皮卡存在和唯一性定理（定理3.1）：

设初值问题 (E)：$\begin{cases} \dfrac{d\vec{y}}{dx} = \vec{f}(x,\vec{y}) \\ \vec{y}(x_0) = \vec{y}_0 \end{cases}$，其中 $\vec{f}(x,\vec{y})$ 在闭区域 R：$[x_0-a, x_0+a]$，$\|\vec{y}-\vec{y}_0\| \le b$ 内连续，而且 $\vec{f}$ 对 $\vec{y}$ 满足李氏条件。

则 (E) 在区间 $I=[x_0-h, x_0+h]$ 上有且仅有一个解，其中 $h=\min\{a, \frac{b}{M}\}$，$M > \max\limits_{(x,\vec{y})\in R} \|\vec{f}(x,\vec{y})\|$。

文字表述：标准形式常微分方程初值问题，如果它的右端函数：

① 连续；② 对 $\vec{y}$ 满足李氏条件.

在一定范围内　　在同一范围内

则原问题在某区间内存在唯一的解。

证明：1° 定理结论 $\Longleftrightarrow$ 积分方程 $\vec{y} = \vec{y}_0 + \int_{x_0}^{x} \vec{f}(x,\vec{y})\,dx$ 在区间 I 上有且仅有一个解。

① 设 $\vec{y}=\vec{y}(x)$ $(x\in I)$ 是 (E) 的解，则 $\vec{y}'(x) = \vec{f}(x,\vec{y}(x))$ $(x\in I)$.

积分得 $\vec{y}(x) = \vec{y}(x_0) + \int_{x_0}^{x} \vec{f}(x,\vec{y}(x))\,dx$

$= \vec{y}_0 + \int_{x_0}^{x} \vec{f}(x,\vec{y}(x))\,dx$

即 $\vec{y}(x)$ 是积分方程的解.

② 又设 $\vec{y}=\vec{y}(x)$ $(x\in I)$ 是积分方程的解，则 $\vec{y}(x) = \vec{y}_0 + \int_{x_0}^{x} \vec{f}(x,\vec{y}(x))\,dx$ $(x\in I)$

求导得 $\vec{y}'(x) = \vec{f}(x,\vec{y}(x))$，

又由初值 $\vec{y}(x_0) = \vec{y}_0$，

得 $\vec{y}(x)$ 是 (E) 的解.

2° 皮卡序列 $\begin{cases} \vec{y}_0(x) = \vec{y}_0 \\ \vec{y}_{n+1}(x) = \vec{y}_0 + \int_{x_0}^{x} \vec{f}(x,\vec{y}_n(x))\,dx \quad (n=0,1,2,\cdots) \end{cases}$ $(x\in I)$ 在区间

I 上连续，且满足不等式 $\|\vec{y}_n(x)-\vec{y}_0\| \le M|x-x_0|$ $(n=0,1,2,\cdots)$，（M定义见定理）

① $\vec{y}_0(x)=\vec{y}_0$ 在区间 I 上连续，且满足不等式 $\|\vec{y}_0(x)-\vec{y}_0\| \le M|x-x_0|$

② 假设 $\vec{y}_k(x)$ 在区间 I 上连续，且满足不等式 $\|\vec{y}_k(x)-\vec{y}_0\| \le M|x-x_0|$，

则 $\|\vec{y}_k(x)-\vec{y}_0\| \le M|x-x_0| \le Mh \le b$

由条件知，$\vec{f}(x,\vec{y}_k(x))$ 在区间 I 上连续.

$\therefore\ \vec{y}_{k+1}(x)=\vec{y}_0+\int_{x_0}^{x}\vec{f}(x,\vec{y}_k(x))\,dx\quad (x\in I)$ 在区间I上是连续可微的。

又有
$$\left\|\vec{y}_{k+1}(x)-\vec{y}_0\right\|=\left\|\int_{x_0}^{x}\vec{f}(x,\vec{y}_k(x))\,dx\right\|$$
$$\leq\left|\int_{x_0}^{x}\left\|\vec{f}(x,\vec{y}_k(x))\right\|dx\right|$$
$$\leq M\,|x-x_0|.$$

③ 综合①、②，由数学归纳法知，结论2°成立.

