

北京 大学 工学院

第七章 不可压缩粘性流体外流问题

本章我们将着重讨论：① 粘性流体运动的性质；② 边界层的概念；③ 边界层动量积分方程；④ 边界层分离；⑤ 绕流物体所受阻力情况。

一. 粘性流体流动的一般性质.

(1) 描述粘性不可压缩流体流动的基本控制方程：

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 \quad (7.1.1)$$

$$\frac{D\vec{u}}{Dt} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} = \vec{f}_b - \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p + \nu \nabla^2 \vec{u} \quad (7.1.2)$$

注意：在不可压缩条件下（对气体运动而言， $M \leq 0.3$ ），流场中温度变化不大，粘性系数 μ 随温度的变化可以忽略不计，流体的运动基本不受温度的制约。因而，运动与热传递的问题可以分别讨论。 $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ 称为运动粘性系数，有时也称为动量扩散率。

(2) 粘性流体运动的有旋性。

Kelvin 定理表明：① 理想（无粘）流体，在② 正压、③ 体力有势的条件下，若流场无旋，则永远无旋。因此，当流体受正压或体力无势时，无粘流体也可由无旋变为有旋。同样在正压和体力有势同时满足时，粘性流体（也就是现实中的几乎所有流体）几乎都是无旋的。

北京大学工学院

我们考察 $\mu = \text{const.}$ 的均质不可压流体运动的 N-S 方程:

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 \\ \frac{D\vec{u}}{Dt} = \vec{f}_b - \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p + \nu \nabla^2 \vec{u} \end{cases}$$

由场论知识: $\nabla^2 \vec{u} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) - \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{u}) = -\vec{\nabla} \times \vec{\omega}$

若流动无旋: $\vec{\omega} = 0$, 则上述 N-S 方程成为:

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 \end{cases} \quad (7.1.3)$$

$$\begin{cases} \frac{D\vec{u}}{Dt} = \vec{f}_b - \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p \end{cases} \quad (7.1.4)$$

形式上与 Euler 方程组 (无粘流体的控制方程) 完全一样.

但是: ① 由于无粘流动与有粘流动的边界条件不同, 因而两者的解不同; ② Euler 方程在给定的 B.C.'s 下有唯一解, 但其方程阶数比原始 N-S 方程降一阶 (少了 $\nu \nabla^2 \vec{u}$ 项), 也就是前者的 B.C. 个数要少于后者. 因此, 固壁 (无滑移条件) 的限制, 使得无旋的粘性流体运动的解一般不存在. 换句话说, 粘性流体运动一般都是有旋的.

(3) 粘性流体运动机械能的耗散性.

我们考察单位体积流体动能 $k = \frac{1}{2} \rho |\vec{u}|^2 = \frac{1}{2} \rho u_i u_i$ 的控制方程. 由动量方程:

$$\rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = \rho f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j}$$

两边同时点乘 u_i 有:

$$\rho \left(\frac{\partial \frac{1}{2} u_i u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial \frac{1}{2} u_i u_i}{\partial x_j} \right) = \rho u_i f_i - \frac{\partial p u_i}{\partial x_i} + \mu u_i \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j}$$

↓
有内力

北京大学工学院

$$\Rightarrow \frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (k u_j) = - \frac{\partial}{\partial x_i} (\pi u_i) - \frac{\partial}{\partial x_i} (p u_i) + \mu \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} (2 u_i S_{ij})$$

注意: $\mu u_i \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} = \mu u_i \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = \mu u_i \frac{\partial}{\partial x_j} (2 S_{ij})$ (7.1.5)

$$= \mu \frac{\partial}{\partial x_j} (2 u_i S_{ij}) - \mu 2 S_{ij} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)$$

$$= \mu \frac{\partial}{\partial x_j} (2 u_i S_{ij}) - 2 \mu S_{ij} S_{ij} \quad \begin{matrix} S_{ij} + S_{ji} \end{matrix}$$

(7.1.5) 的矢量形式:

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (k \vec{u}) = - \vec{\nabla} \cdot \underbrace{[(p + \pi) \vec{u}]}_{p^* \text{ 广义压强}} + \mu \vec{\nabla} \cdot (\vec{u} \cdot \vec{S}) - 2 \mu \vec{S} : \vec{S} \quad (7.1.6)$$

