# 第一章　误差

## 1·1 误差的定义

记法：$x^*$ — 近似值，　$x$ — 准确值.

绝对误差：　$e = x^* - x$.　　(可正可负)

绝对误差限：　$\varepsilon \geq |e|$　　(恒正)

相对误差：　$e_r$　　(可正可负)

相对误差限：　$\varepsilon_r \geq |e_r|$　　(恒正)

有效数字：　记 $x^* = \pm\ 0.\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n \times 10^k$，$(\alpha_1 \neq 0)$

若 $|x^* - x| \leq \frac{1}{2} \times 10^{k-m}$，称 $x^*$ 有 m 位有效数字.

例：3.1416 (5位)
　　3.1415 (4位)

相对误差限 $\varepsilon_r$ 与有效数字 $n$ 的关系：

定理1·1：$\frac{|x^* - x|}{|x^*|} \leq \varepsilon_r^* \leq \frac{1}{2\alpha_1} \times 10^{-(n-1)}$　　(偏大)

已知有效数字 n，则

定理1·2：若 $\varepsilon_r^* \leq \frac{1}{2(\alpha_1+1)} \times 10^{-(n-1)}$，则 $x^*$ 至少有 n 位有效数字.

## ~~1·2~~ 误差的来源

(1) 模型误差：模型中次要因素产生的误差.
由于忽略

(2) 测量误差：测量设备限制引起的误差

(3) 截断误差(方法误差)：算法引起的误差.

(4) 舍入误差：对数据四舍五入引起的误差.

## 1·2 误差的传播.

基本运算的误差限：将 $x^*$ 对 $x$ 的绝对误差视为微分，记为 $dx$.

则有公式
$$\begin{cases} d(x \pm y) = dx \pm dy \\ d(xy) = x\,dy + y\,dx \\ d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{y\,dx - x\,dy}{y^2} \end{cases}$$

将 $x^*$ 对 $x$ 的相对误差限记为 $d_r x$，则有公式　　$d_r x = \left|\frac{dx}{x^*}\right| = |d\ln x^*|$

$$
\begin{cases}
d_r(x+y) \approx \max\{d_r x,\ d_r y\} & (x,y\text{同号}) \\
d_r(x-y) \approx \dfrac{|x|d_r x + |y|d_r y}{|x-y|} & (x,y\text{同号}) \\
d_r(xy) = d_r\left(\dfrac{x}{y}\right) = d_r x + d_r y
\end{cases}
$$

函数运算的误差限

$$dy = f'(x)\,dx \quad ; \quad d_r y = \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx \quad (= |d\ln y|)$$

1.3 注意事项

(1) 避免相近数字做减法。解决方法：改变公式.

(2) 简化计算步骤：减少计算量、减少误差积累.

(3) 避免同一函数的大量重复计算

(4) 数值不稳定：舍入误差不断增长的计算公式.