3° 皮卡序列 $\vec{y}_n(x)$ 在区间I上一致收敛到积分方程的解。

① 皮卡序列 $\vec{y}_n(x)$ 在区间I上一致收敛.

1' 结论① $\Longleftrightarrow$ 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}[\vec{y}_{n+1}(x)-\vec{y}_n(x)]$ 在区间I上一致收敛。

2' 结论1'中的级数在区间I上一致收敛

1'' $\left\|\vec{y}_1(x)-\vec{y}_0(x)\right\|\leq M\,|x-x_0|$ 在区间I上成立.

2'' 假设 $\left\|\vec{y}_{k+1}(x)-\vec{y}_k(x)\right\|\leq\dfrac{M}{L}\dfrac{(L|x-x_0|)^{k+1}}{(k+1)!}$ 在区间I上成立，

则
$$\left\|\vec{y}_{k+2}(x)-\vec{y}_{k+1}(x)\right\|=\left\|\int_{x_0}^{x}\vec{f}(x,\vec{y}_{k+1}(x))\,dx-\int_{x_0}^{x}\vec{f}(x,\vec{y}_k(x))\,dx\right\|$$
$$=\left\|\int_{x_0}^{x}[\vec{f}(x,\vec{y}_{k+1}(x))-\vec{f}(x,\vec{y}_k(x))]\,dx\right\|$$
$$\leq\left|\int_{x_0}^{x}\left\|\vec{f}(x,\vec{y}_{k+1}(x))-\vec{f}(x,\vec{y}_k(x))\right\|dx\right|$$
$$\leq\left|\int_{x_0}^{x}L\left\|\vec{y}_{k+1}(x)-\vec{y}_k(x)\right\|dx\right|$$
$$\leq\left|\int_{x_0}^{x}M\frac{(L|x-x_0|)^{k+1}}{(k+1)!}\,dx\right|$$
$$=\frac{M}{L}\frac{(L|x-x_0|)^{k+1}}{(k+2)!}$$

3'' 综合1''、2''，由数学归纳法知，
$\left\|\vec{y}_{n+1}(x)-\vec{y}_n(x)\right\|\leq\dfrac{M}{L}\dfrac{(L|x-x_0|)^{n+1}}{(n+1)!}$ 在区间I上成立 $(n=0,1,2,\cdots)$

由此可知，结论2'成立。

由此可知，结论①成立.

② 皮卡序列 $\vec{y}_n(x)$ 的极限函数 $\varphi(x)=\lim_{n\to\infty}\vec{y}_n(x)\ (x\in I)$ 是积分方程的解.

∵ 皮卡序列 $\vec{y}_n(x)$ 在区间 I 上连续，且皮卡序列一致收敛.

∴ 极限函数 $\vec{\varphi}(x)$ 在区间 I 上是连续的。

$$\because \vec{\varphi}(x) = \lim_{n\to\infty}\vec{y}_{n+1}(x) = \lim_{n\to\infty} \vec{y}_0 + \int_{x_0}^{x}\vec{f}(x,\vec{y}_n(x))\,dx$$

$$= \vec{y}_0 + \int_{x_0}^{x}\lim_{n\to\infty}\vec{f}(x,\vec{y}_n(x))\,dx$$

（∵ $\vec{f}(x,\vec{y}_n(x))$ 一致收敛）

$$= \vec{y}_0 + \int_{x_0}^{x}\vec{f}(x,\lim_{n\to\infty}\vec{y}_n(x))\,dx$$

（∵ $\vec{f}(x,y)$ 连续）

$$= \vec{y}_0 + \int_{x_0}^{x}\vec{f}(x,\vec{\varphi}(x))\,dx \quad (x\in I)$$

4° 积分方程的解是唯一的。

设积分方程有两个解分别为 $\vec{y}=\vec{u}(x)$ 和 $\vec{y}=\vec{v}(x)$，令 $J=[x_0-d, x_0+d]$ 为它们的共同存在区间，$d\le h$。