我们对 (7.1.6) 进行体积分:

$$\int_{\tau} \frac{\partial k}{\partial t} d\tau + \int_{\tau} \vec{\nabla} \cdot (k \vec{u}) d\tau = - \int_{\tau} \vec{\nabla} \cdot [(p + \pi) \vec{u}] d\tau + \mu \int_{\tau} \vec{\nabla} \cdot (\vec{u} \cdot \vec{S}) d\tau - 2 \mu \int_{\tau} (\vec{S} : \vec{S}) d\tau$$

$$\Rightarrow \int_{\tau} \frac{\partial k}{\partial t} d\tau = \int_A [- (k + p + \pi) \vec{u} + \vec{u} \cdot \vec{S}] \cdot \vec{n} dA - 2 \mu \int_{\tau} (\vec{S} : \vec{S}) d\tau \quad \underbrace{\qquad\qquad}_{\geq 0}$$

$$\Rightarrow \int_{\tau} \frac{\partial k}{\partial t} d\tau = - \underbrace{2 \mu \int_{\tau} (\vec{S} : \vec{S}) d\tau}_{\Phi} \leq 0 \quad (7.1.7)$$

Φ 为由粘性耗散引起的动能向内能转化 (为不可逆过程). 这是粘性流动和无粘流动的重要区别之一.

北京 大学 工 学 院

(4) 粘性流体运动中涡旋的扩散性:

对于均质不可压缩无粘流体, 在有势力作用下, 涡的强度保持不变, 涡就象是“冻结”在涡线上一样 (参考 Helmholtz 定理).

在粘性流体中, 涡场的强弱分布在不等地变化, 这一点, 可以由涡量的控制方程得到理解.

对动量方程 (7.1.2) $\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = \vec{f}_b - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \vec{u}$
 两边取旋度: (注意到 $(\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = \nabla \left(\frac{1}{2} \vec{u}^2 \right) - (\vec{u} \times \vec{\omega})$,

$$\text{且 } \nabla \times (\vec{u} \times \vec{\omega}) = (\vec{\omega} \cdot \nabla) \vec{u} - (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{\omega}$$

$$\text{若体力有势 } \nabla \times \vec{f}_b = \nabla \times (-\nabla \pi) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{D \vec{\omega}}{Dt} = \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{\omega} = \underbrace{(\vec{\omega} \cdot \nabla) \vec{u}}_{\text{涡的拉伸或压缩项}} + \underbrace{\nu \nabla^2 \vec{\omega}}_{\text{涡的扩散项}} \quad (7.1.8)$$

为便于推导, 我们以平面 (二维) 均质不可压粘性流体在有势力作用下的运动为例:

$$\vec{\omega} \perp \vec{u} \Rightarrow \vec{\omega} \perp \nabla \psi \Rightarrow (\vec{\omega} \cdot \nabla) \vec{u} \equiv 0 \quad (\text{没有涡的拉伸和压缩项})$$

$$\text{则 (7.1.8) 成为 } \frac{\partial \omega_z}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \omega_z = \nu \nabla^2 \omega_z \quad (7.1.9)$$

在涡量的极值点处: $\frac{\partial \omega_z}{\partial x} = \frac{\partial \omega_z}{\partial y} = 0$, 因而 (7.1.9)

$$\Rightarrow \frac{\partial \omega_z}{\partial t} = \nu \left(\frac{\partial^2 \omega_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega_z}{\partial y^2} \right) \quad (7.1.10)$$

$$\text{在 } \omega_z \text{ 极小值处: } \frac{\partial^2 \omega_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega_z}{\partial y^2} > 0 \Rightarrow \frac{\partial \omega_z}{\partial t} > 0$$

$$\text{在 } \omega_z \text{ 极大值处: } \frac{\partial^2 \omega_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega_z}{\partial y^2} < 0 \Rightarrow \frac{\partial \omega_z}{\partial t} < 0$$

北京 大学 工 学 院

- 讨论: ① 平面二维流动无涡的拉伸和压缩运动 (7.1.9).
 ② 在粘性流体的运动中, 由于粘性的作用, 涡量不会再“冻结”在流体内, 而是不断扩散.
 ③ 在粘性流体中, 即使原来无旋的地方, 也会由于周边涡的扩散 (流体的剪切运动) 而变的有旋.

例如: -无限长平板的突然起动. 由于粘性作用, 板的运动产生的涡量向y方向扩散.

(5) N-S方程的简化:

我们写出无量纲形式的N-S方程 (为简单书写, 我们略去所有变量右上角的“*”).

