第二章 流体运动的分析基础

1.流体运动的两种数学描述

1.1.拉格朗日法（随体法）

标记质点为（a,b,c）,称为拉格朗日坐标

物理量 f 的拉格朗日表示为 f=f(a,b,c,t)

1.2.欧拉法（当地法、空间法）

标记空间点的坐标为(x,y,z),称为欧拉坐标

物理量 f 的欧拉表示为 f=f(x,y,z,t)

1.3.两种方法的关系

若 $\vec{r}(a,b,c,t)=(x,y,z)$ ，则 $f(x,y,z,t)=f(a,b,c,t)$ 。

表明拉格朗日表达下质点(a,b,c)在 t 时刻的位置的欧拉表达为(x,y,z)，则此时此刻质点(a,b,c)的物理量 f 与位置(x,y,z)处的物理量相等。

事实上，这是欧拉表达的定义,即 $f(x,y,z,t):=f(a,b,c,t)$

1.4.两种方法的比较

拉格朗日法	欧拉法
分别描述有限质点轨迹	同时描述所有质点的参量
复杂	简单
不能	能直接反映参数的空间变化
不适合	适合描述流体元的运动变形
重要	最常用

注：欧拉法的突出优点——运用场论知识方便。

2.速度场

在任一瞬时由空间点上速度矢量构成的场，又称速度分布。表示为 $\vec{v}=\vec{v}(\vec{x},t)$

2.1.流量与平均速度

流体流量 Q： $Q=\int_A \vec{v}\vec{n}dA=\int_A \vec{v}\,d\vec{A}=\frac{1}{dt}\int_A d\tau$ ，其中 $d\tau=(\vec{v}\vec{n})dA\,dt$

质量流量 $\dot{m}$ ： $\dot{m}=\frac{1}{dt}\int_A \rho\,d\tau=\int_A \rho(\vec{v}\vec{n})dA$ ，其中 ρ 为流体的密度

平均速度 V： $V=\frac{Q}{A}=\frac{1}{A}\int_A \vec{v}\vec{n}dA$

对于不可压缩流体， $\dot{m}=\rho Q=\rho VA$

2.2.流动的维度

流动维度的确定：

三维流动：v=v(x,y,z,t)

二维流动：v=v(x,y,t)

一维流动：v=v(x,t)

工程上常用的流动简化模型

二维流动：平面，轴对称

二维流动：截面积变化较缓慢、中心线曲率不大的弯曲管道流动

直圆管一维流动修正因子

动能修正因子 α ： $\int_A (\frac{1}{2}u^2) d\dot{m} = \alpha \frac{1}{2} V^2 \dot{m}$ $\alpha = \frac{\int_A (\frac{1}{2}u^2) d\dot{m}}{\frac{1}{2} V^2 \dot{m}}$ ，无量纲

动量修正因子 β ： $\int_A u\, d\dot{m} = \beta V \dot{m}$ $\beta = \frac{\int_A u\, d\dot{m}}{V \dot{m}}$ ，无量纲

2.3.定常流动与非定常流动

定常流动：u=u(x,y,z)

非定常流动：u=u(x,y,z,t)

3.流体运动的几何描述

3.1.definition

迹线 pathline： $\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{v}(\vec{r}, t)$ 时间积累性、持续性

流线 streamline： $d\vec{r} \times \vec{V} = 0$ $\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v}$

迹线和流线的对比：

迹线	流线
Lagrangian	Eulerian
同一质点的路径	同一时刻的情形
t 是自变量	t 是参数
实际	假想
持续	瞬时

脉线 streakline（条纹线，染色线，烟线）：不同时刻通过同一位置的流体质点在某一瞬时的连线。

流体线（时间线 timeline）：某时刻首尾相连的流体质点的连线

讨论：

定常流动中，脉线、流线、迹线重合。

非定常流动中，脉线、流线和迹线互不重合。

流线上每一个质点沿各自的迹线运动。

除了驻点和流动奇点以外，任何情况下两条流线不相交。

3.2.definition

流管：流场中通过任意非流线的封闭曲线上每一点做流线所围成的管状面。

1.具有流线的所有特点；2.定常流动中形状不变

流束：流管内的流体。

平行流：流束内所有流线均相互平行。

缓变流：流束内所有流线夹角很小。

有效截面：处处与流线垂直的截面。

总流：所有微元流束的总和。

4.流体质点的随体导数{张量}

4.1.流体的加速度场

矢量表达 $\vec{a}(x,y,z,t)=\frac{d}{dt}\vec{v}(x,y,z,t)=\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+\nabla\vec{v}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt}=\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+\nabla\vec{v}\cdot\vec{v}$ {复合函数的链式法则}

