\tau_5}\eta\,d\tau\right)_{t+\delta t}-\left(\int_{CV}\eta\,d\tau\right)_t\Big]$$

$$=\underbrace{\lim_{\delta t\to 0}\frac{1}{\delta t}\left[\left(\int_{CV}\eta\,d\tau\right)_{t+\delta t}-\left(\int_{CV}\eta\,d\tau\right)_t\right]}_{\mathrm{I}}$$

$$\underbrace{-\lim_{\delta t\to 0}\frac{1}{\delta t}\left[\int_{\tau_2}\eta\,d\tau+\int_{\tau_3}\eta\,d\tau\right]_{t+\delta t}}_{\mathrm{II}}$$

$$+\underbrace{\lim_{\delta t\to 0}\frac{1}{\delta t}\left[\int_{\tau_4}\eta\,d\tau+\int_{\tau_5}\eta\,d\tau\right]_{t+\delta t}}_{\mathrm{III}}.$$

(1). $\mathrm{I}=\frac{\partial}{\partial t}\int_{CV}\eta\,d\tau$ —— 控制体广延量对时间的偏导数，或控制体广延量的时间变化率.

(2). τ_2 和 τ_3 位于 CV 内部，说明流体在 δt 时间内通过控制面 A_2 和 A_3 流入控制体（规定为负），即：

$$\vec{v}\cdot\vec{n}<0 \Rightarrow d\tau=-(\vec{v}\cdot\vec{n})\,dA\,\delta t$$

$$\mathrm{II}=-\lim_{\delta t\to 0}\frac{1}{\delta t}\left[-\int_{A_2}\eta(\vec{v}\cdot\vec{n})\,dA\,\delta t-\int_{A_3}\eta(\vec{v}\cdot\vec{n})\,dA\,\delta t\right]_{t+\delta t}$$

$$=\int_{A_2}\eta(\vec{v}\cdot\vec{n})\,dA+\int_{A_3}\eta(\vec{v}\cdot\vec{n})\,dA$$

—— 单位时间内流入控制体的广延量.

(3). τ_4 和 τ_5 位于控制体以外，说明流体在 δt 时间内通过控制面 A_4 和 A_5 流出控制体（规定为正），即：

$$\vec{v}\cdot\vec{n}>0 \Rightarrow d\tau=(\vec{v}\cdot\vec{n})\,dA\,\delta t$$

$$\mathrm{III}=\lim_{\delta t\to 0}\frac{1}{\delta t}\left[\int_{A_4}\eta(\vec{v}\cdot\vec{n})\,dA\,\delta t+\int_{A_4}\eta(\vec{v}\cdot\vec{n})\,dA\,\delta t\right]_{t+\delta t}$$

$$=\int_{A_4}\eta(\vec{v}\cdot\vec{n})\,dA+\int_{A_5}\eta(\vec{v}\cdot\vec{n})\,dA$$

—— 单位时间内流出控制体的广延量.

(4) 考虑到 $A_2+A_3+A_4+A_5=CS \Rightarrow \mathrm{II}+\mathrm{III}=\int_{CS}\eta(\vec{v}\cdot\vec{n})\,dA$ 为时刻 t 在单位时间内从控制体 CV 的控制面 CS 净向外输运的物理量.

记 $\frac{DN_{sys}}{Dt} = \frac{dN_{sys}}{dt}$，我们可得：

$$\frac{DN_{sys}}{Dt} = \mathrm{I} + \mathrm{II} + \mathrm{III} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{CV} \eta \, d\tau + \int_{CS} \eta (\vec{v} \cdot \vec{n}) \, dA \quad (4.2.1)$$

即：某一时刻系统总物理量的时间变化率，等于该时刻所在空间域（与之重合的控制体）中总物理量的时间变化率与单位时间内通过控制面净输运的流体物理量之和，称为雷诺输运定理。

讨论：

① 在雷诺输运公式（4.2.1）中，$\frac{\partial}{\partial t}\int_{CV} \eta \, d\tau$ 为系统广延量的当地变化率，反应了流场的非定常性；$\int_{CS} \eta (\vec{v} \cdot \vec{n}) \, dA$ 为系统广延量的迁移变化率，反应了流场的不均匀性。

② 对于定常流场：$\frac{DN_{sys}}{Dt} = \int_{CS} \eta (\vec{v} \cdot \vec{n}) \, dA$，只取决于控制面 CS 上的流动，与控制体内的流动无关。

③ 对于固定且不变形的控制体 CV（？）：

$$\frac{DN_{sys}}{Dt} = \int_{CV} \frac{\partial \eta}{\partial t} \, d\tau + \int_{CS} \eta (\vec{v} \cdot \vec{n}) \, dA \quad (4.2.2)$$

④ 对于更一般的情况：任意运动且可变形的控制体，$(\vec{v} \cdot \vec{n})$ 中的 $\vec{v}$ 应视为流体质点相对于 CS 的速度 $\vec{v_r}$，因此系统导数应为：

$$\frac{DN_{sys}}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{CV} \eta \, d\tau + \int_{CS} \eta (\vec{v_r} \cdot \vec{n}) \, dA \quad (4.2.3)$$

⑤ 本门课主要介绍固定的，或匀速运动的，不变形的控制体。

实际上，雷诺输运定理(4.2.2)（即物质体积分的随体导数）可以应用于更一般的控制体。下面我们从数学上给出推导（考虑流体系统 τ）：

$$\frac{D}{Dt}\int_\tau \varphi\, d\tau = \int_\tau \frac{D\varphi}{Dt} d\tau + \int_\tau \varphi \underbrace{\frac{D}{Dt} d\tau}_{= div(\vec{v})\, d\tau}$$

$$= \int_\tau \left(\frac{D\varphi}{Dt} + \varphi\, div(\vec{v})\right) d\tau$$ ，其中 φ 为标量。

又 $\frac{D\varphi}{Dt} + \varphi \nabla\cdot\vec{v} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \vec{v}\cdot\nabla\varphi + \varphi\nabla\cdot\vec{v} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \nabla\cdot(\varphi\vec{v})$

$$\therefore \frac{D}{Dt}\int_\tau \varphi\, d\tau = \int_\tau \left[\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \nabla\cdot(\varphi\vec{v})\right] d\tau \overset{\text{奥高定理}}{=\!=} \int_\tau \frac{\partial\varphi}{\partial t} d\tau + \int_A \varphi(\vec{v}\cdot\vec{n})\, dA$$

若此时系统 τ 与控制体 CV 重合，则

$$\frac{D}{Dt}\int_\tau \varphi\, d\tau = \int_{CV} \frac{\partial\varphi}{\partial t} d\tau + \int_{CS} \varphi(\vec{v}\cdot\vec{n})\, dA \qquad (4.2.1)'$$

若 φ 为矢量，$\varphi\to\vec{a}$，则我们很容易得：

$$\frac{D}{Dt}\int_\tau \vec{a}\, d\tau = \int_{CV}\left(\frac{D\vec{a}}{Dt} + \vec{a}(\nabla\cdot\vec{v})\right) d\tau = \int_{CV} \frac{\partial\vec{a}}{\partial t} d\tau + \int_{CS} \vec{a}(\vec{v}\cdot\vec{n})\, dA$$

$$(4.2.2)'$$

若 ρ 为流体密度，则：

$$\frac{D}{Dt}\int_\tau \rho\varphi\, d\tau = \frac{D}{Dt}\int_\tau \varphi\, \delta m = \int_\tau \frac{D\varphi}{Dt} dm + \int_\tau \varphi \cancel{\frac{D\delta m}{Dt}}$$

$$= \int_\tau \rho\frac{D\varphi}{Dt} d\tau = \int_{CV} \rho\frac{D\varphi}{Dt} d\tau .$$

$$(4.2.3)'$$

同样道理：

$$\frac{D}{Dt}\int_\tau \rho\vec{a}\, d\tau = \int_{CV} \rho\frac{D\vec{a}}{Dt} d\tau \qquad (4.2.4)'$$

三. 连续性方程:

令 $\eta(\vec{r},t)=\rho(\vec{r},t)$ —— 空间密度分布.