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{u} = 0 \\ St \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = \frac{1}{Fr^2} \vec{f}_b - \nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \vec{u} \end{cases}$$

对于定常情况:

- ① 若 $Re \rightarrow \infty$ (或 $\nu \rightarrow 0$), 即流体粘性可以忽略不计时, 我们通常面临的是无粘, 不可压, 无旋流动. 一般求解步骤如第六章所述: 求解速度势; 再通过 Bernoulli 积分或动量积分关系式确定力 —— 把运动学和动力学分开求解.
- ② 若 Re 很小时 (如 $Re \rightarrow 0$), 通常对应于粘性作用很大的流体运动情况, 惯性力项可以忽略不计. 此时, 如果体力有势, 可以并入压力梯度项, 动量方程得到极大简化:

北京 大学 工学院

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 \\ \mu \nabla^2 \vec{u} = \vec{\nabla} p' \end{cases} \quad (7.1.11)$$

称为斯托克斯方程 (多用于内流问题), 其中 $p' = p + \pi$ 称为广义压强。

③ 若 Re 很大 (但不是 $\rightarrow \infty$), 在流场大部分区域可忽略粘性作用, 但是在近壁的很薄的一层内, 要同时兼顾惯性力和粘性力的作用。这就是 1904 年普朗特 (Prandtl) 提出的处理小粘性系数 (或大 Reynolds 数) 的流体运动理论——边界层理论。

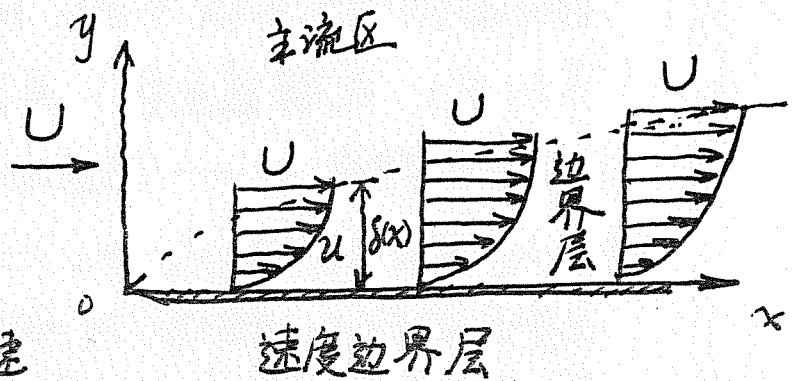
二. 边界层的物理概念

1904 年, 德国著名力学家 Prandtl 通过实验说明, 当流体粘度很小时, 流经物体的流动可分为两个区: 物面附近的一薄层的边界层区和它以外的主流区 (外部势流区)。
“在边界层内, 粘性力起重要作用, 而在外部主流区粘性力作用可以忽略不计。”

(一) 边界层的各种厚度

1. 名义厚度:

我们将 $u = 0.99U$ 处的 y 值定义为速度边界层的名义厚度 $\delta(x)$, 通常很薄, 流体速度在内部由零增长到 $u_e = 0.99U$ 。因而速度梯度很大, 造成很大的切应力, 粘性起着重要作用。



北京 大学 工学院

惯性力量级: $\rho u \frac{\partial u}{\partial x} \sim \rho U^2 / x$

粘性力量级: $\mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \sim \mu U / \delta^2$

在层流边界层内有: $\rho U^2 / x \sim \mu U / \delta^2 \Rightarrow \delta(x) \sim \sqrt{\frac{\mu x}{\rho U}}$

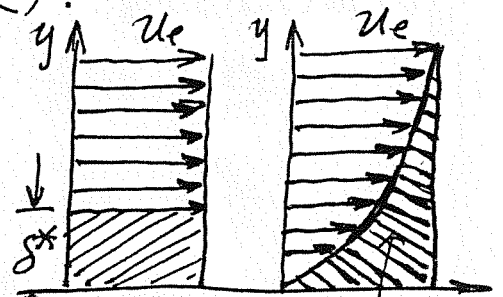
即 $\delta(x) \sim x Re_x^{-\frac{1}{2}}$ (7.2.1)

其中 $Re_x = \frac{\rho U x}{\mu}$ 称为以到平板前缘距离 x 为特征长度的当地雷诺数。因此, 层流边界层的(名义)厚度正比于 \sqrt{x} 增长。

