第四章 流体运动的基本方程

1.系统与控制体

系统 system：确定的物质的集合

控制体 control　volume：确定得空间的集合

2.流体系统的随体导数（雷诺输运定理）

假定在 t 时刻，单位体积的流体物理量的分布函数为 $\eta(\vec{r},t)$

系统广延量：$N_{sys}(t)=\int_{sys}\eta(\vec{r},t)d\tau$

控制体广延量：$N_{CV}(t)=\int_{CV}\eta(\vec{r},t)d\tau$

雷诺输运公式 $\frac{DN_{sys}}{Dt}=\frac{\partial}{\partial t}\int_{CV}\eta d\tau+\int_{CS}\eta(\vec{v}\cdot\vec{n})dA$ ｛丁（中）｝

讨论：

对定常流动，第一项为零，即系统导数只取决于控制面 CS 上的流动，与控制体内的流动无关。

对固定且不变形的 CV，第一项的对时间的偏导可以移入积分号中。

对任意运动且可变的控制体，第二项的 $\vec{v}$ 为相对速度 $\vec{v}_r$ 。

雷诺输运定理的第二种推导见［吴 P１３７］

$$\frac{D}{Dt}\int_{\tau}\rho\phi d\tau=\frac{D}{Dt}\int_{\tau}\phi dm=\int_{\tau}\rho\frac{D\phi}{Dt}d\tau+\int_{\tau}\phi\frac{D}{Dt}dm=\int_{\tau}\rho\frac{D\phi}{Dt}d\tau$$

对于矢量

$$\frac{D}{Dt}\int_{\tau}\rho\vec{a}d\tau=\int_{\tau}\rho\frac{D\vec{a}}{Dt}d\tau$$

3.连续性方程

对空间密度分布 $\rho=\rho(\vec{r},t)$ ，

系统质量 $m_{sys}=\int_{sys}\rho d\tau$

由质量守恒率：$\frac{Dm_{sys}}{Dt}=0$

由雷诺输运定理：$\frac{\partial}{\partial t}\int_{CV}\rho d\tau+\int_{CS}\rho v_n dA=0$

讨论：

１)若 CV 固定且不变形，则第一项的偏导数移入积分号，称为积分形式的连续性方程。

２)微分形式的连续性方程：$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\vec{v})=0$

上式的对同种流体成立。

由上式可推得 $\frac{D\rho}{Dt}+\rho\nabla\cdot\vec{v}=0$ ，所以 $\nabla\cdot\vec{v}=0$ 等价与 $\frac{D\rho}{Dt}=0$ ，他们都是流体不可压的判断方式。

对可压流体的定常运动，$\nabla\cdot(\rho\vec{v})=0$

3)对固定控制体内均质不可压流体，因为 $\frac{D\rho}{Dt}=0; \rho=constant$,由积分形式的连续性方程得，$\int_{CS} v_n dA=0$ ，即通过控制面的净体积流量为零。

4)对定常运动的流体，$\int_{CS} \rho v_n dA=0$,即通过 CS 的质量流量为零。

5)对于运动的控制体，第二项的 $\vec{v}$ 为相对速度 $\vec{v}_r$ 。

4.动量方程

4.1.固定 CV 的情况

流体系统的动量：$\vec{p}_{sys}=\int_{sys} \rho \vec{v} d\tau$

总的作用力：$\Sigma \vec{F}=\int_{CV} \rho \vec{f}_b d\tau+\int_{CS} \vec{p}_n dA$

由动量定理：$\frac{D\vec{P}_{sys}}{Dt}=\Sigma \vec{F}$

由雷诺输运定理得积分形式的动量方程 $\int_{CV} \frac{\partial}{\partial t}(\rho \vec{v}) d\tau+\int_{CS} \rho \vec{v} v_n dA=\int_{CV} \rho \vec{f}_b d\tau+\int_{CS} \vec{p}_n dA$