则系统质量为 $m_{sys}=\int_{sys}\rho\,d\tau$

由质量守恒定律: $\dfrac{d\,m_{sys}}{dt}=\dfrac{D\,m_{sys}}{Dt}=0$

由雷诺输运定理(4.2.1), 控制体形式的质量守恒方程为:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{CV}\rho\,d\tau+\int_{CS}\rho(\vec{v}\cdot\vec{n})\,dA=0 \qquad (4.3.1)$$

物理意义: 控制体内流体质量随时间的减少率 = 通过控制面净流出控制体的质量流量.

讨论:

① 若控制体固定且不变形(我们最常用的控制体形式), 则(4.3.1)变为:

$$\int_{CV}\frac{\partial\rho}{\partial t}\,d\tau+\int_{CS}\rho(\vec{v}\cdot\vec{n})\,dA=0 \qquad (4.3.2)$$

注意: (4.3.1)和(4.3.2)都称为 $\boxed{\text{积分形式的连续性方程}}$.

② 由奥-高公式(Gauss)公式(面积分 ⟷ 体积分), (4.3.2)变为:

$$\int_{CV}\frac{\partial\rho}{\partial t}\,d\tau+\int_{CV}\vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{v})\,d\tau=0$$

即: $\displaystyle\int_{CV}\left[\frac{\partial\rho}{\partial t}+\vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{v})\right]d\tau=0$

由于 CV 的任意性, 我们可得(假设被积函数连续):

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{v})=0 \qquad (4.3.3)$$

称为 $\boxed{\text{微分形式的连续性方程}}$.

由质点导数的概念，(4.3.3) 可进一步写成：

$$\underbrace{\frac{\partial\rho}{\partial t}+(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\rho}+\rho\vec{\nabla}\cdot\vec{v}=\underbrace{\frac{D\rho}{Dt}}+\rho\vec{\nabla}\cdot\vec{v}=0 \qquad (4.3.4)$$

下面我们对微分形式的连续性方程 ~~(4.3.3)~~ 和(4.3.4) 展开讨论：

1. 方程应用的唯一限制条件是：同种流体；

2. (4.3.4) $\Rightarrow$ $\vec{\nabla}\cdot\vec{v}=-\frac{1}{\rho}\frac{D\rho}{Dt}=\frac{d(\delta\tau)}{\delta\tau\, dt}$，即：为了维持体积元内流体质量守恒，流体体积的相对变化率（膨胀率）应该等于流体密度相对变化率的负值；流体不可压缩 $\Rightarrow \frac{D\rho}{Dt}=0$；

3. 对不可压缩流体 $\frac{D\rho}{Dt}=0$，则 (4.3.4) 变为：

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{v}=0 \qquad (4.3.5)$$

即不可压缩流体微分形式的连续性方程。

4. 可压缩流体定常流动，其连续性方程由(4.3.3)可得：

$$\vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{v})=0 \qquad (4.3.6)$$

5. (4.3.3) 写成张量形式：

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho v_i)=0 \qquad (4.3.7)$$

写成展开式有：

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho w)}{\partial z}=0 \qquad (4.3.8)$$

③ 固定控制体内的均质不可压缩流体（$\frac{D\rho}{Dt}=0, \rho=const.$），由(4.3.1) 可知：$\int_{CS}(\vec{v}\cdot\vec{n})dA=0$ (4.3.9)

即：通过控制面CS的净体积流量为零。

对具有多个一维出入口的控制体，我们有：

$$\sum Q_{out} = \sum Q_{in} \qquad (4.3.10)$$

或

$$\sum (VA)_{out} = \sum (VA)_{in} \qquad (4.3.11)$$

其中 V 为一维出入口处的流体平均速度，A 为面积。

④ 对定常运动的流体（不管可压与否）；由（4.3.2）可推出（固定控制体）：

$$\int_{CS} \rho(\vec{v}\cdot\vec{n})\,dA = 0 \qquad (4.3.12)$$

即：通过控制面CS的净质量流量为零。

对具有多个一维出入口的控制体：

$$\sum \dot{m}_{out} = \sum \dot{m}_{in} \qquad (4.3.13)$$

或

$$\sum (\rho VA)_{out} = \sum (\rho VA)_{in} \qquad (4.3.14)$$

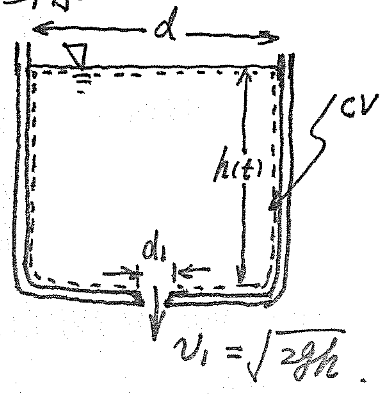
⑤ 对于运动的控制体，积分形式的连续性方程写作：

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{CV} \rho\, d\tau + \int_{CS} \rho(\vec{v}_r\cdot\vec{n})\,dA = 0 \qquad (4.3.15)$$

例.(J) B4.2.1B. 可变形控制体连续性方程的应用.

已知：$d = 1m$，$d_1 = 0.1m$，$h(t=0) = 1m$.

求：从孔口打开到水流尽所需时间 T.



解：$\frac{\partial}{\partial t}\int_{CV} \rho\, d\tau + \int_{CS} \rho(\vec{v}_r\cdot\vec{n})\,dA = 0$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}(\rho A h) + \rho V_1 A_1 = 0$$

$$\Rightarrow \rho A \frac{dh}{dt} + \rho\sqrt{2gh}\, A_1 = 0$$

$$\Rightarrow dt = -\frac{A}{\sqrt{2g}\, A_1} h^{-\frac{1}{2}}\, dh$$

$$\Rightarrow T = \int_0^T dt = -\frac{A}{\sqrt{2g}\,A_1}\int_{h_0=1}^{h_1=0} h^{-\frac{1}{2}}\, dh$$

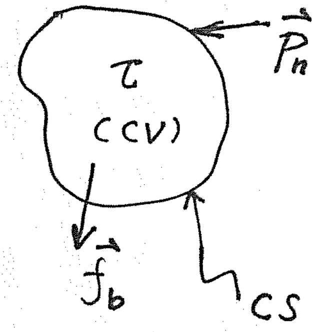
四. 动量方程.

(一) 固定控制体情况:

在流场中取任一体积τ的流体（系统），在某时刻正好与控制体CV重合.

单位体积流体的动量：$\eta = \rho\vec{v}$ （分布量）

流体系统的动量：$\vec{P}_{sys} = \int_{sys}\rho\vec{v}\,d\tau$



作用在τ(CV)上和CS上的力包括:

质量力（体力）：$\int_{CV}\rho\vec{f}_b\,d\tau$

表面力：$\int_{CS}\vec{p}_n\,dA$

总作用力：$\Sigma\vec{F} = \int_{CV}\rho\vec{f}_b\,d\tau + \int_{CS}\vec{p}_n\,dA$

由动量定理:

$$\frac{D\vec{P}_{sys}}{Dt} = \frac{D}{Dt}\int_{sys}\rho\vec{v}\,d\tau = \Sigma\vec{F} = \int_{CV}\rho\vec{f}_b\,d\tau + \int_{CS}\vec{p}_n\,dA$$

应用雷诺输运定理有:

$$\frac{D}{Dt}\int_{\tau}\rho\vec{v}\,d\tau = \boxed{\int_{CV}\frac{\partial}{\partial t}(\rho\vec{v})\,d\tau + \int_{CS}\rho\vec{v}(\vec{v}\cdot\vec{n})\,dA = \int_{CV}\rho\vec{f}_b\,d\tau + \int_{CS}\vec{p}_n\,dA} \qquad (4.4.1)$$

(4.4.1) 称为积分形式的动量方程.