2. 位移厚度 (也称质量流量亏损厚度):

$$\rho U \delta^* = \int_0^{\infty} \rho (U - u) dy$$

$$\Rightarrow \delta^* = \int_0^{\infty} (1 - \frac{u}{U}) dy \quad (7.2.2)$$

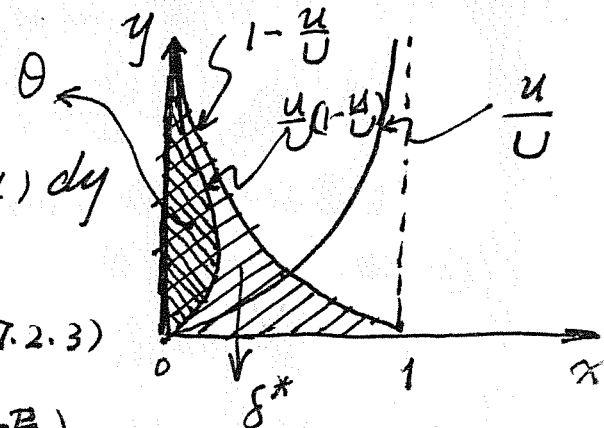


对应于无粘流体, 相当于固定边界上移了 δ^* 的距离。(质量流量亏损量)

3. 动量厚度 (动量亏损厚度):

$$\rho \theta U \cdot U = \int_0^{\infty} \rho u (U - u) dy$$

$$\Rightarrow \theta = \int_0^{\infty} \frac{u}{U} (1 - \frac{u}{U}) dy \quad (7.2.3)$$



(二) 边界层控制方程. (二维平板边界层)

我们考察粘性不可压缩流体的运动方程 (忽略体力):

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (7.2.4)$$

北京 大学 工 学 院

$$\rho \left[\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right] = - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] \quad (7.2.5)$$

$$\rho \left[\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right] = - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] \quad (7.2.6)$$

我们选取来流速度 U 为特征速度，物体长度 L 为 x 方向特征长度，边界层的厚度 δ 为 y 方向特征长度，且 $\delta \ll L$ 。下面对方程 (7.2.4) ~ (7.2.6) 中各项进行量级估计：

$$\frac{\partial u}{\partial x} \sim O\left(\frac{U}{L}\right), \quad \frac{\partial u}{\partial y} \sim O\left(\frac{U}{\delta}\right), \quad \frac{\partial u}{\partial t} \sim O\left(\frac{U^2}{L}\right)$$

由连续性方程： $\frac{\partial v}{\partial y} \sim \frac{\partial u}{\partial x} \sim O\left(\frac{U}{L}\right) \Rightarrow v \sim O\left(\frac{U}{L}\delta\right)$ 。

① 由 (7.2.5) 有：

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

$$\left(\frac{U^2}{L}\right) \quad \left(\frac{U^2}{L}\right) \quad \left(\frac{U^2}{L}\right) \quad \left[\left(\frac{U^2}{L}\right)\right] \quad \left(\frac{U}{L^2}\right) \quad \left(\frac{U}{\delta^2}\right)$$

显然， $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \ll \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ ，即使方程平衡，则有 更合理的解算是一般情况下，压力梯度项与粘性力项同量级，通量也是。

$$\frac{U^2}{L} \sim \nu \frac{U}{\delta^2} \text{ 同量级} \Rightarrow \frac{\delta}{L} = O\left(Re^{-\frac{1}{2}}\right) \quad (7.2.7)$$

其中 $Re = \frac{UL}{\nu}$ 。因而，为了让 $\frac{\delta}{L} \ll 1$ ，必须让 Re 足够大。这是边界层理论满足的必要条件。

② 由 (7.2.6) 式有：

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right)$$

$$\left(\frac{U^2}{L^2}\delta\right) \quad \left(\frac{U^2}{L^2}\delta\right) \quad \left(\frac{U^2}{L^2}\delta\right) \quad \left(\frac{U}{L^3}\delta\right) \quad \left(\frac{U}{L\delta}\right)$$

因此： $\frac{\partial p}{\partial y} \sim O(\delta) \Rightarrow p(x) = p_w(x) + O(\delta^2) \quad (7.2.8)$

北京 大学 工学院

也就是说,在表面平直的条件下,边界层外缘上的压力 P_e 和板上的压力 P_w 的差是 δ/L 的二阶小量,所以可以近似地认为: $p(x) = P_w(x) = P_e(x) \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial y} = 0$. (7.2.9)