由 $\frac{D}{Dt}\int_{\tau} \rho \vec{a} d\tau=\int_{\tau} \rho \frac{D\vec{a}}{Dt} d\tau$ 得，

$$\int_{CV} \rho \frac{D\vec{v}}{Dt} d\tau=\int_{CV} \rho \vec{f}_b d\tau+\int_{CS} \vec{n}\cdot\overline{\overline{P}} dA=\int_{CV} \rho \vec{f}_b d\tau+\int_{CV} \nabla\cdot\overline{\overline{P}} d\tau$$

假设被积函数连续，得到微分形式的动量方程 $\rho \frac{D\vec{v}}{Dt}=\rho \vec{f}_b+\nabla\cdot\overline{\overline{p}}$ 。式中三项分别为惯性力，体积力，表面力项。

【补笔记：N-S 方程，欧拉方程，静力学方程，其他特殊情形下的动量方程】

5.边界条件和初始条件

5.1.边界条件

固壁边界条件：在连续介质假设成立的条件下，粘性流体的宏观运动应该满足无滑移条件或速度连续条件。稀薄气体和高超声速流体除外。{对宏观运动，无滑移条件是足够精确的近似。}对于理想流体，不需无滑移条件，但是法向速度连续。

无穷远处： $r \to \infty \quad v = v_{\infty}, p = p_{\infty}, \rho = \rho_{\infty}, T = T_{\infty}$

两介质界面处：如果界面处两介质互不渗透，且满足不发生分离的连续条件，则界面处法向速度连续。可以假设通常情况下，切向速度分量 v_{τ} 和温度 T 是连续的。

自由面处（气-液界面处）：

【补笔记】

5.2.初始条件

定常流动：不需初条件

非定常流动：给出初始的 p, v, ρ, T

6.伯努利积分和拉格朗日积分

假设 1.理想流体：

兰姆-葛罗米柯方程（又叫欧拉方程） $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \nabla \frac{v^2}{2} + \vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{f}_b - \frac{\nabla p}{\rho}$

【补笔记】

7.流体积分关系式的应用

（第五章部分）

4.相似准则数的确定

4．1.量纲分析法（因次分析法）

不可压粘性流动 $\rho, v, l, \mu, g, \Delta P, t_0(\Omega)$

以 ρ, v, l 为重复量，共有 7 个量，3 个基本量纲，4 个无量纲数（相似准则数）

$$\Pi_1=\frac{\rho v l}{\mu}=Re \quad \text{Reynolds 数}$$

$$\Pi_2=\frac{gl}{v^2}=Fr^{-2} \quad \text{Froude 数}$$

$$\Pi_3=\frac{\Delta P}{\rho v^2}=Eu \quad \text{Euler 数}$$

$$\Pi_4=\frac{l}{t_0 v}=\frac{\Omega l}{v}=St \quad \text{Strouhal 数}$$

4．2.方程分析法（无量纲化法）

x 轴的 NS 方程{见笔记}

伯努利积分与拉格朗日积分

假设1：理想流体 ($\mu=0$)

兰姆-葛罗米柯方程.

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \nabla \frac{\vec{V}^2}{2} + \vec{\omega}\times\vec{V} = \vec{f}_b - \frac{\nabla p}{\rho}$$

假设2：体力有势 ($-\nabla\Pi = \vec{f}_b$)

假设3：流体正压 ($\nabla P = \frac{\nabla p}{\rho}$)

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \nabla\left(\frac{\vec{V}^2}{2}+\Pi+P\right) + \vec{\omega}\times\vec{V} = 0$$

假设4：流场定常 ($\frac{\partial}{\partial t}\equiv 0$)

沿流线积分动量方程得

$$\frac{\vec{V}^2}{2}+\Pi+P = C(\psi)$$ ------ 伯努利积分(或伯努利方程

ψ为流线编号.

假设5：流体均质不可压 (ρ = Constant)，$\Pi = gz$

$$\frac{\vec{V}^2}{2}+gz+\frac{p}{\rho} = C(\psi)$$

① 工程上的伯努利方程.

$$\frac{V^2}{2g}+\frac{p}{\rho g}+z = C_1(\psi)$$

上式三项分别称为速度水头、压力水头、高度水头. $C_1(\psi)$称为总水头.