则 $$\|\vec{u}(x)-\vec{v}(x)\| = \left\|\int_{x_0}^{x}[\vec{f}(x,\vec{u}(x))-\vec{f}(x,\vec{v}(x))]\,dx\right\|$$

$$\le \left|\int_{x_0}^{x}\|\vec{f}(x,\vec{u}(x))-\vec{f}(x,\vec{v}(x))\|\,dx\right|$$

$$\le \left|\int_{x_0}^{x}L\|\vec{u}(x)-\vec{v}(x)\|\,dx\right|$$

∵ $|\vec{u}(x)-\vec{v}(x)|$ 在闭区间 J 上连续，

∴ 它在 J 上有界，取其一个上界 k。

则 $\|\vec{u}(x)-\vec{v}(x)\| \le Lk|x-x_0|$

进而 $$\|\vec{u}(x)-\vec{v}(x)\| \le \left|\int_{x_0}^{x}L^2k|x-x_0|\,dx\right|$$

$$= k\frac{(L|x-x_0|)^2}{2}$$

递推可知，$\|\vec{u}(x)-\vec{v}(x)\| \le k\dfrac{(L|x-x_0|)^n}{n!} \quad (x\in J)$

令 $n\to\infty$，得 $\|\vec{u}(x)-\vec{v}(x)\|\le 0$，即 $\vec{u}(x)=\vec{v}(x)$ $(x\in J)$. □

注脚：1° 误差公式 $\|\vec{\varphi}(x)-\vec{\varphi}_n(x)\| \le \dfrac{ML^n h^{n+1}}{(n+1)!}$

2° 一般而言，如果 $\vec{f}(x,\vec{y})$ 在区域 G 内连续，而对 $\vec{y}$ 不满足李氏条件，那么微分方程过 G 内每点解存在，但不一定唯一。

3° 在微分方程的一般理论中，还没有保证解的唯一性的一种充要条件。

4° 如果没有李氏条件，那么一般也不能保证皮卡序列的收敛性。

Osgood 唯一性定理（定理3.2）.

设微分方程 $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$，其中 $f(x,y)$ 在区域 G 内对 y 满足 Osgood 条件：

$f(x,y)$ 在 G 内连续；

$|f(x,y_1)-f(x,y_2)| \leq F(|y_1-y_2|)$ 成立，其中 $F(r)>0$ 在 $r>0$ 上连续，

且 $\int_0^{r_1}\frac{dr}{F(r)}=\infty$.

则原方程在 G 内经过每一点的解都唯一。

佩亚诺存在定理（定理3-3）：

设初值问题(E)：$\begin{cases}\dfrac{d\vec{y}}{dx}=\vec{f}(x,\vec{y})\\ \vec{y}(x_0)=\vec{y}_0\end{cases}$，其中 $\vec{f}(x,\vec{y})$ 在闭区域 R：$[x_0-a,x_0+a]$，$\|\vec{y}-\vec{y}_0\|\le b$ 内连续。

则(E)在区间 $I=[x_0-h,x_0+h]$ 上至少有一个解 $\vec{y}=\vec{y}(x)$，其中 $h=\min\{a,\frac{b}{M}\}$，$M>\max\limits_{(x,\vec{y})\in R}\|\vec{f}(x,\vec{y})\|$.

文字表述：标准形式常微分方程初值问题，如果它的右端函数在一定范围内连续，则原问题在某个区间内解存在。

注脚：1° 初值问题(E)的欧拉序列的任何一致收敛子序列都趋于(E)的某个解。

2° 存在连续函数 $F(x,y)$，使微分方程 $\frac{dy}{dx}=F(x,y)$ 在矩形区域内经过每一点至少有两条不同的积分曲线。这种现象称为拉甫仑捷夫现象。

3° 如果微分方程在区域 G 内每一点存在唯一的解，那么积分曲线族在局部等价于一族平行直线。

4° 一般来说，如果 $\vec{f}(x,\vec{y})$ 不连续，那么(E)可能无解。

解的延拓定理（定理3.4）：

设微分方程 $\frac{d\vec{y}}{dx}=\vec{f}(x,\vec{y})$，其中$\vec{f}(x,\vec{y})$在开区域G内连续。

取G内任一点P_0，并取过P_0的任一条积分曲线Γ。

则对任何有界闭区域G_1，$P_0\in G_1\subset G$，积分曲线Γ将延伸到G_1之外。

文字表述：标准形式常微分方程，如果它的右端函数在一个开区域中连续，
则此区域内的所有积分曲线延拓到区域边界。

证明：记积分曲线Γ对应于解 $\vec{y}=\vec{\varphi}(x)$，记解$\vec{\varphi}(x)$的最大存在区间为J。

1° 积分曲线Γ在P_0点右侧延拓到G的边界.