即,压力 p 在边界层内仅随 x 和 t 变化,与 y 无关。

综上,Prandtl 的边界层方程为:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 & (7.2.10) \\ \rho \left[\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right] = - \frac{dp}{dx} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} & (7.2.11) \\ \frac{\partial p}{\partial y} = 0 & (7.2.13) \end{cases}$$

在边界层外缘,由于流动满足 Euler 方程(势流);则:

$$\rho \frac{\partial u_e}{\partial t} + \rho u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} = - \frac{\partial P_e}{\partial x}$$

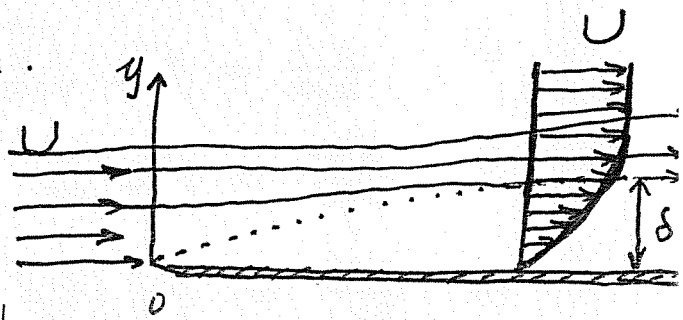
代入(7.2.11)可以推出: (Prandtl 边界层运动方程的另一形式)

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 & (7.2.14) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u_e}{\partial t} + u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} & (7.2.15) \end{cases}$$

三. 平板层流边界层的精确解.

无限空间一均匀气流吹过半无限长、无厚度平板引起的边界层运动。当气流吹过平板时,不会造成流场变化,继而主流中压力不变,流动可认为是定常的。 $u_e = U = \text{常数}$ 。



因此由(7.2.14)和(7.2.15)边界层运动方程可写成:

北京 大学 工 学 院

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (7.3.1)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (7.3.2)$$

边界条件: $y=0$ 处, $u=v=0$
 $y=\infty$ 处, $u=U$

令 $g(x) = \sqrt{\frac{\nu x}{U}}$, 具有长度的量纲,

引入无量纲坐标: $\eta = \frac{y}{g(x)} = y \sqrt{\frac{U}{\nu x}}$. (7.3.3)

再引入流函数 ψ 使得:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad \text{代入 (7.3.2) 有:}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \nu \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} \quad (7.3.4)$$

取无量纲流函数 $f(\eta) = \frac{\psi}{\sqrt{\nu U x}}$, 并注意:

$$\textcircled{1} \quad u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = f' \sqrt{\nu U x} \sqrt{\frac{U}{\nu x}} = f' U \quad (7.3.5)$$

$$\Rightarrow f' = \frac{u}{U} \quad (7.3.6)$$

$$\textcircled{2} \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = f'' U \sqrt{\frac{U}{\nu x}}$$

$$\textcircled{3} \quad \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} = f''' U \frac{U}{\nu x} = f''' \frac{U^2}{\nu x}$$

$$\textcircled{4} \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{1}{2} f \sqrt{\frac{\nu U}{x}} + \sqrt{\nu U x} f' \left(-\frac{1}{2} \eta x^{-1}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\nu U}{x}} [f - \eta f']$$

$$\textcircled{5} \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\nu U}{x}} (-\eta f'') \sqrt{\frac{U}{\nu x}} = -\frac{1}{2} \frac{U}{x} \eta f''$$

北京 大学 工 学 院

代入到(7.3.4)有: $2f''' + ff'' = 0$ (7.3.7)

边界条件为:
$$\begin{cases} \eta=0, f=f'=0 \\ \eta \rightarrow \infty, f' \rightarrow 1 \end{cases}$$
 (7.3.8)

因此, 平板边界层 (= 二维层流平板边界层) 问题转化为在边界条件(7.3.8)下求解三阶非线性常微分方程(7.3.7).

通常可采用数值方法求解, 见 J. P. 26, 图 C4.3.1。也可用其它渐近法求解。

讨论:

(1) $f' = \frac{u}{U} = 0.99$ 时, $\eta = \delta, \eta = 5.0 \Rightarrow \delta = 5\sqrt{\frac{\nu x}{U}}$.