考虑(4.2.4)′，则(4.4.1)可进一步写为:

$$\frac{D}{Dt}\int_{\tau}\rho\vec{v}\,d\tau = \int_{CV}\rho\frac{D\vec{v}}{Dt}\,d\tau = \int_{CV}\rho\vec{f}_b\,d\tau + \underbrace{\int_{CS}\vec{n}\cdot\bar{\bar{P}}\,dA}_{\text{由奥高公式：}\int_{CV}\nabla\cdot\bar{\bar{P}}\,dA}$$

因此，上式 $\Rightarrow \int_{CV}\left(\rho\frac{D\vec{v}}{Dt}-\rho\vec{f}_b-\vec{\nabla}\cdot\overline{\overline{P}}\right)d\tau=0$

由于 τ 任意，若上式中被积函数连续，则有

$$\rho\frac{D\vec{v}}{Dt}-\rho\vec{f}_b-\vec{\nabla}\cdot\overline{\overline{P}}=0$$

即：
$$\boxed{\rho\frac{D\vec{v}}{Dt}=\rho\vec{f}_b+\vec{\nabla}\cdot\overline{\overline{P}}}\qquad(4.4.2)$$

(4.4.2) 称为微分形式的动量方程（运动方程）。

这其中：

$\rho\frac{D\vec{v}}{Dt}$ 表示作用在单位体积流体上的惯性力；

$\rho\vec{f}_b$ 表示作用在单位体积流体上的质量力；

$\vec{\nabla}\cdot\overline{\overline{P}}$ 表示单位体积流体上应力张量的散度，是与面力等效的体力分布函数。

(4.4.2) 用张量表示法可写成：

$$\rho\frac{Du_i}{Dt}=\rho f_i+\frac{\partial}{\partial x_j}P_{ij}\qquad(4.4.3)$$

1. 由广义牛顿粘性定律 — 本构关系 (2.9.4)，（满足此本构关系的流体称为牛顿流体）。

$$P_{ij}=-p\delta_{ij}+2\mu\left(S_{ij}-\frac{1}{3}S_{kk}\delta_{ij}\right)$$

(4.4.3) 可写成：

$$\rho\frac{Du_i}{Dt}=\rho f_i-\frac{\partial p}{\partial x_i}+\frac{\partial}{\partial x_j}2\mu\left(S_{ij}-\frac{1}{3}S_{kk}\delta_{ij}\right)\qquad(4.4.4)$$

分量式为
$$\begin{cases}\rho\frac{Du}{Dt}=\rho f_x-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}\left[2\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{1}{3}\vec{\nabla}\cdot\vec{v}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)\right]\\ \rho\frac{Dv}{Dt}=\rho f_y-\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[2\mu\left(\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{1}{3}\vec{\nabla}\cdot\vec{v}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)\right]\\ \rho\frac{Dw}{Dt}=\rho f_z-\frac{\partial p}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[2\mu\left(\frac{\partial w}{\partial z}-\frac{1}{3}\vec{\nabla}\cdot\vec{v}\right)\right]\end{cases}$$

(4.4.5)

连续性方程(4.3.4)同(4.4.4)一起通常被称为Navier－Stokes(N－S)方程.

对不可压缩流体 $\nabla\cdot\vec{v}=S_{kk}=0$. 若粘性系数 $\mu=$ 常数,则(4.4.4)变为:

$$\rho\frac{Du_i}{Dt}=\rho f_i-\frac{\partial p}{\partial x_i}+\mu\frac{\partial}{\partial x_j}(2S_{ij}) \qquad (4.4.6)$$

由于 $\frac{\partial}{\partial x_j}2S_{ij}=\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)=\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j\partial x_j}$

所以(4.4.6)成为:

$$\rho\frac{Du_i}{Dt}=\rho f_i-\frac{\partial p}{\partial x_i}+\mu\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j\partial x_j} \qquad (4.4.7)$$

写成矢量式:

不可压流体的N-S方程(动量方程)

$$\underbrace{\rho\frac{D\vec{u}}{Dt}}_{\text{惯性力}}=\underbrace{\rho\vec{f_b}}_{\text{体积力}}-\underbrace{\nabla p}_{\substack{\text{压差力}\\\text{(压力梯度)}}}+\underbrace{\mu\nabla^2\vec{u}}_{\text{粘性力(梯度)}} \qquad (4.4.8).$$

2. 欧拉方程:

无粘流体(也称理想流体) $\mu=0$. 所满足的动量方程

$$\rho\frac{D\vec{u}}{Dt}=\rho\vec{f_b}-\nabla p \qquad (4.4.9)$$

称为欧拉方程.

3. 静力学方程:

当流体静止不动时,(4.4.8)变为

$$\rho\vec{f}_b = \vec{\nabla} p \qquad (4.4.10)$$

与第三章中导出的流体平衡的基本方程一致.

4. 兰姆-葛罗米柯方程:

由场论知识: $\boxed{(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u} = \vec{\nabla}\frac{|\vec{u}|^2}{2} - \vec{u}\times\vec{\omega}}$, 则微分形式的动量方程

$\vec{\omega} = \nabla\times\vec{u}$

(4.4.2) 可以改写成:

$$\rho\frac{D\vec{u}}{Dt} = \rho\left[\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} + (\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u}\right]$$

$$= \rho\left[\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} + \vec{\nabla}\frac{|\vec{u}|^2}{2} - \vec{u}\times\vec{\omega}\right] = \rho\vec{f}_b + \vec{\nabla}\cdot\overline{\overline{P}}$$

即: $$\boxed{\rho\left(\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} + \vec{\nabla}\frac{|\vec{u}|^2}{2} - \vec{u}\times\vec{\omega}\right) = \rho\vec{f}_b + \vec{\nabla}\cdot\overline{\overline{P}}} \qquad (4.4.11)$$

这就是所谓兰姆-葛罗米柯 (Lamb - Громеко) 形式的运动方程.
其中 $\vec{\omega}\times\vec{u} = -\vec{u}\times\vec{\omega}$ 称为 Lamb 矢量.

(1) 对于牛顿流体, (4.4.11) 写作:

$$\rho\left(\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} + \vec{\nabla}\frac{|\vec{u}|^2}{2} - \vec{u}\times\vec{\omega}\right) = \rho\vec{f}_b - \vec{\nabla}p + \vec{\nabla}\cdot\left[2\mu\left(\overline{\overline{S}} - \frac{1}{3}\vec{\nabla}\cdot\vec{u}\,\overline{\overline{I}}\right)\right] \qquad (4.4.12)$$

(2) 若流体不可压, 且 μ = 常数, 则:

$$\rho\left(\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} + \vec{\nabla}\frac{|\vec{u}|^2}{2} - \vec{u}\times\vec{\omega}\right) = \rho\vec{f}_b - \vec{\nabla}p + \mu\nabla^2\vec{u} \qquad (4.4.13)$$

(3) 理想流体 ($\mu\equiv 0$), 兰姆-葛罗米柯运动方程写成:

$$\rho\left(\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} + \vec{\nabla}\frac{|\vec{u}|}{2} - \vec{u}\times\vec{\omega}\right) = \rho\vec{f}_b - \vec{\nabla}p \qquad (4.4.14).$$

5. 控制体固定且流动定常时，积分形式的动量方程为

$$\int_{CS} \rho\vec{v}(\vec{v}\cdot\vec{n})dA = \Sigma\vec{F} \qquad (4.4.15)$$

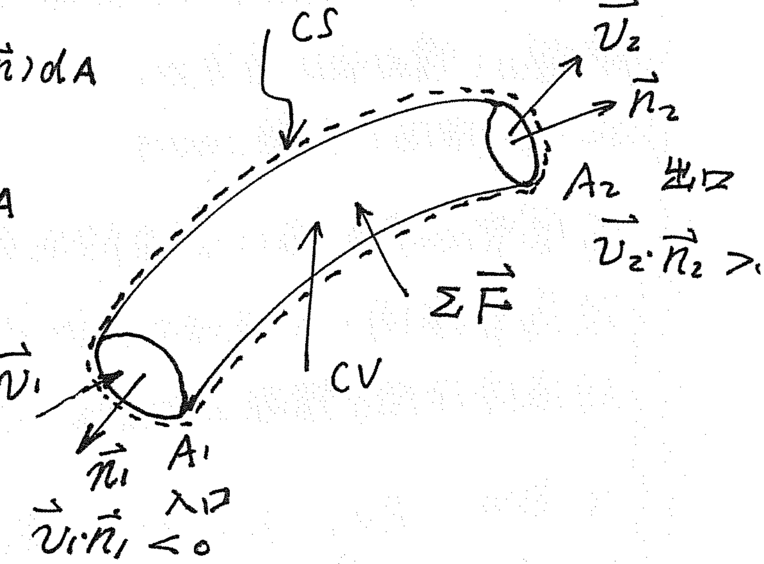
即：作用在控制体上的合外力＝从控制面上净流出的动量流量。

6. 沿流管的定常流：

$$\int_{CS} \rho\vec{v}(\vec{v}\cdot\vec{n})dA = \int_{A_1} \rho\vec{v}(\vec{v}\cdot\vec{n})dA + \int_{A_2} \rho\vec{v}(\vec{v}\cdot\vec{n})dA$$

$$= \int_{A_2} \vec{v}\,d\dot{m} - \int_{A_1} \vec{v}\,d\dot{m}$$

$$= \Sigma\vec{F} \qquad (4.4.16)$$



若采用平均速度：

$$\int_{CS} \rho\vec{v}(\vec{v}\cdot\vec{n})dA = \beta_2\vec{V}_2\dot{m}_2 - \beta_1\vec{V}_1\dot{m}_1 = \Sigma\vec{F} \qquad (4.4.17)$$