② 沿总流的伯努利方程

$$\int_A\left(\frac{\vec{V}^2}{2}+gz+\frac{p}{\rho}\right)\rho\, dQ = \text{Constant}.$$

上式表明，管道中沿任一截面按质量流量计算的总机械能沿总流守恒.

定义动能修正因子 $\alpha = \frac{\int_A \frac{V^2}{2}\rho\, dQ}{\frac{1}{2}V^2\rho Q}$.

若总流截面满足缓变条件，则

$$\frac{\alpha}{2}V^2 + gz + \frac{p}{\rho} = \text{Constant}.$$

假设5'：可压缩等熵流体.

$$(p = \nu^\gamma(\psi)\rho^\gamma)$$

$$P = \frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p}{\rho}.$$

$$\frac{1}{2}\vec{V}^2 + \frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p}{\rho}+\Pi = C(\psi)$$

假设4'：流动无旋 （$\nabla\varphi = \vec{V}$，$\vec{\omega}=0$）

$$\nabla\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{\vec{V}^2}{2}+P+\Pi\right)=0$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{\vec{V}^2}{2}+P+\Pi=C(t)$$ ------拉格朗日积分

假设5：流体均质不可压（$\rho=\text{Constant}$），$\Pi=gz$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{\vec{V}^2}{2}+\frac{p}{\rho}+gz=C(t)$$

假设5'：~~斜压~~可压缩等熵流体（$p=\gamma(\psi)\rho^{\gamma}$）

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{\vec{V}^2}{2}+\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p}{\rho}+\Pi=C(t)$$

假设4''：流动无旋且定常（$\frac{\partial}{\partial t}=0$，$\nabla\varphi=\vec{V}$，$\vec{\omega}=0$）

$$\frac{\vec{V}^2}{2}+P+\Pi=C$$ ------伯努利-拉格朗日积分

假设5：（$\rho=\text{constant}$），$\Pi=gz$

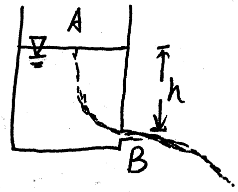
$$\frac{\vec{V}^2}{2}+\frac{p}{\rho}+gz=C$$

假设5'：（$p=\gamma(\psi)\rho^{\gamma}$）$\Pi=0$

$$\frac{\vec{V}^2}{2}+\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p}{\rho}=C$$

伯努利积分与拉格朗日积分的应用.

1. 小孔出流



假设：1° $S_A \gg S_B$

2° $p_A = p_B = 0$ （表压）

3° $\mu = 0$

4° $\Pi = gz$

5° $\rho = Constant$. 且 $\frac{D\rho}{Dt} = 0$

6° $\frac{\partial}{\partial t} \equiv 0$

结论：出流速度 $V_B = \sqrt{2gh}$.

推导：由连续性方程在假设5°和6°下的形式：$Q_A = Q_B$.

又由假设1°，得 $V_A \ll V_B \Rightarrow V_A \approx 0$.

由假设3°,4°,5°,6°，由伯努利方程，在所取流线上.

$$\frac{1}{2}V_A^2 + \frac{p_A}{\rho} + gh_A = \frac{1}{2}V_B^2 + \frac{p_B}{\rho} + gh_B.$$

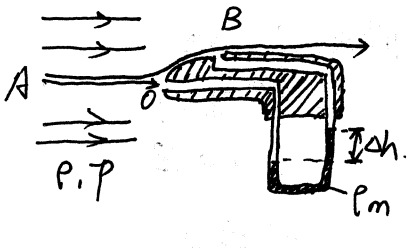
由假设2°得

$$V_B = \sqrt{2gh}.$$

讨论：1° 通常实际流速小于上述值.

2° 出口处流线不都平行射出，故流量小于计算值.

2. 皮托管



假设：1° 流线AO与AB可视为一条流线

2° $\mu = 0$

3° $\Pi = gz$

4° $P = \frac{p}{\rho}$

5° $\frac{\partial}{\partial t} \equiv 0$ / 6° A,B点高度差可忽略.