$\Rightarrow \frac{\delta(x)}{x} = 5\sqrt{\frac{\nu}{Ux}} = 5 Re_x^{-\frac{1}{2}}$ (7.3.9)

(2) $\delta^* = \int_0^{\infty} (1 - \frac{u}{U}) dy$
 $= \int_0^{\delta} (1 - \frac{u}{U}) dy = \int_0^5 (1 - f') \sqrt{\frac{\nu x}{U}} d\eta = 1.72 x Re_x^{-\frac{1}{2}}$

$\Rightarrow \frac{\delta^*}{x} = 1.72 Re_x^{-\frac{1}{2}}$ (7.3.10)

(3) $\theta = \int_0^{\infty} \frac{u}{U} (1 - \frac{u}{U}) dy = \int_0^{\delta} \frac{u}{U} (1 - \frac{u}{U}) dy$
 $= \int_0^5 f' (1 - f') \sqrt{\frac{\nu x}{U}} d\eta = 0.664 x Re_x^{-\frac{1}{2}}$

$\Rightarrow \frac{\theta}{x} = 0.664 Re_x^{-\frac{1}{2}}$ (7.3.11)

(4) 壁面局部摩擦系数:

$\tau_w = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} = \mu U f'' \frac{\partial \eta}{\partial y} = \mu U f'' \sqrt{\frac{U}{\nu x}} \Big|_{\eta=0}$
 $= 0.332 U \sqrt{\frac{\rho \mu U}{x}} = 0.332 \rho U^2 Re_x^{-\frac{1}{2}}$

$\Rightarrow C_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2} \rho U^2} = 0.664 Re_x^{-\frac{1}{2}}$ (7.3.12)

北京 大学 工 学 院

四. 边界层动量积分方程 —— 边界层流动的积分解法.

我们考察定常情况下的 Prandtl 边界层运动方程:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{array} \right. \quad (7.4.1)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = u_e \frac{du_e}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (7.4.2)$$

$$u \times (7.4.1) + (7.4.2) \Rightarrow \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial (uv)}{\partial y} = u_e \frac{du_e}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (7.4.3)$$

由 (7.4.1) 可知: $u_e \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial (u_e v)}{\partial y} = 0, \quad (u_e = u_e(x))$

$$\Rightarrow \frac{\partial (u_e u)}{\partial x} + \frac{\partial (u_e v)}{\partial y} = u \frac{du_e}{dx} \quad (7.4.4)$$

$$(7.4.4) - (7.4.3) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} [u(u_e - u)] + \frac{\partial}{\partial y} [v(u_e - u)] + (u_e - u) \frac{du_e}{dx} = -\nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

对上式从 0 到 δ 对 y 积分:

$$\frac{d}{dx} \int_0^\delta u(u_e - u) dy + [v(u_e - u)] \Big|_0^\delta + \frac{du_e}{dx} \int_0^\delta (u_e - u) dy = -\nu \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_0^\delta$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx} (u_e^2 \theta) + \delta^* u_e \frac{du_e}{dx} = \frac{\tau_w}{\rho}$$

$$\Rightarrow \boxed{\tau_w = \frac{d}{dx} (\rho u_e^2 \theta) + (\rho u_e \delta^*) \frac{du_e}{dx}} \quad (7.4.5)$$

边界层横截面上
动量流量亏损在
 x 方向的变化率.

边界层横截面上质量
流量亏损与边界层

上缘处速度 u_e 在 x 方向的变化率所引起的动量差

若 $u_e = \text{const.}$ 则:

$$\tau_w = \rho u_e^2 \frac{d\theta}{dx} \quad (7.4.6)$$

$$C_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2} \rho u_e^2} = 2 \frac{d\theta}{dx} \quad (7.4.7)$$

北京 大学 工学院

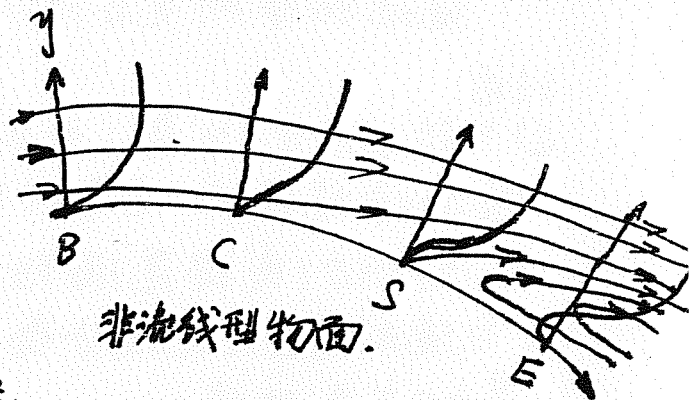
五. 边界层分离 (流动分离) —— 指边界层流动脱离壁面的现象。

我们考察定常情况下, Prandtl 边界层运动方程:

$$\rho(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y}) = -\frac{dp}{dx} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