其中 β_1 和 β_2 为动量修正因子，工程上可近似认为 $\beta_1=\beta_2=1$（认为流动一般为湍流）。

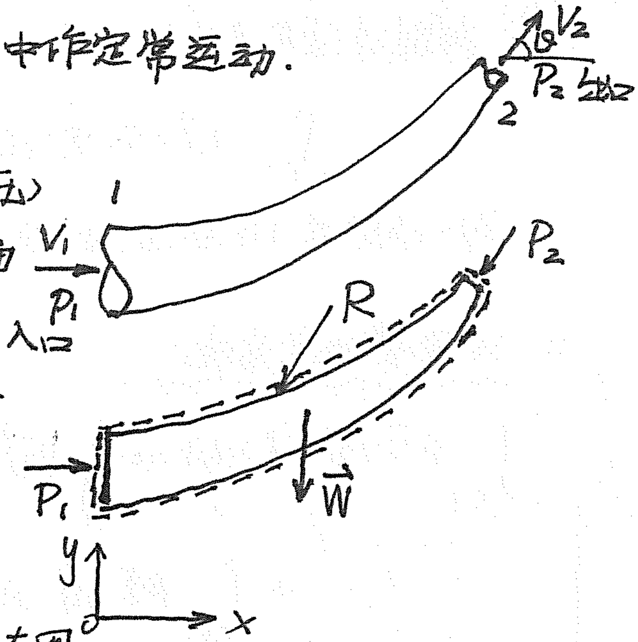
即：$$\vec{V}_2\dot{m}_2 - \vec{V}_1\dot{m}_1 = \Sigma\vec{F} \qquad (4.4.18)$$

(1) 对一维定常管流；由连续性方程：$\dot{m}_{in} = \dot{m}_{out} = \dot{m}$

因此，可得一维定常流的动量方程：

$$\dot{m}(\vec{V}_{out} - \vec{V}_{in}) = \Sigma\vec{F} \qquad (4.4.19)$$

例题: 已知一液体在弧形收缩圆管中作定常运动.
入口,出口的法线夹角θ.
入口处的截面积、速度和压强(表压)分别为 A_1, V_1 和 P_1, 而出口处的截面积.速度和压强分别为 A_2, V_2 和 P_2. 液体密度为 ρ, 假定为一维流动, 忽略摩擦力, 管内液体重量为 W.
求液体作用于管壁上的力.



沿圆管内壁取液体流为控制体如右图:
设圆管作用于液体上的力为 $\vec{R}$, 其 x 和 y 方向分量分别为 R_x 和 R_y.
则液体作用于管壁上的力为 $-\vec{R}$.

x: 方向: $P_1A_1 - P_2A_2\cos\theta + R_x = \dot{m}_2 V_2\cos\theta - \dot{m}_1 V_1$

y: 方向: $-P_2A_2\sin\theta - W + R_y = \dot{m}_2 V_2\sin\theta$

由连续性条件: $\dot{m}_2 = \dot{m}_1 = \dot{m} = \rho A_1 V_1$

$$\therefore \quad R_x = \dot{m}(V_2\cos\theta - V_1) - P_1A_1 + P_2A_2\cos\theta$$

$$R_y = \dot{m}V_2\sin\theta + P_2A_2\sin\theta + W$$

则液体作用于管壁上的力为:

$$-\vec{R} = [P_1A_1 - P_2A_2\cos\theta - \dot{m}(V_2\cos\theta - V_1)]\vec{i} - (\dot{m}V_2\sin\theta + P_2A_2\sin\theta + W)\vec{j}.$$

（二）对于匀速运动但不变形的控制体.

此时坐标系建立在控制体上，为惯性系：令 $\eta=\rho\vec{v}_r$. 其中 $\vec{v}_r$ 为相对速度. 那么，匀速运动控制体条件下，流体运动的积分形式的动量方程为：

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{CV}\rho\vec{v}_r\,d\tau+\int_{CS}\rho\vec{v}_r(\vec{v}_r\cdot\vec{n})\,dA=\sum\vec{F} \quad (4.4.15)$$

1. 流动定常情况：

$$\int_{CS}\rho\vec{v}_r(\vec{v}_r\cdot\vec{n})\,dA=\sum\vec{F} \quad (4.4.16)$$

2. 具有多个一维出入口的控制体在定常流动情况下：

$$\sum(\dot{m}_r\vec{V}_r)_{out}-\sum(\dot{m}_r\vec{V}_r)_{in}=\sum\vec{F} \quad (4.4.17)$$

其中 $\dot{m}_r$ 为动坐标中的质量流量.

讨论：

① 微分形式的流体力学基本方程还可以将基本的物理定律应用于流体元（控制体元），并借助质点导数的概念来得到.

② 微分方程组反映了流场中一点邻域内流体物理量的微分关系. 求解微分方程组可以获得丰富的流体物理量空间（时间）分布信息，对了解流场结构及流体作用的微观机制极为重要，适合用于逐点分析流场的流动细节.

③ 如果我们只关心流体对有限区域边界的总体作用效果，那么我们无需知道流场的内部细节，应用积分形式的方程组更为经济和方便. 积分方法还能够通过巧妙选择CV和CS来规避物理量在流场局部的间断。积分方法在工程上应用很广泛。

五．边界条件与初始条件．

几乎所有的流体流动都要满足流体力学基本方程组．然而自然界中的流动形态却千差万别。通常来讲，只有确定了边界条件和初始条件，流体的运动形态才能被独一无二地确定下来。边界条件和初始条件需要同时满足数学和物理要求．

（一）边界条件：

1．固壁边界条件

在连续介质假设成立的条件下，粘性流体的宏观运动应该满足固壁面无滑移条件（或速度连续条件）。（稀薄气体运动和高超声速气体运动除外）．

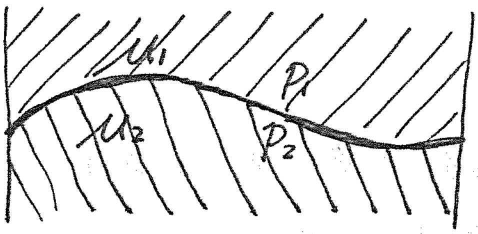
对于理想流体（粘性为零）：无需满足无滑移条件，但法向速度仍应连续，即 $v_{n流}=v_{n固}$．

2．对内流问题，出、入口的速度和压强、及温度等为已知（一般由实验测量提供）。有时也会给定这些物理量的导数作为边界条件．

3．对外流问题，人们关心得更多的是无穷远处的条件，通常给定 $r\to\infty$，$v=v_\infty$，$p=p_\infty$，$T=T_\infty$，$\rho=\rho_\infty$．

4. 两种液体交界面处，速度、压强和粘性切应力应连续.

$\vec{v}_1=\vec{v}_2$ ，$p_1=p_2$ ，$\tau_1=\tau_2$



5. 气-液分界面（即液体自由面）处：

(1) 自由面的运动学条件：

设自由面方程为 $F(\vec{x},t)=0$

则 $\left.\frac{DF}{Dt}\right|_{F=0}=0$，即

$$\frac{DF}{Dt}=\frac{\partial F}{\partial t}+(\vec{u}\cdot\nabla)F=0 \quad \text{（在}F=0\text{面上）}$$

又 $\vec{n}=\frac{\nabla F}{|\nabla F|}$，则 $\boxed{\vec{u}\cdot\vec{n}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial t}}{|\nabla F|} \quad \text{（在}F=0\text{面上）}}$

(2) 自由面上的动力学条件：

若考虑表面张力，则界面两侧压强差与表面张力平衡：

$$\Delta p=\sigma\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)$$

若忽略表面张力：$\Delta p=p_{液}-p_{气}=0 \Rightarrow p_{液}=p_{气}$.

(二) 初始条件.

1. 如果流体运动定常，我们无需提出初始条件.