张量表达 $a_i=\frac{\partial u_i}{\partial t}+u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ {这门课上对于 Einstein summation convention 的上下标区分没有理会，原因应该是出现的标记很少，不会重复，所以不用区分。}

4.1.质点导数（物质导数、随体导数）

随体导数(物质导数) $\frac{DF}{Dt}$ ：拉格朗日观点下，运动参量随时间的导数。

当地导数(局部导数) $\frac{\partial F}{\partial t}$ ：欧拉观点下，运动参量随时间的导数。反映了流场的不定常性。

位变导数(对流导数) $(\vec{v}\cdot\nabla)F$ ：不同位置上物理量的差异引起的变化率。反映了流场的不均匀性。

随体导数算子

矢量表示： $\frac{D}{Dt}=\frac{\partial}{\partial t}+(\vec{v}\cdot\nabla)$

张量表示： $\frac{D}{Dt}=\frac{\partial}{\partial t}+u_j\frac{\partial}{\partial x_j}$

任意物理量 $F(x,y,z,t)$ 的随体导数可以由随体导数算子求出。{随体导数算子事实上说的是在把空间坐标看做时间的函数时，即沿着物体运动的轨迹，将物理量对时间求导的算法。随体导数算子本质上是复合函数求导的链式法则的一种特殊形式。从这个视角对待随体导数，它就变得十分 trivial 了。}

$$\frac{DF}{Dt}=\frac{\partial F}{\partial t}+(\vec{v}\cdot\nabla)F$$

5.流场中一点邻域的相对运动分析

5.1.刚体运动的速度分解定理

$$\vec{v}=\vec{v}_0+\vec{\Omega}\times\vec{r}$$

5.2.流体运动的 Helmholtz 分解定理{张量}

流场内点 $M_0(x,y,z)$ 邻域内流体质点 $M(x+\delta x,y+\delta y,z+\delta z)$ 的速度

$$v_i=v_{oi}+\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\partial x_j$$

其中 $\nabla\vec{v}$ 为速度梯度张量 $\overline{\overline{D}}=D_{ij}=\frac{\partial v_i}{\partial x_j}$

可以分解为

$$\overline{\overline{D}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}-\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)=S_{ij}+A_{ij}$$

其中，应变率张量（变形速度张量）strain rate tensor，是个对称张量。

$$\overline{\overline{S}}=S_{ij}=\frac{1}{2}(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i})=\begin{pmatrix}\epsilon_1 & \frac{1}{2}\theta_3 & \frac{1}{2}\theta_2\\ \frac{1}{2}\theta_3 & \epsilon_2 & \frac{1}{2}\theta_1\\ \frac{1}{2}\theta_2 & \frac{1}{2}\theta_1 & \epsilon_3\end{pmatrix}$$

旋转张量 rotation tensor，是个反对称张量。

$$\overline{\overline{A}}=A_{ij}=\frac{1}{2}(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}-\frac{\partial v_j}{\partial x_i})=\begin{pmatrix}0 & -\Omega_3 & \Omega_2\\ \Omega_3 & 0 & -\Omega_1\\ -\Omega_2 & \Omega_1 & 0\end{pmatrix}$$

其中角速度 $\vec{\Omega}=(\Omega_{1,}\Omega_{2,}\Omega_3)=\frac{1}{2}\nabla\times\vec{v}$

于是，速度分解定理可写为

$$v_i=v_{oi}+S_{ij}\delta x_j+A_{ij}\delta x_j=\vec{v}_o+\overline{\overline{S}}\cdot\delta\vec{r}+\vec{\Omega}\times\delta\vec{r}$$

其中平动速度 $\vec{v}_1=\vec{v}_0$ 、变形速度 $\vec{v}_2=\overline{\overline{S}}\cdot\delta\vec{r}$ 和转动速度 $\vec{v}_3=\vec{\Omega}\times\delta\vec{r}=(\frac{1}{2}\nabla\times\vec{v})\times\delta\vec{r}$ 。

5.3.流体的变形运动

线应变率：线元 $\delta\vec{r}=(\delta x,\delta y,\delta z)$ 的线应变率。{这里是应变速度，即单位时间的应变}{ $\delta\vec{r}_1$ 是保持在 i 方向上的线元分量。}

$$\epsilon_1=\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{(\frac{D\delta x}{Dt})}{\delta x}$$

$$\epsilon_2=\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{(\frac{D\delta y}{Dt})}{\delta y}$$

$$\epsilon_3=\frac{\partial w}{\partial z}=\frac{(\frac{D\delta z}{Dt})}{\delta z}$$

面积扩张率：面元 $\delta A=\delta x\delta y$ 的面积扩张率为 $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}$

体积膨胀率：体元 $\delta V=\delta x\delta y\delta z$ 的体积膨胀率为 $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}$