在壁面上: $u = v = 0$, 因此:

$$\frac{dp}{dx} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (7.4.8)$$



(1) 在顺压梯度区: $\frac{dp}{dx} < 0 \Rightarrow \frac{d^2u}{dy^2} < 0 \Rightarrow$ 速度廓线外凸 (BC), τ

(2) 在压力极小值点: $\frac{dp}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{d^2u}{dy^2} = 0 \Rightarrow$ 拐点位置 (C)

(3) 在逆压梯度区: $\frac{dp}{dx} > 0 \Rightarrow \frac{d^2u}{dy^2} > 0 \Rightarrow$ 速度廓线内凹 (CS)

之后拐点抬升, 到 S 点 $\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \Rightarrow$ 速度廓线与 y 轴相切, 过 S 点后, 出现流体回流, 即流动发生分离 (伴随着流体质点的滞止和倒流)。

* 边界层发生分离的根本原因: 粘性的存在;

边界层发生分离的条件: 逆压梯度的存在。

六. 绕流物体所受阻力。

(一) 摩擦阻力

粘性流体对绕流物体 (物体表面) 切应力沿运动方向的投影分量称为摩擦阻力。若令 \vec{i} 为运动方向, 则:

$$F_D^f = \int_A (\vec{\tau}_w \cdot \vec{i}) dA \quad (7.4.9)$$

(二) 压差阻力

由绕流物体前后压强分布不对称形成的合力称为压差阻力。也称形状阻力。 $F_D^p = \int_A -p(\vec{n} \cdot \vec{i}) dA \quad (7.4.10)$

北京 大学 工学院

其中 \vec{n} 为物面外法线单位矢量。

$$\text{绕流物体所受总阻力 } F_D = F_D^f + F_D^p \quad (7.4.11)$$

讨论:

- ① 当流动不发生分离 (或边界层不脱体) 时, (如平板或流线型物体绕流在一定条件下的情况), 阻力主要由摩擦阻力构成, 压差阻力 (或称尾涡阻力 (如果有)) 很小;
- ② 当流动存在大范围分离时, 通常伴随着很大的压差阻力, 甚至占主导地位;
- ③ 对于物体的非脱体绕流, 用无粘理论获得的物面压力分布与实际测量得到的压力分布很相适。证明压力可以穿过边界层不变 (即在边界层内压力法向梯度 $\rightarrow 0$)。

七. 低雷诺数流动.

在实际流动中, ① 尺寸较小的粒子在粘性流体中的缓慢运动称为流体的低雷诺数流动: 如大气中的烟尘、云雾中的水滴, 河流中的泥沙, 等等。② 其它情况如流体粘度很大时。

例如, 毛细血管直径 $d \approx 10 \mu\text{m}$, 血液流速 $u \approx 1 \text{mm/s}$, 则其内血液流动 Reynolds 数 $Re \approx 10^{-3} \rightarrow 0$ 。

对于这种流动, 由 Reynolds 数物理意义, 惯性力作为可以忽略不计, 流动由 Stokes 方程描述:

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \vec{u} = 0 \\ \nabla p = \mu \nabla^2 \vec{u} \end{array} \right. \quad (7.4.12)$$

$$\nabla p = \mu \nabla^2 \vec{u} \quad (7.4.13)$$

下面, 我们以圆球匀速绕流为例讨论低雷诺数流动:

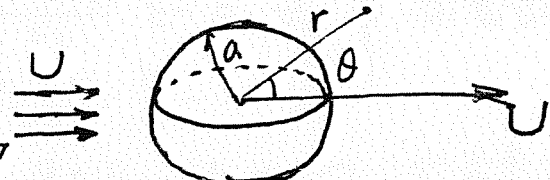
对 (7.4.13) 两端取旋度有:

$$\nabla^2 \vec{\omega} = 0 \quad (7.4.14)$$

即涡量满足 Laplace 方程。

北京 大学 工 学 院

令坐标原点位于运动的球心，圆球以速度 U 向右运动，这是个轴对称流动问题， $\frac{\partial}{\partial \phi} = 0$, $u_\phi = 0$ 。
 根据相对运动原理，相当于圆球不动，流体以均匀速度 U 流过圆球。