结论：流场速度 $V_A = \sqrt{\frac{\rho_m}{\rho} - 1} \cdot \sqrt{2g\Delta h}$

推导：由假设2°,3°,4°,5°. 由伯努利方程.

$$\frac{1}{2}V_A^2 + \frac{p}{\rho} + gh_A = 0 + \frac{p_0}{\rho} + gh_0$$

$$\therefore V_A = \sqrt{\frac{2}{\rho}(p_0 - p)}$$

由假设1°,6°. 由伯努利方程.

$$\frac{1}{2}V_A^2 + \frac{p}{\rho} + gh_A = \frac{1}{2}V_B^2 + \frac{p_B}{\rho} + gh_B$$

$$\therefore p_B = p$$

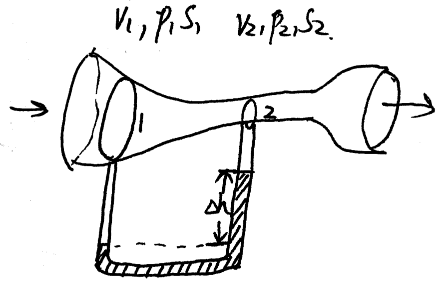
在皮托管内由静压关系

$$p_0 + \rho g \Delta h = p_B + \rho_m g \Delta h$$

得 $p_0 - p = (\rho_m - \rho) g \Delta h$

$$\therefore \quad V_A = \sqrt{\frac{\rho_m - \rho}{\rho}} \sqrt{2g\Delta h}$$

3、文丘里管



假设：1° $\mu = 0$

2° $\Pi = gz$

3° $P = \frac{p}{\rho}$

4° $\frac{\partial}{\partial t} \equiv 0$

5° 截面满足缓变条件

6° 流速沿截面近似为常值 $(\alpha = 1)$

结论：管中流量 $Q = S_2 \sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho[1-(\frac{S_2}{S_1})^2]}}$

推导：由假设1°,2°,3°,4°,5°,6°，由伯努利积分

$$\frac{1}{2}V_1^2 + \frac{p_1}{\rho} + gh_1 = \frac{1}{2}V_2^2 + \frac{p_2}{\rho} + gh_2.$$

$$\therefore \quad \Delta p = p_1 - p_2 = \frac{\rho}{2}(V_2^2 - V_1^2)$$

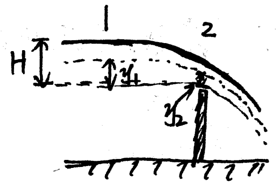
由假设3°,4°，由连续性方程 $Q_1 = Q_2 = Q$

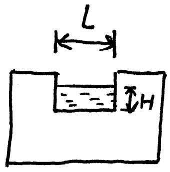
$$\therefore \quad V_1 S_1 = V_2 S_2.$$

$$\therefore \quad \Delta p = \frac{\rho}{2} \frac{Q^2}{S_2^2} [1 - (\frac{S_2}{S_1})^2]$$

$$\therefore \quad Q = S_2 \sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho[1-(\frac{S_2}{S_1})^2]}}$$

4、矩形薄壁堰





假设：1° $\mu = 0$

2° $\Pi = gz$

3° $P = \frac{p}{\rho}$

4° $\frac{\partial}{\partial t} \equiv 0$

5° $p_2 = 0$（表压）

6° $V_1 = constant$

7° 溢流高度不收缩

8° $V_1 \approx 0$

结论：明渠流量 $Q = \frac{2}{3}\sqrt{2g}\, L H^{\frac{3}{2}}$

推导：由1°,2°,3°,4°，由伯努利方程.

$$\frac{V_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} + y_1 = \frac{V_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g} + y_2$$

由6°，$p_1 = \rho g(H - y_1)$

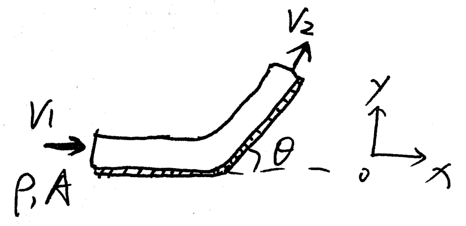
由5°,8°，得 $V_2 = \sqrt{2g(H - y_2)}$

由7°，$Q = L\int_0^H V_2\, dy_2 = \frac{2}{3}\sqrt{2g}\, L H^{\frac{3}{2}}$.