2. 若研究非定常流体运动，我们应该给出初始时刻 $t=t_0$ 时，流体

运动应满足的初始状态(初始物理量分布),即:

$$\begin{cases} \vec{v}(\vec{x}, t_0) = v_0(\vec{x}) \\ p(\vec{x}, t_0) = p_0(\vec{x}) \\ \rho(\vec{x}, t_0) = \rho_0(\vec{x}) \\ T(\vec{x}, t_0) = T_0(\vec{x}) \end{cases}$$

六. 伯努利(Bernoulli)积分和拉格朗日(Lagrange)积分.

我们考察理想流体兰姆-葛罗米柯形式的运动方程(欧拉方程)(4.4.14):

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \nabla \frac{|\vec{u}|^2}{2} - \vec{u} \times \vec{\omega} = \vec{f}_b - \frac{1}{\rho} \nabla p. \quad (4.6.1)$$

若: ① 流体正压:(即ρ只是p的函数)

则定义正压函数 $P = \int \frac{dp}{\rho} \Rightarrow dP = \frac{dp}{\rho}$

因此, $\frac{1}{\rho} \nabla p = \nabla P$.

② 质量力(体力)有势(如只在重力场作用下):

则: $\vec{f}_b = -\nabla \Pi$, 其中Π为质量力势函数(对于重力场情况 $\Pi = gz$).

那么, 理想正压流体在有势外力作用下的运动方程(由(4.6.1))可写成:

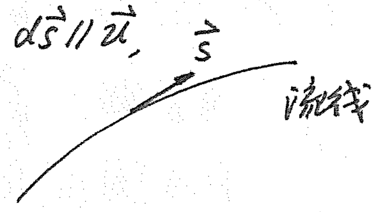
$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \nabla \left(\frac{|\vec{u}|^2}{2} + P + \Pi \right) = \vec{u} \times \vec{\omega} \quad (4.6.2)$$

注:(4.6.2)适用于无旋或有旋, 可压或不可压, 定常或非定常流动.

(一) 如果流体流动定常, 则有:

$$\nabla \left(\frac{|\vec{u}|^2}{2} + P + \Pi \right) = \vec{u} \times \vec{\omega} \quad (4.6.3)$$

现在我们用流体线元 $d\vec{s}$ 点乘(4.6.3)式，考虑到 $d\vec{s}\parallel\vec{u}$，



有： $d\vec{s}\cdot(\vec{u}\times\vec{\omega})=0$，且：

$$d\vec{s}\cdot\nabla\left(\frac{|\vec{u}|^2}{2}+P+\Pi\right)=0$$

$$\Rightarrow d_s\left[\frac{|\vec{u}|^2}{2}+P+\Pi\right]=0$$

沿流线积分上式得： $$\boxed{\frac{|\vec{u}|^2}{2}+P+\Pi=C(\psi)}\qquad(4.6.4)$$

其中 C 为积分常数，它沿同一条流线取同一常数值，在不同的流线上可取不同的值，是流线号码 ψ 的函数。

(4.6.4)最早由 Bernoulli 在1738年导出，因此称为伯努利积分(或伯努利方程)。

1. 对于不可压缩重流体(如水)，可认为密度 ρ 近似为常数：

$$P=\int\frac{dp}{\rho(p)}=\frac{p}{\rho},\qquad \Pi=gz$$

则伯努利积分(4.6.4)可写成：

$$\frac{|\vec{u}|^2}{2}+\frac{p}{\rho}+gz=C(\psi)\qquad(4.6.5)$$

注：(4.6.5)是在欧拉方程出现(1755年)之前，伯努利通过对容器的孔口出流和变截面管道进行大量仔细观察和测量分析而先提出的(1738年)，而后欧拉(1757年)将其推广到可压缩流体情况。

讨论：伯努利定理(积分)(4.6.5)在流体力学领域，特别是在水力学中占有相当重要的地位。

① $\frac{|\vec{u}|^2}{2}$ 表示单位质量流体的动能；gz 表示单位质量流体的位置势能；$\frac{p}{\rho}$ 表示单位质量流体的压强势能，即流体从压强 p 向周围流体做功。(4.6.5) 表明单位质量内流体的总机械能沿同一流线守恒，$C(\psi)$ 为不同流线上的总能量。

② (4.6.5) 各项同时除以重力加速度 g 得：

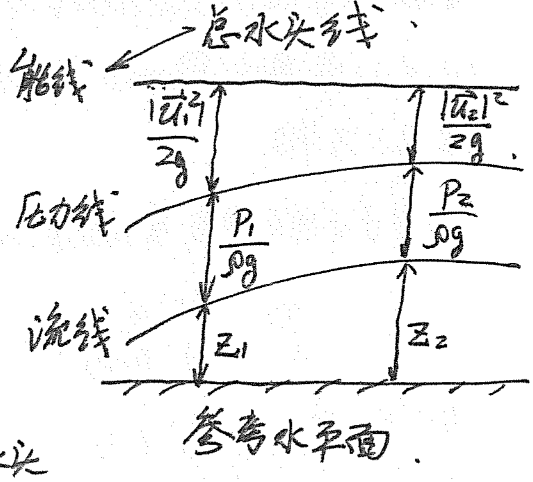
$$\frac{|\vec{u}|^2}{2g} + \frac{p}{\rho g} + z = C_1(\psi) \qquad (4.6.6)$$

各项都具有长度量纲：

$\frac{|\vec{u}|^2}{2g}$：称为速度高度，或速度水头

$\frac{p}{\rho g}$：称为压力高度，或压力水头

z：称为位势头，或位置水头。



即：速度头、压力头和位势头三者之和（总水头）沿流线不变，也就是说总水头线沿流线是一水平直线。

③ 伯努利方程（积分）经常被用于近似描述一维定常管道或渠道流动（i. 取各截面上的物理量的平均值，或 2. 对方程中各项进行修正）。

例如，沿总流的 Bernoulli 方程：

总机械能沿总流守恒：$\int_A \left(\frac{v^2}{2} + gz + \frac{p}{\rho}\right)\rho\, dQ = const.$

沿总流：让平均速度代替非均匀速度分布：$\int_A \frac{v^2}{2}\rho\, dQ = \alpha\frac{V^2}{2}\rho Q$

其中 α 为动能修正因子，V 为沿总流的平均速度。

若总流截面A满足缓变条件；则有：

$$\frac{\alpha V^2}{2}+gz+\frac{p}{\rho}=const \qquad (沿总流成立)\ (4.6.7)$$

称为沿总流的Bernoulli方程。即在有效截面上，按质量流量计算的总机械能沿总流守恒.

2. 理想、绝热的可压缩流体（可压缩等熵流体）：

压力—密度关系： $p=\vartheta^{\gamma}(\psi)\rho^{\gamma} \Rightarrow \frac{1}{\rho}=\frac{\vartheta(\psi)}{p^{\frac{1}{\gamma}}}$ (4.6.8)

压力函数：

$$P=\int\frac{dp}{\rho}=\int\frac{\vartheta(\psi)dp}{p^{\frac{1}{\gamma}}}=\vartheta(\psi)\frac{p^{1-\frac{1}{\gamma}}}{1-\frac{1}{\gamma}}=\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p}{\rho} \qquad (4.6.9)$$

其中 $\gamma=\frac{c_p}{c_v}$ 为比热比.

则伯努力积分(4.6.4)变为：

$$\frac{|\vec{u}|^2}{2}+\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p}{\rho}+\Pi=C(\psi) \qquad (4.6.10)$$

这就是等熵过程中理想可压缩流体的伯努利积分式.

若外力可忽略：即 $\Pi\to 0$，那么：

$$\frac{|\vec{u}|^2}{2}+\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p}{\rho}=C(\psi) \qquad (4.6.11)$$

描述了压力、密度和速度之间的转换关系。

(二) 如果流体流动非定常，但流动无旋，即 $\vec{\omega}=\nabla\times\vec{u}=0$.