记 $J^+=J\cap[x_0,+\infty)$，为Γ在P_0点右侧的最大存在区间。

对J^+的类型分情况讨论。

① $J^+=[x_0,+\infty)$

此时自变量x延拓到无穷远，积分曲线Γ在G内也就延拓到无穷远，从而延拓到区域G的边界。

② $J^+=[x_0,x_1]$，$(x_1>x_0)$

∵ $\Gamma\subset G$，令 $\vec{y}_1=\vec{\varphi}(x_1)$

∴ $(x_1,\vec{y}_1)\in G$

∵ G是一个开集

∴ 存在闭区域 $R_1: |x-x_1|\le a_1,\ \|\vec{y}-\vec{y}_1\|\le b_1$，使得 $R_1\subset G$.

在R_1中，由佩亚诺存在定理知，原微分方程至少有一个解 $\vec{y}=\vec{\varphi}_1(x)$ $(|x-x_1|\le h_1)$

使之满足初值条件 $\vec{\varphi}_1(x_1)=\vec{y}_1$，~~其中$h_1$是某个正数~~

令 $\vec{y}(x)=\begin{cases}\vec{\varphi}(x), & 当\ x_0\le x\le x_1\\ \vec{\varphi}_1(x), & 当\ x_1\le x\le x_1+h_1\end{cases}$.

则 $\vec{y}=\vec{y}(x)$ 连续可微，且在区间 $[x_0,x_1+h_1]$ 上满足原微分方程。因此，解的存在区间应包含 $[x_0,x_1+h_1]$，这与假设矛盾.

∴ 情形②不存在。

③ $J^+=[x_0,x_1)$，$(x_1>x_0)$

假设存在G内一个有限闭区域G_1，使得 $(x,\vec{\varphi}(x))\in G_1,\ \forall x\in J^+$。

∵ $\vec{f}(x,\vec{y})$在G_1上是连续的，且G是一个有限的闭区域，

∴ $\|f_i(x,\vec{y})\|$在G_1上有上界 $k>0$.

由假设知，$\|\varphi_i'(x)\|$在J^+上有上界k.

由拉格朗日中值定理得

$$\left|\varphi_\tau(x_1')-\varphi_\tau(x_2')\right| \le k_\tau |x_1'-x_2'|, \quad x_1', x_2' \in J^+.$$

通过构造柯西序列，由函数单侧连续的定义容易证明：当 $x \to x_1$ 时，$\varphi_\tau(x)$ 的极限存在。

令 $\vec{\eta}_1 = \lim\limits_{x\to x_1} \vec{\varphi}(x)$，定义 $\tilde{\vec{\varphi}}(x) = \begin{cases} \vec{\varphi}(x), & x\in[x_0, x_1) \\ \vec{\eta}_1, & x = x_1. \end{cases}$

$\therefore \vec{y} = \tilde{\vec{\varphi}}(x)$ 是连续的，且在区间 $[x_0, x_1]$ 上满足

$$\tilde{\vec{\varphi}}(x) = \vec{y}_0 + \int_{x_0}^{x} \vec{f}(x, \tilde{\vec{\varphi}}(x))\, dx$$

这表明 $\vec{y} = \tilde{\vec{\varphi}}(x)$ 在区间 $[x_0, x_1]$ 上是原微分方程过 P_0 点的一个解。~~[illegible]~~

因此，解的存在区间应包含 $[x_0, x_1]$，这与假设矛盾。

$\therefore$ 假设不成立.

2° 积分曲线 Γ 在 P_0 点左侧延拓到 G 的边界。

同理可证。 $\square$.

注脚：1° 若 $\vec{f}(x, \vec{y})$ 在区域 G 内连续，且对 $\vec{y}$ 局部李氏，则微分方程 $\frac{d\vec{y}}{dx} = \vec{f}(x, \vec{y})$ 过 G 内任一点 P_0 存在唯一的积分曲线 Γ，在 G 内延伸到边界。

2° 如果 G 是有界闭区域，则 $\vec{f}(x, \vec{y})$ 在 G 上对 $\vec{y}$ 局部李氏 $\Longleftrightarrow$ $\vec{f}(x, \vec{y})$ 在 G 上对 $\vec{y}$ 李氏。

3° 对任意区域 G，若 $\vec{f}(x, \vec{y})$ 在 G 上对 $\vec{y}$ 连续可微，则 $\vec{f}$ 对 $\vec{y}$ 局部李氏.

