第九章 欧式空间

定义：欧几里得空间：V 是 R 上的一个线性空间，在 V 上定义二元实函数 (α,β) ，称为内积。内积具有以下性质：

可交换性；线性；模的非负性（ $(\alpha,\alpha)\geq 0$ ，当且仅当 $\alpha=0$ 时， $(\alpha,\alpha)=0$ ）

这样的空间称为欧几里得空间。

{定义了内积的线性空间就是欧式空间。}

(向量)

定义：长度： $|\alpha|=\sqrt{(\alpha,\alpha)}$

夹角： $\langle\alpha,\beta\rangle=\arccos\frac{(\alpha,\beta)}{|\alpha||\beta|}$

正交：如果两个向量内积为零，则称这两个向量正交。

定义：度量矩阵：取欧式空间 V 中的一组基 E ,记 $a_{ij}=(\varepsilon_i,\varepsilon_j)$,则矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 称为基 E 的度量矩阵。那么 $(\alpha,\beta)=X^T AY$ ，这里 X,Y 是两向量在基 E 下的坐标。

性质：同一欧式空间的不同基的度量矩阵是合同的。{ $B=C^T AC$ }

度量矩阵是正定的。

定义：正交向量组：欧式空间中两两正交的一组非零向量。

性质：正交向量组是线性无关的。

定义：正交基：n 维欧式空间中有 n 个向量的正交向量组。

标准正交基：由单位向量组成的正交基。

性质：一组基为标准正交基 $\Leftrightarrow$ 它的度量矩阵为单位矩阵。

n 维欧式空间存在标准正交基。

定理 1：n 维欧式空间中的任一个正交向量组都能扩充成一组正交基。

定理 2：对于 n 维欧式空间中的任一组基 $(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)$ ，都可以找到一组标准正交基 $(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)$ ，使得他们张成的空间相同。

{此定理的证明过程中出现的正交化过程称为施密特正交化过程}

定理：（QR 分解）A 是一个 n 级实矩阵，且其行列式不为零，则存在正交矩阵 Q 和上三角矩阵 R，使得 $A=QR$ 。

定义：正交矩阵：n 级实数矩阵 A，如果 $AA^T=I$ 。

定义：同构：实数域上的欧式空间 V，V'，如果有一个 V 到 V'的双射 σ ，满足：

线性性； $(\sigma(\alpha),\sigma(\beta))=(\alpha,\beta)$

那么称 V，V'同构，且 σ 称为 V 到 V'的同构映射。

性质：同构的欧式空间具有相同的维数。

每个 n 维的欧式空间都与 $\mathbb{R}^n$ 同构。

同构关系具有反身性、对称性和传递性。

定理 3：两个有限维欧式空间同构 $\Leftrightarrow$ 它们的维数相同

定义：正交变换：保持向量内积不变的欧式空间上的线性变换，即 $(A\alpha, A\beta)=(\alpha,\beta)$

性质：正交变换是欧式空间到他自己的一个同构映射。

定理 4：A 是 n 维线性空间 V 的一个线性变换。下列命题等价：

A 是正交变换；

A 保持向量的长度不变；

标准正交基在线性变换作用后仍是标准正交基；

A 在任一组标准正交基下的矩阵是正交矩阵。

定义：第一类正交变换：$|A|=1$，或称为旋转。

第二类正交变换：$|A|=-1$

定义：子空间的正交：V_1, V_2 是欧式空间 V 中的两个子空间。如果它们中的任意两个向量都相互正交，则称 V_1, V_2 是正交的，记为 $V_1 \perp V_2$

向量与子空间的正交：如果向量 α 与子空间 V_1 的任何一个向量正交，则称它们正交，记为 $\alpha \perp V_1$

定理 5：如果一个子空间两两正交，那么它们的和是直和。

定义：正交补：如果一个子空间正交于另一个子空间，且他们的和为 V，则称这个子空间是另一个子空间的正交补。记为 $V_1^{\perp}$

定理 6：n 维欧式空间 V 的每一个子空间都有唯一的正交补。

推论：$V_1^{\perp}$ 恰由所有与 V_1 正交的向量组成。