则根据无旋场必为有势场的场论知识，存在速度势 φ，使得

$$\vec{u}=\nabla\varphi \qquad (4.6.12)$$

那么：(4.6.2) 式变为：

$$\frac{\partial \vec{\nabla}\varphi}{\partial t}+\vec{\nabla}\left(\frac{|\vec{u}|^2}{2}+\mathcal{P}+\Pi\right)=0 \qquad (4.6.13)$$

由于时-空导数符号可以互换 $\Rightarrow$

$$\vec{\nabla}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}+\frac{|\vec{u}|^2}{2}+\mathcal{P}+\Pi\right)=0$$

即括号中的函数与空间坐标无关，只与时间 t 有关，因此

$$\boxed{\frac{\partial \varphi}{\partial t}+\frac{|\vec{u}|^2}{2}+\mathcal{P}+\Pi=C(t)} \qquad (4.6.14)$$

其中 $C(t)$ 是时间 t 的函数，由边界条件可以确定。对于同一时刻 $C(t)$ 在全流场取同一数值。(4.6.14) 称为拉格朗日积分。

1. 对不可压缩重流体，我们有：

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}+\frac{|\vec{u}|^2}{2}+\frac{p}{\rho}+gz=C(t) \qquad (4.6.15)$$

2. 对可压缩等熵流体，我们有：

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}+\frac{|\vec{u}|^2}{2}+\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p}{\rho}+\Pi=C(t) \qquad (4.6.16)$$

(三) 如果流体流动定常且无旋，那么在 (4.6.14) 中，

$\frac{\partial \varphi}{\partial t}=0$，则拉格朗日积分关系 (4.6.14) 变为：

$$\frac{|\vec{u}|^2}{2}+\mathcal{P}+\Pi=C \qquad (4.6.17)$$

其中 C 在全流场任何点取同一数值。(4.6.17) 被称为伯努利-拉格朗日积分。

1. 对不可压缩流体，我们有：

$$\frac{|\vec{u}|^2}{2}+\frac{p}{\rho}+gz=C \qquad (4.6.18)$$

若外力可略，则 $\frac{|\vec{u}|^2}{2}+\frac{p}{\rho}=C$ (4.6.19)

2. 对可压缩等熵流体，外力可略，则有：

$$\frac{|\vec{u}|^2}{2}+\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p}{\rho}=C \qquad (4.6.20)$$

讨论：

(1) 以上三种积分关系，即伯努利积分、拉格朗日积分和伯努利-拉格朗日积分的应用大前提条件是：理想流体、正压、体力有势。伯努利积分要求流动定常，沿流线成立，积分常数与流线有关；伯努利-拉格朗日积分要求流动定常且无旋，在全流场成立，积分常数与空间位置无关；拉格朗日积分只要求流动无旋，全流场成立，积分常数是时间t的函数。

(2) 伯努利积分(4.6.4)是沿流线积分导出的。同样地，我们对(4.6.3)沿涡线积分可得到沿涡线成立的伯努利方程：

$$\frac{|\vec{u}|^2}{2}+P+\pi=c(\omega) \qquad (4.6.21)$$

其中 $c(\omega)$ 为积分常数，是涡线号码的函数。

(3) 三种积分关系式的物理意义都是在某一条件下，总(机械)能量守恒。

(4) 可以考虑粘性的影响，在 Bernoulli 方程中加入机械能的耗散项来描述粘性流体的运动。

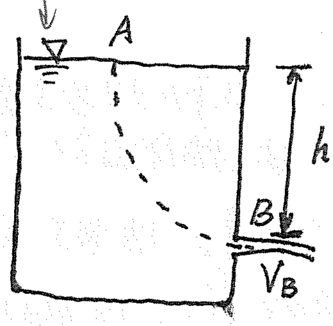
(5) 对随时间变化非常缓慢的流动，可以认为每一时刻的流动是定常的（准定常），从而采用伯努利方程。

(6) 伯努利方程不宜用于有较大逆压梯度和强烈混合的流动（有机械能的耗损）。

(7) 伯努利方程不宜用于通过一装置的流动（有机械能的输入和输出）。

七. 流体积分关系式的应用

符号"▽"表示大气压强面.[丁(上) P97]



1. 小孔出流问题:

如右图：有一很大容器盛满水，在距自由面 h 处的侧壁开一小孔，水从小孔流入大气，求小孔射流的流速 V_B.（假定 $S_B \ll S_A$）

令 V_A 和 V_B 分别为自由面处 A点和小孔处 B点的平均流速。由不可压流体的连续性方程:

$$S_A V_A = S_B V_B \Rightarrow \frac{V_A}{V_B} = \frac{S_B}{S_A} \ll 1 .$$

因此，可认为 $V_A \approx 0$. 即不同时刻容器内水流的状况近似一样，流动近似定常。沿流线应用伯努利积分:

1. $\mu=0$
2. $\Pi = gz$
3. $P = \frac{p}{\rho}$
4. 定常

$$\frac{V_B^2}{2} + gz_B + \frac{p_B}{\rho} = \frac{V_A^2}{2} + gz_A + \frac{p_A}{\rho}$$

注意到 $V_A \approx 0$，$p_A = p_B = p_{atm}$

所以，我们有 $\frac{V_B^2}{2} = g(z_A - z_B) = gh$

$$\Rightarrow V_B = \sqrt{2gh} . \quad (4.6.22)$$

讨论：① (4.6.22) 被称为托里切利公式，表明小孔处流速与质点自液面A处自由下落到达小孔时的速度相同；

② (4.6.22) 是按照理想流体定常计算得到的。在实际情况下，由于粘性阻力，孔嘴的形状及非定常影响，射流速度要给予修正（通常小于理想计算值）

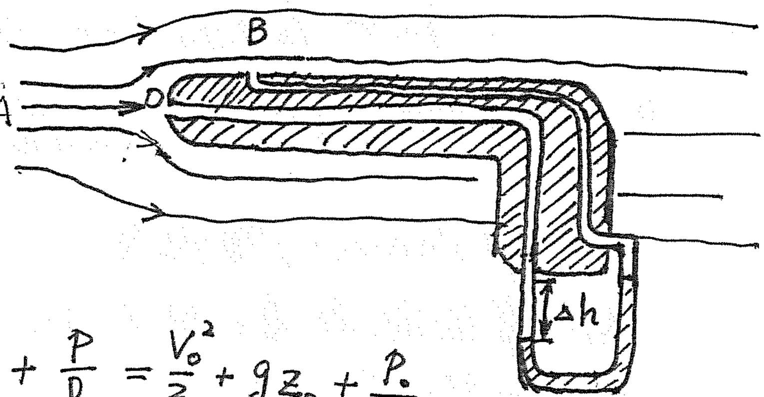
③ 孔口射流截面积自孔口起不断收缩，到一定距离后才会形成近似平行的流线。通常通过孔B的流量：

$$Q = a S_B \sqrt{2gh} \qquad (4.6.23)$$

a 称为收缩系数，(对于圆孔来讲，一般取 0.61～0.64)。

2. 皮托测速管：（又称皮托—静压管）。

假设均匀来流，速度 V，静压为 p，密度为 ρ，U 形管中液体密度为 ρ_m，试确定 V 与 Δh 之间的关系。



伯努利积分
1- $\mu=0$
2- $\Pi=gz$
3- $P=\frac{p}{\rho}$
4- $\frac{\partial}{\partial t}=0$

沿流线 AOB：$\frac{V^2}{2} + gz_A + \frac{p}{\rho} = \frac{V_0^2}{2} + gz_0 + \frac{p_0}{\rho}$

注意：$V_0 = 0$（驻点），$z_A \approx z_0$。

因此：$\underset{\text{总压}}{p_0} = p + \underset{\text{动压}}{\frac{1}{2}\rho V^2} \Rightarrow V = \sqrt{\frac{2(p_0 - p)}{\rho}} \qquad (4.6.24)$

由于AB两点位差可以忽略，则 $p_B = p$

在U形管中有压强关系：$p_0 + \rho g\Delta h = p_B + \rho_m g\Delta h$（静压关系）

$$\Rightarrow \quad p_0 - p = (\rho_m - \rho) g\Delta h$$

代入(4.6.24)，得：

$$V = \sqrt{\frac{\rho_m}{\rho} - 1}\cdot\sqrt{2g\Delta h} \qquad (4.6.25)$$

通常情况下：由于粘性的影响，或皮托管加工的误差等因素，需人为对上述测速公式进行修正：

$$V = k\sqrt{\frac{\rho_m}{\rho} - 1}\cdot\sqrt{2g\Delta h} \qquad (4.6.26)$$

k为修正因子。

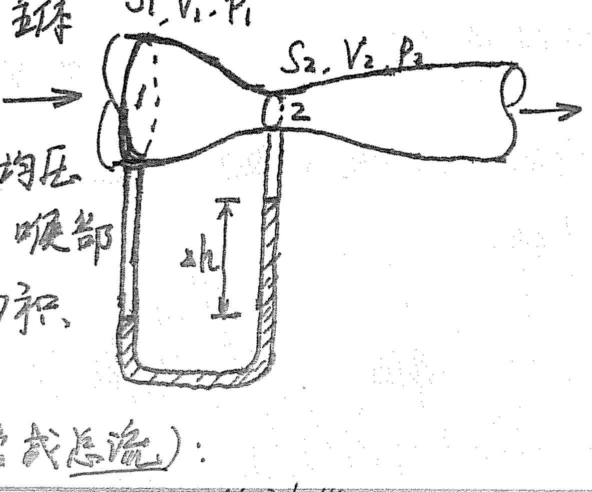
若不考虑来流流体在U形管中的位势压差（如空气），则

$$p_0 = p_B + \rho_m g\Delta h \Rightarrow p_0 - p = \rho_m g\Delta h$$

那么测速公式可写成：$V = k\sqrt{\rho_m/\rho}\sqrt{2g\Delta h}$ (4.6.27).