由于 (7.4.13) 或 (7.4.14)  完全忽略了粘性力作用，因而我们讨论的是该低雷诺数流动问题的零阶近似解。

$$\vec{u} = \vec{u}(r, \theta, \phi) = (u_r, u_\theta, 0)$$

存在流函数 ψ ，使得：

$$u_r = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad u_\theta = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r} \quad (7.4.15)$$

由 (7.4.14) 有 $\nabla^2 \vec{\omega} = 0$ ，又有 $\omega - \psi$ 方程 \Rightarrow

$$\nabla^2 \nabla^2 \psi = 0 \quad (7.4.16)$$

$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\sin \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \right)$ ，即 ψ 满足双调和函数。若能解出 ψ ，进而求出速度 \vec{u} ，代入 Stokes 方程可求得压强

梯度：

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\mu}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\nabla^2 \psi) \quad (7.4.17)$$

$$\frac{\partial p}{\partial \theta} = -\frac{\mu}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial r} (\nabla^2 \psi) \quad (7.4.18)$$

边界条件：

① $r = a$ 时， $u_r|_{r=a} = U \cos \theta$, $u_\theta|_{r=a} = -U \sin \theta$

② $r \rightarrow \infty$ 时， $u_r = u_\theta = 0$

我们用分离变量法可求得： $\psi(r, \theta) = \frac{1}{4} U \sin^2 \theta (3ar - \frac{a^3}{r})$ (7.4.19)

北京 大学 工学院

$$\Rightarrow \begin{cases} u_r = \frac{1}{2} U \cos \theta \left(\frac{3a}{r} - \frac{a^3}{r^3} \right) \\ u_\theta = -\frac{1}{4} U \sin \theta \left(\frac{3a}{r} + \frac{a^3}{r^3} \right) \end{cases} \quad (7.4.20)$$

压力分布:
$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial r} = -3 \frac{\mu U a}{r^3} \cos \theta \\ \frac{\partial p}{\partial \theta} = -\frac{3}{2} \frac{\mu U a}{r^2} \sin \theta \end{cases} \quad (7.4.21)$$

边界条件: $r \rightarrow \infty$ 时, $p = p_\infty$, 则有:

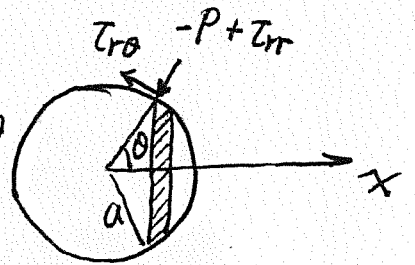
$$p = p_\infty + \frac{3}{2} \frac{\mu U a}{r^2} \cos \theta \quad (7.4.22)$$

在球面上: $p|_{r=a} = p_\infty + \frac{3}{2} \frac{\mu U}{a} \cos \theta \quad (7.4.23)$

因此, 球的迎风面的压力要大于背风面, 会造成前后的压力差, 形成压差阻力; 同时由于粘性摩擦力的存在, 还有摩擦阻力。

$$\tau_{rr} \Big|_{r=a} = 2\mu \frac{\partial u_r}{\partial r} \Big|_{r=a} = 0$$

$$\tau_{r\theta} \Big|_{r=a} = \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right) \Big|_{r=a} = \frac{3}{2} \frac{\mu U}{a} \sin \theta$$



因此, 球所受流体合力 (Stokes 阻力公式)

$$F_x = 2\pi \int_0^\pi [(-p + \tau_{rr}) \cos \theta - \tau_{r\theta} \sin \theta]_{r=a} a^2 \sin \theta d\theta$$

$$= \underbrace{-2\pi \mu U a}_{\text{压差阻力}} - \underbrace{4\pi \mu U a}_{\text{摩擦阻力}} = -6\pi \mu U a.$$

适用条件: $Re \rightarrow 0$, 实际应用中, 只需满足 $Re < 1$ 即可。

注意: 上述结论只基于零阶近似的 Stokes 方程而得到的, 称为 Stokes 流动的理论解。实际上, 当 r 远大于 a 时, 惯性力的影响不能忽略, 因此, 有人 (如 Oseen 等) 曾对上述结果给出修正。