4° 若 G 是开区域，G 上的局部李氏条件弱于 G 上的李氏条件。

解的最大存在区间定理（定理3.5）

设微分方程 $\frac{d\vec{y}}{dx}=\vec{f}(x,\vec{y})$，其中$\vec{f}(x,\vec{y})$在区域 $S:(\alpha,\beta)\times R^n$上连续，且被线性方程包围，即 $\|\vec{f}(x,\vec{y})\|\le\|\vec{A}(x)\|\|\vec{y}\|+\|\vec{B}(x)\|$，其中$\vec{A}(x)$，$\vec{B}(x)$在$(\alpha,\beta)$上连续。

则原方程的每一个解的最大存在区间都为(α,β).

证明：1° 设初值问题(E)：

$$\begin{cases}\dfrac{d\vec{y}}{dx}=\vec{f}(x,\vec{y})\\ \vec{y}(x_0)=\vec{y}_0 \qquad ((x_0,\vec{y}_0)\in S)\end{cases}$$

(E)的一个解为 $\Gamma: \vec{y}=\vec{y}(x)$.

则要证明Γ的最大存在区间为(α,β)

2° Γ的右侧最大存在区间为$[x_0,\beta)$.

假设不是。记右侧最大存在区间为$[x_0,\beta_0)$，其中$x_0<\beta_0<\beta$。

取x_1,x_2，使 $x_0<x_1<\beta_0<x_2<\beta$ 且 $x_2-x_1<x_1-x_0$。

记 $a_1=x_2-x_1$.

∵ $\vec{A}(x)$，$\vec{B}(x)$在有限闭区间$[x_0,x_2]$上连续

∴ $\|\vec{A}(x)\|$，$\|\vec{B}(x)\|$在$[x_0,x_2]$上有上界，记为A_0，B_0.

可取 $a_1<\frac{1}{4A_0}$。

记 $\vec{y}_1=\vec{y}(x_1)$，取闭区域 R_1：$|x-x_1|\le a_1$，$\|\vec{y}-\vec{y}_1\|\le b_1$，

其中b_1充分大。~~显然 $R_1\subset S$~~

~~由解的延拓定理，过$(x_1,\vec{y}_1)$的解延拓到R_1的边界。~~

在R_1上，$\|\vec{f}(x,\vec{y})\|\le A_0\|\vec{y}\|+B_0\le A_0(\|\vec{y}-\vec{y}_1\|+\|\vec{y}_1\|)+B_0$

$\le A_0(\|\vec{y}_1\|+b_1)+B_0$.

记$M_1=A_0(\|\vec{y}_1\|+b_1)+B_0$，$h_1=\min\{a_1,\frac{b_1}{M_1}\}$

则在闭区域R_1^*：$|x-x_1|\le h_1$，$\|\vec{y}-\vec{y}_1\|\le b_1$ 上，$R_1^*\subset S$。

由解的延拓定理，过$(x_1,\vec{y}_1)$的解延拓到R_1^*的边界。

又∵ 解Γ在R_1^*内必停留在角形域：$\|\vec{y}-\vec{y}_1\|\le M_1|x-x_1|$，

$|x-x_1|<h_1$

∴ $\|\vec{y}-\vec{y}_1\|<b_1$，解$\Gamma$延拓到$R_1^*$的右边界 x_1+h_1。

$\because \lim\limits_{b_1 \to +\infty} \dfrac{b_1}{M_1} = \lim\limits_{b_1 \to +\infty} \dfrac{b_1}{A_0(\|\vec{\xi}_1\| + b_1) + B_0 + 1} = \dfrac{1}{A_0}$

$a_1 < \dfrac{1}{4A_0}$

$\therefore$ 对充分大的b_1，$h_1 = a_1 = x_2 - x_1$

$\therefore$ Γ在区间$[x_0, x_2]$上存在.

又$\because$ $x_2 > \beta_0$，与假设矛盾

$\therefore$ 假设不成立。

3° 同理可证Γ的左侧最大存在区间是$(\alpha, x_0]$.