3. 文丘里(Venturi)管流量计.

测量管道流流量的装置，主体由收缩—扩张管构成.



设最大截面处的平均速度、平均压强和截面积为 V_1, p_1 和 S_1，喉部的平均速度、平均压强和截面积为 V_2, p_2 和 S_2.

1. $\mu = 0$
2. $\Pi = gz$
3. $P = \frac{p}{\rho}$
4. $\frac{\partial}{\partial t} = 0$

由Bernoulli积分(沿流管或总流)：

截面满足缓变条件.

$$\frac{V_1^2}{2}+\frac{p_1}{\rho}=\frac{V_2^2}{2}+\frac{p_2}{\rho} \qquad (\alpha=1)$$

$$\Rightarrow \quad \Delta p=p_1-p_2=\frac{\rho}{2}(V_2^2-V_1^2)=\frac{\rho}{2}V_2^2\left[1-\frac{V_1^2}{V_2^2}\right] \qquad (4.6.28)$$

由连续性方程：$V_1S_1=V_2S_2=Q$

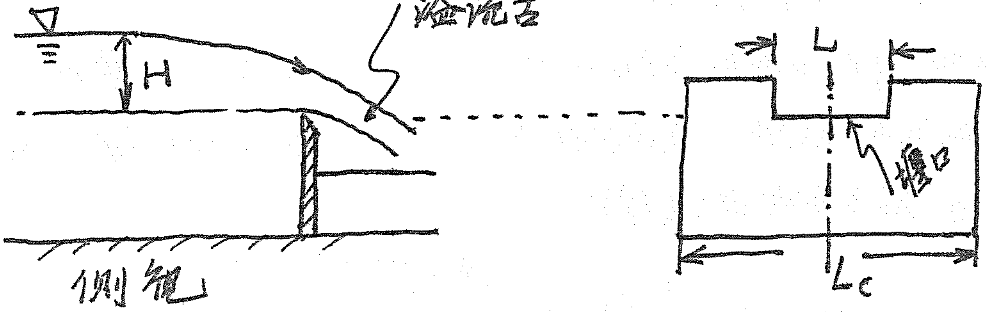
$$\therefore \quad \frac{V_1}{V_2}=\frac{S_2}{S_1}, \quad V_2=\frac{Q}{S_2}$$

代入(4.6.28)，有：$\Delta p=\frac{\rho}{2}\frac{Q^2}{S_2^2}\left[1-\left(\frac{S_2}{S_1}\right)^2\right]$

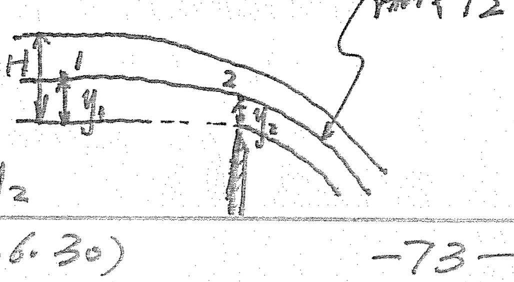
$$\Rightarrow \quad Q=S_2\sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho\left[1-\left(\frac{S_2}{S_1}\right)^2\right]}} \qquad (4.6.29)$$

若ρ、S_1、S_2和Δp知道后，(4.6.29)式就是文丘里流量计的基本公式。

4. 矩形薄壁堰测明渠流量。



取流线$\overline{12}$，使得点1位于上游足够远处，点2正好位于堰口正上方，沿流线$\overline{12}$应用Bernoulli方程：



1. $\mu=0$
2. $\Pi=\rho gh$
3. $P=\frac{p}{\rho}$
4. $\frac{\partial}{\partial t}\equiv 0$

$$\frac{v_1^2}{2g}+\frac{p_1}{\rho g}+y_1=\frac{v_2^2}{2g}+\frac{p_2}{\rho g}+y_2 \qquad (4.6.30)$$

现在，我们假定①溢流舌处压强为大气压，其表压 $p_2=0$；②在上游足够远处，整个截面上的速度为均匀常数，即 $v_1=const$，且压强分布遵循静压规律。

因此，若令1点的表压为 p_1，则

$$p_1+\rho g y_1=\rho g H \Rightarrow \frac{p_1}{\rho g}+y_1=H$$

由（4.6.30）可知：

$$v_2=\sqrt{2g\left[H-y_2+\frac{v_1^2}{2g}\right]}$$

所以，流量 $Q=L\int_0^H v_2\,dy_2$

$$=\frac{2}{3}L\sqrt{2g}\left[\left(H+\frac{v_1^2}{2g}\right)^{\frac{3}{2}}-\left(\frac{v_1^2}{2g}\right)^{\frac{3}{2}}\right] \quad (4.6.31)$$

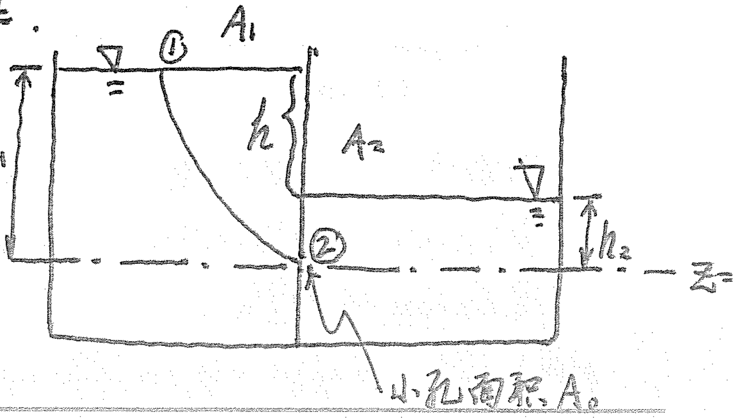
若近似令 $v_1\to 0$，则上式成为：

$$Q=\frac{2}{3}\sqrt{2g}\,LH^{\frac{3}{2}} \quad (4.6.32)$$

因此，若H可测，则体积流量便可由（4.6.32）给出。

由于我们在推导过程中利用了诸多假设，且考虑到 $L<L_c$ 时溢流舌会收缩，实际流量约为理论值的62%。需要对（4.6.32）右端的系数进行修正。

例题1：如右图，一个大水箱被一个隔离板隔开。现在板的下部开一小孔。令板的两侧水位差 $h=h_1-h_2$。求经过多长时间两边水位持平。



我们假定流动非常缓慢，每一时刻可认为近似定常，则沿如图流线12.

有：
$$\frac{P_1}{\rho g}+\frac{u_1^2}{2g}+z_1=\frac{P_2}{\rho g}+\frac{u_2^2}{2g}+z_2$$

$$\Rightarrow \quad 0+0+h_1=\frac{\rho g h_2}{\rho g}+\frac{u_2^2}{2g}+0$$

$$\Rightarrow \quad u_2=\sqrt{2g(h_1-h_2)}=\sqrt{2gh} \qquad (4.6.33)$$

$$\therefore \quad Q=C_d A_0 u_2=C_d A_0\sqrt{2gh} \qquad (4.6.34)$$

其中 C_d 称为流量修正系数.

