第三章 流体静力学（流体的平衡）

1.流体的平衡：绝对平衡、相对平衡

2.流体平衡时的压强

3.流体平衡的条件

3.1.平衡的微分方程

x 方向表面力： $(p-\frac{\partial p}{\partial x}\frac{dx}{2})dydz-(p+\frac{\partial p}{\partial x}\frac{dx}{2})dydz=\frac{-\partial p}{\partial x}dxdydz$

表面力： $-\nabla p\,dxdydz$

体积力： $\rho\vec{f}_b d\tau$

绝对平衡方程： $\rho\vec{f}_b=\nabla p$

3.2.等压面

定义： $dp=\nabla p\,d\vec{r}=0$

考虑到绝对平衡方程，得出等压面的微分方程： $\rho\vec{f}_b d\vec{r}=0$ ，即在等压面上体力处处与等压面垂直。

3.3.流体平衡的必要条件

由绝对平衡方程得 $\nabla\times\vec{f}_b=\nabla\times(\frac{1}{\rho}\nabla p)=\frac{-1}{\rho^2}\nabla\rho\times\nabla p$

于是 $\vec{f}_b\cdot(\nabla\times\vec{f}_b)=\frac{-1}{\rho^3}\nabla p\cdot(\nabla\rho\times\nabla p)=0$

流体平衡的必要条件 $\vec{f}_b\cdot(\nabla\times\vec{f}_b)=0$

均质流体 $\rho=constant$

$$\nabla\times\vec{f}_b\equiv 0 \qquad -\nabla\Pi=\frac{1}{\rho}\nabla p \qquad \Pi=\frac{-p}{\rho}$$

非均质流体：正压流体 $\rho=\rho(p)$ ，如等温或绝热气体

定义压力函数 $P(p)$ ： $\nabla P=\frac{\nabla p}{\rho(p)}$

由绝对平衡方程得， $\vec{f}_b=\nabla P$ $\nabla\times\vec{f}_b\equiv 0$ ，故 $\vec{f}_b$ 有势，势函数 $\Pi=-P(p)$

此时，等压面，等体力面（等体力势能面），等密度面重合。

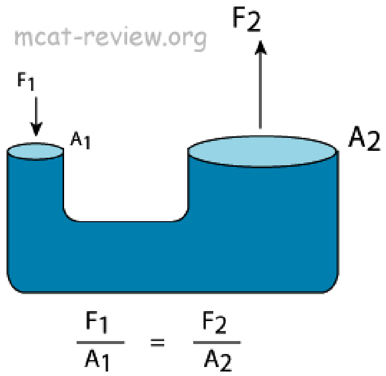
4.流体静力学基本方程（静力学规律）

由 $P=-\rho gz+C$ 得

$\frac{P}{\rho}+gz=C_1$ 或 $\frac{P}{\rho g}+z=C_2$ (总水头)

$p=p_0+\rho gh$ ，其中 h 为淹深。

$p=\rho g(h+\frac{P_0}{\rho g})=\rho gh_e$ ，其中 h_e 为等效深度。



Pascal 定理{见笔记纸}

5.均质液体的相对平衡

5.1.液体做等加速直线运动

$\rho = constant$ ， $\vec{f}_b = \vec{g} - \vec{a}$

由绝对平衡方程， $\rho(\vec{g}-\vec{a}) = \nabla p$ ， $dp = \rho(-gdz - adx)$ ， $p = -\rho(ax+gz)+C$

由边值 $x=0, z=z_0 : p=p_0$,得出 $C=p_0+\rho g z_0$

压力分布 $p = p_0 + \rho g[(z_0 - z) - \frac{a}{g}x]$

性质：压强线性分布；等压面为平行平面；垂直方向压强分布 $p=p_0+\rho g h$ ， $h=z_s-z$ 为淹深。

5.2.均质流体的等角速度旋转运动

6.均质液体对平壁面的总压力

{回顾理论力学静力学部分知识——力系的简化与平衡：一般力系对任一点均可以简化为一个主矢与主矩。特别的，对于平面力系，如果主矢不为零，那么空间内可以找到唯一的一条直线，以线上的点为参考点，力系主矢为零。}

微面元所受压力： $dF = \rho g h dA = \rho g y \sin\theta dA$ ， θ 为 y 轴与水平面夹角。

壁面所受总压力： $F = \int_A \rho g y \sin\theta dA = \rho g \sin\theta \int_A y dA = \rho g y_c \sin\theta A = P_c A$

设压力中心坐标为 $(x_D, y_D) = (x_C + f, y_C + e)$,其中 f 和 e 称为纵向和横向偏心矩。

则总合力对形心坐标轴的力矩：

$$F e = \int_A \eta dF = \rho g \sin\theta \int_A y \eta dA$$

$$F f = \int_A \xi dF = \rho g \sin\theta \int_A y \xi dA$$

可以求得 $e := \frac{I_{\xi\xi}}{y_c A}$ $f := \frac{I_{\xi\eta}}{y_c A}$

7.均质流体对曲壁的总压力（二维曲壁）

总压力的水平分量

$F_x = \int_{A_x} dF_x = \rho g \int_{A_x} h dA_x = \rho g h_{xc} A_x$,其中 h_{xc} 为曲壁水平投影面 A_x 的形心淹深。

总压力的垂直分量

$F_x = \int_{A_h} dF_h = \rho g \int_{A_h} h dA_h = \rho g \tau_p$ ， τ_p 称为压力体，为壁面上方液体的体积。

总压力大小

$$|\vec{F}| = \sqrt{F_x^2 + F_h^2}$$

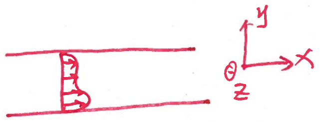
液体与压力体异侧时， F_x 与 F_h 变号。

{对于二维曲壁，不要求计算主矩为零时主矢的作用点。}

【补压强场的笔记】

【补压强场的笔记】

1、一维管流的压强分布



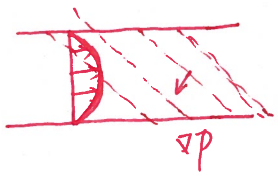
图示一维管流，

$\vec{v}=f(y)\hat{x}$

由动量定理得

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial x}=\mu f''(y) \\ \frac{\partial p}{\partial y}=-\rho g \\ \frac{\partial p}{\partial z}=0 \end{cases}$$

即压强沿y轴为静水压分布，沿x轴由非定常



特别的，对抛物线型速度分布 $f(y)=-ay^2+\cdots$

有 $\frac{\partial p}{\partial x}=-2a\mu$，即压强沿流动方向线性递减.

2、对于无粘流体，当 $\frac{D\vec{v}}{Dt}=0$ 时，流体压强为静水压分布.

3、压力计读数 p_g 为表压.（相对压强）