角变形速率：

$$\theta_k=\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i}=\frac{-D\gamma_{ij}}{Dt}$$,其中 γ_{ij} 为 i，j 轴的夹角

旋转角速度： M_0 点邻域内流体微团绕 z 轴的旋转角速度为两正交线元在 xy 平面内绕 z 轴的旋转角速度的平均值。

$$\Omega_k=\frac{1}{2}(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}-\frac{\partial v_j}{\partial x_i})$$

6.流体涡旋运动的基本概念

涡量：流体微元旋转角速度的两倍。

$$\vec{\omega}:=\nabla\times\vec{v}=2\vec{\Omega}$$

涡量场：各点流体质元的涡量组成的向量场。

涡线： $d\vec{r}\times\vec{\omega}=0$

涡面：过涡旋场中一非涡线的所有涡线组成的曲面。

涡管： 过涡旋场中一非涡线的简单闭曲线的所有涡线组成的管状曲面。

涡通量： $\int_s \vec{\omega}\cdot d\vec{s}$

速度环量： $\Gamma=\int_L \vec{v}\cdot d\vec{r}$ ，L 为一封闭曲线。

涡通量等于速度环量，即 $\int_s \vec{\omega}\cdot d\vec{s}=\int_L \vec{v}\cdot d\vec{r}$ 。

7.流体流动分类

7．1 .层流与湍流 laminar flows and turbulent flows

雷诺数： $R_e:=\dfrac{\rho u D}{\mu}$ ，雷诺数与层流转捩到湍流相关。

7．2 .内流与外流

内流：整个流场被（或几乎被）固壁包围的流动。

流场速度梯度较大，黏性力影响显著。

外流：无界流场绕固体物的流动。

边界层外，黏性力可以忽略。

7．3 .无旋流动与有旋流动

无旋流动：涡量处处为零的流动。

无黏流体的势流理论

有旋流动（涡旋流动）：涡量不为零的流动。

8.作用在流体（微元）上的力

8．1 .质量力（体积力）与表面力

质量力在空间的分布密度： $\vec{f}(x,y,z,t)=\dfrac{d\vec{F}_b}{dm}=\dfrac{1}{\rho}\dfrac{d\vec{F}_b}{d\tau}$

如重力， $\vec{f}_b=\vec{g}$

作用在有限体积上的质量力： $\int_\tau \rho\vec{f}\,d\tau$

表面力在面上的分布密度(应力)： $\vec{p}_n(x,y,z,t)=\dfrac{d\vec{F}_s}{dA}$

作用在有限面积上的表面力： $\int_A \vec{p}_n dA$

8．2 .(略)

8．3 .-8．4 .应力张量及其对称性{张量}

１）只要知道任意三个正交平面上的应力，过一点各个方向上的应力都可以求得表示成应力张量与方向向量的乘积。

２）而且，应力张量是对称的。

推导过程应用力平衡和力矩平衡，可参考《材料力学》P１３１

8．5 .静止流体和理想流体的应力张量{张量}

理想流体：无黏流体

静止流体和理想流体在任何方向都不承受切应力，而且流体不能承受拉力，故应力张量只存在各项同性部分，可记为 $\overline{\overline{P}}=-p\overline{\overline{I}}$ ，其中 $p=p(x,y,z,t)$ 称为压力函数。

推导：首先，一点处的应力张量非对角元均为零。其次，由于任何朝向的面元上的应力都与面元法方向同向，即 $\vec{p}_n=\lambda\vec{n}$ ，依据 $\vec{p}_n=\vec{n}\cdot\overline{\overline{P}}$ ，所以任何向量都是应力张量的特征向量，所以应力张量可

记为 $\overline{\overline{P}}=-p\overline{\overline{I}}$ 。

9.应力张量与应变率张量的关系——本构关系{张量}

将应力张量写成各向同性部分（“静压强项”）和各向异性部分（“偏应力项”） $\overline{\overline{P}}=-p\overline{\overline{I}}+\overline{\overline{P}}'$

假定：

０）斯托克斯假设：压力函数p就是平均法应力，即 $p=\frac{-1}{3}(p_{xx}+p_{yy}+p_{zz})$

１）　其中当运动静止时，运动流体的压力函数p趋于静止流体的压力函数，偏应力张量 $\overline{\overline{P}}'$ 趋于零。

２）偏应力张量的各分量是局部速度梯度张量各分量的线性齐次函数。

３）流体是各向同性的

依据以上假定，运用张量知识，可以推出广义牛顿公式（广义粘性定律）{吴Ｐ１６４}{推导部分不用掌握}

$$\overline{\overline{P}}=-p\overline{\overline{I}}+2\mu(\overline{\overline{S}}-\frac{1}{3}\overline{\overline{I}}\nabla\cdot\vec{v})$$

牛顿流体：满足上述本构关系（广义牛顿公式）的流体。