由连续性方程： $Q=\left(-\frac{\delta h_1}{\delta t}\right)A_1=\frac{\delta h_2}{\delta t}A_2$

$$\Rightarrow Q\delta t=-A_1\delta h_1=A_2\delta h_2$$

又 $\delta h=\delta h_1-\delta h_2$

$$\therefore -A_1\delta h_1=A_2\delta h_1-A_2\delta h$$

$$\therefore \quad \delta h_1=\frac{A_2}{A_1+A_2}\delta h$$

$$\Rightarrow Q\delta t=-A_1\delta h_1=-\frac{A_1A_2}{A_1+A_2}\delta h$$

$$\Rightarrow C_d A_0\sqrt{2gh}\,\delta t=-\frac{A_1A_2}{A_1+A_2}\delta h$$

$$\Rightarrow \quad \delta t=-\frac{A_1A_2}{(A_1+A_2)C_d A_0\sqrt{2g}}\frac{\delta h}{\sqrt{h}}$$

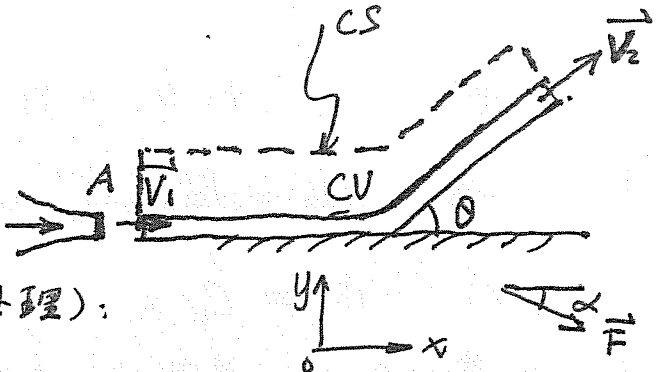
$$\Rightarrow T=\int\delta t=-\int_{h_i}^{h_f}\frac{A_1A_2}{(A_1+A_2)C_d A_2\sqrt{2g}}h^{-\frac{1}{2}}dh$$

$(h_i=h_1-h_2,\quad h_f=0)$.

例题2:(丁) B 4-4.1 C: 自由射流冲击固定导流片.

已知: 喷管截面积 $A = 40\ cm^2$, 入口流速 $|\vec{V_1}| = 45\ m/s$.
不考虑质量力和摩擦力.

求: 射流对固定导流片的作用力和与 θ 角的关系.



解: 取 CV 为沿导流片内壁面上的薄层流体区域 (流动按一维处理):

由伯努利积分:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{V_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} = \frac{V_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho}\\ &\text{又 } p_1 = p_2 = p_{atm} = 0 \ (\text{表压})\end{aligned}\right\} \Rightarrow V_1 = V_2 = V$$

由连续性条件: $V_1 A_1 = V_2 A_2 \Rightarrow A_1 = A_2 = A$.

质量流量: $\dot{m} = \dot{m}_1 = \dot{m}_2 = \rho Q = \rho V A = 180\ (kg/s)$

设射流对固定导流片的作用力为 $\vec{F}$, 则控制体所受合外力为 $-\vec{F}$, 因此, 由动量定理:

$$\dot{m}(\vec{V_2} - \vec{V_1}) = -\vec{F}$$

$$\Rightarrow \vec{F} = \rho V A(\vec{V_1} - \vec{V_2})$$

$$\Rightarrow F_x = \rho V A(V - V\cos\theta) = \rho V^2 A(1-\cos\theta) = 8100(1-\cos\theta)\ (N)$$

$$F_y = -\rho V A V\sin\theta = -\rho V^2 A\sin\theta = -8100\sin\theta\ (N)$$

$$\alpha = \tan^{-1}(F_y/F_x) = \tan^{-1}[\sin\theta/(1-\cos\theta)].$$

例题3：若例2中导流片以匀速 $U=15\ m/s$ 运动，求射流对导流片的作用力及与 θ 角的关系。

解：由 Bernoulli 积分，

$$\left.\begin{aligned} \frac{V_{r1}^2}{2}+\frac{p_1}{\rho} &= \frac{V_{r2}^2}{2}+\frac{p_2}{\rho} \\ p_2=p_1 &= p_{atm}=0 \end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow\ V_{r1}=V_{r2}=V_r=V-U=45-15=30\ (m/s)$$

又 $V_{r1}A_1=V_{r2}A_2 \Rightarrow A_1=A_2=A$

质量流量 $\dot{m}_r=\dot{m}_{r1}=\dot{m}_{r2}=\rho Q_r=\rho V_r A=120\ (kg/s)$

设作用于 CV 上的作用力 $-\vec{F}$，则由动量定理：

$$\dot{m}_r(\vec{V}_{r2}-\vec{V}_{r1})=-\vec{F}$$

$$\Rightarrow\ \vec{F}=\dot{m}_r(\vec{V}_{r1}-\vec{V}_{r2})$$

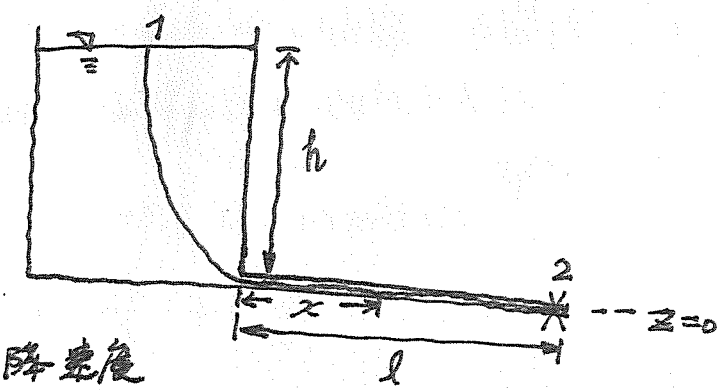
$$\Rightarrow\ F_x=\dot{m}_r(V_r-V_r\cos\theta)=\rho V_r^2A(1-\cos\theta)=3600(1-\cos\theta)\ (N)$$

$$F_y=\dot{m}_r(0-V_r\sin\theta)=-\rho V_r^2A\sin\theta=-3600\sin\theta\ (N)$$

$$\alpha=\tan^{-1}[F_y/F_x]=\tan^{-1}\left[\sin\theta/(1-\cos\theta)\right]$$

即：冲击力相对固定导流片情况相对减小，但力的作用方向保持不变。

例题3：理想流体（不可压）在重力作用下从一个大容器的一个水平易管中流出。在阀门打开的短暂时间内，流动是非定常的。



我们假定：① 长圆管内流动为一维流动；② 忽略大容器内液面下降速度 ③ 大容器液面处和长圆管出口处均为大气压。

由拉格朗日积分关系：

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}+\frac{V^2}{2}+\frac{p}{\rho}+gz=f(t)$$

在水平长管中取流线（沿中心轴线）：

$$V=\frac{\partial \varphi}{\partial x} \Rightarrow \varphi=\varphi_0+\int_0^x V\,dx.$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial t}=\int_0^x \frac{\partial V}{\partial t}\,dx$$，其中 x 为长管进口处到管内任一点的距离。由于是等截面长管，所以 V 只是时间的函数，与 x 无关。即：$\frac{\partial \varphi}{\partial t}=\frac{\partial V}{\partial t}\int_0^x dx=\frac{dV}{dt}x$.

因此：拉格朗日积分变为：$\frac{dV}{dt}\cdot x+\frac{V^2}{2}+\frac{p}{\rho}+gz=f(t)$

又拉格朗日积分在全场适用，所以在1和2两处有：

$$\frac{1}{2}V_1^2+\frac{p_a}{\rho}+gh=\frac{1}{2}V_2^2+\frac{p_a}{\rho}+\frac{dV_2}{dt}l$$

考虑到 $V_1\cong 0$，上式 $\Rightarrow$ $\frac{dV_2}{dt}=\frac{1}{l}\left(gh-\frac{V_2^2}{2}\right)$

在 $t=0$ 时，$V_2=0$，$t=t$ 时，$V_2=V_2$ 之间积分上式有：

$$V_2 = \sqrt{2gh}\ th\left[\frac{\sqrt{2gh}}{2l}\ t\right]$$

当 $t\to\infty$ 时，$V_2 \to \sqrt{2gh}$，此时运动趋于定常。

其实，当 $t_1 = 1.5\dfrac{2l}{\sqrt{2gh}}$ 时，可知：$V_2 \simeq 0.9\sqrt{2gh}$。

例如：取 $h = 70(m)$，$l = 10(m)$，则 $t_1 = 0.08(s)$。