(伯努利积分方程 [illegible] 伯努利积分的应用)

讨论：由于推导中作了许多假设，实际流量约为理论值的 62%

5、自由射流冲击导流片



假设：
$1^\circ\ \Pi = 0$
$2^\circ\ \mu = 0$
$3^\circ\ P = \frac{p}{\rho}$
$4^\circ\ \frac{\partial}{\partial t} = 0$
$5^\circ\ p_1 = p_2 = 0$ （表压）

结论：射流对导流片作用力 $\vec{F} = -\rho V^2 A \sin\theta\, \vec{j} + \rho V^2 A (1-\cos\theta)\, \vec{i}$ (N

推导：由假设 3°, 4°, 由连续性方程 $Q_1 = Q_2$.

$\therefore\ V_1 A_1 = V_2 A_2 \quad \Rightarrow \quad A_1 = A_2 = A$.

由假设 1°, 2°, 3°, 4°, 由伯努利积分

$$\frac{1}{2}V_1^2 + 0 + \frac{p_1}{\rho} = \frac{1}{2}V_2^2 + 0 + \frac{p_2}{\rho}$$

由假设 5°.

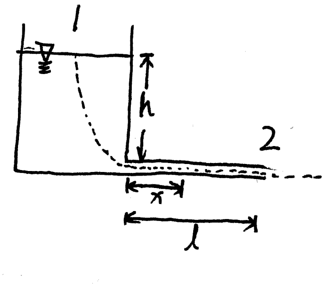
$$V_1 = V_2 = V$$

由动量定理

$$0 + \rho Q(-\vec{V_1} + \vec{V_2}) = -\vec{F}$$

$$\therefore\ \vec{F} = \rho V A (\vec{V_1} - \vec{V_2}) = \rho V^2 A (1-\cos\theta)\vec{i} - \rho V^2 A \sin\theta\, \vec{j}$$

6、细管出流



假设：
$1^\circ\ \mu = 0$
$2^\circ\ \Pi = gz$
$3^\circ\ P = \frac{p}{\rho}$
4° 管中流动为一维流动
$5^\circ\ V_1 \approx 0$
$6^\circ\ p_1 = p_2 = 0$ （表压）

结论：出口处流速 $V_2 = \sqrt{2gh}\, \text{th}\left[\frac{\sqrt{2gh}}{2l} t\right]$

推导：由 1°, 2°, 3°, 4°. 由~~拉格~~朗日公式.

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}V^2 + gz + \frac{p}{\rho} = C(t).$$

其中 $\frac{d\varphi}{dx} = V$，由 3°，由连续性定理，在管内 $Q = \text{Constant}$.

$\therefore$ V 在管中处处相等

$\therefore\ \varphi = \varphi_0 + Vx$

$\therefore\ x\frac{dV}{dt} + \frac{1}{2}V^2 + gz + \frac{p}{\rho} = C(t)$

在1处，~~由于 $V_1 \approx 0$，∴ $\varphi \approx 0$~~ $V_1 \approx 0$

我们可以假定 $\left.\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right|_{1截面} = 0$.

$$\therefore\ 0 + \frac{1}{2}V_1^2 + 0 + gh = \frac{1}{2}V_2^2 + 0 + 0 + l\frac{dV_2}{dt}.$$

$$\therefore\ \frac{dV_2}{dt} = \frac{1}{l}\left(gh - \frac{1}{2}V_2^2\right)$$

$$\therefore\ \int_0^{V_2} \frac{dV_2}{gh - \frac{1}{2}V_2^2} = \int_0^t \frac{1}{l}\,dt$$

$$\therefore\ V_2 = \sqrt{2gh}\ th\left(\frac{\sqrt{2gh}}{2l}\,t\right)$$