第五章 量纲分析与相似性原理

1. 量纲与物理量的齐次性

1.1. 大小与类别

~~大小：单位~~

大小 —— 单位 { 基本单位（基本量）; 导出单位（导出量）

类别 —— 量纲（界定） { 基本量纲：基本量的量纲; 导出量纲：用基本量纲的幂次式表示

基本量纲：
- 质量：[M]
- 长度：[L]
- 时间：[T]
- 温度：[Θ]

1.2. 同类物理量的比较

量纲的一致性原则：被比较的物理量必须具有相同的量纲.

量纲的齐次性原则：~~用基本量纲表示的物理~~ 物理方程中各项以基本量纲表示时，各项的基本量纲必须齐次。

2. 量纲分析与Π定理

Π定理：若具有 n 个物理量的方程式的每个物理量的量纲都可用 r 个独立的基本量纲组成，那么这些物理量可以且仅可以组成 $n-r$ 个独立的无量纲参数，称为Π数

〔用线性代数知识即可证明〕

（公式表达）$x_1 = \varphi(x_2, \cdots, x_n) \Rightarrow \Pi_1 = f(\Pi_2, \cdots, \Pi_{n-r})$

量纲分析的基本步骤：
1. 列出所有物理量 $x_1, \cdots, x_n$
2. 选择包含不同基本量纲的独立物理量作为"基本量"。$x_1, \cdots, x_r$
3. 将其余物理量分别与基本量的幂次组合，建立Π式：$\Pi_i = \prod_{j=1}^{r} x_j^{\alpha_j} \cdot x_i$ $(i = r+1, \cdots, n)$
4. 根据一致性原则，求解每个Π式中的指数，组成Π式：Π_i $(i = r+1, \cdots, n)$
5. 用Π数组成无量纲形式的方程.

3. 流动相似与几何相似.

3.1. 流动相似

几何相似：时空对应点所对应的线元间，夹角相等且长度成比例.

运动相似：两个几何相似的流场中，时空对应点的速度，方向相同且大小成比例.

动力相似：两个运动相似的流场中，时空对应点的面元所受力，方向相同且大小成比例

热力学相似：两个动力相似的流场中，时空对应点的温度成比例、通过对应面元的热通量，方向相同

3.2. 相似准则.

1、分别对原型和模型选取相关物理量的特征量。

2、建立无量纲

补

4. 相似准则数的确定.

4.1 (见电子版)

4.2 方程分析法.

NS in x

$$u_t + uu_x + vu_y + wu_z = f_x - \frac{1}{\rho}p_x + \frac{\mu}{\rho}(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz})$$

引入特征量(均值): $V, l, p_0, g, t_0 \left(\frac{1}{\Omega}\right)$

$$\begin{cases} u = Vu^* \\ v = Vv^* \\ w = Vw^* \end{cases} \quad \begin{cases} x = lx^* \\ y = ly^* \\ z = lz^* \end{cases} \quad \begin{cases} p = p_0 p^* \\ f_x = g f_x^* \\ t = t_0 t^* \end{cases}$$

$$\therefore \frac{V}{t_0}\frac{\partial u^*}{\partial t^*} + \frac{V^2}{l}\left[\left(u^*\frac{\partial u^*}{\partial t^*}\right) + \left(v^*\frac{\partial v^*}{\partial t^*}\right) + \left(w^*\frac{\partial w^*}{\partial t^*}\right)\right] = g f_x^* - \frac{1}{\rho}\frac{p_0}{l}\frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{\mu}{\rho}\frac{V}{l^2}\left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial z^{*2}}\right)$$

两边除以迁移惯性力项 $\frac{V^2}{l}$.

$$\frac{l/V}{t_0}\frac{\partial u^*}{\partial t^*} + u^*\frac{\partial u^*}{\partial t^*} + v^*\frac{\partial v^*}{\partial t^*} + w^*\frac{\partial w^*}{\partial t^*} = \frac{gl}{V^2}f_x^* - \frac{p_0}{\rho V^2}\frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{\mu}{\rho V l}\left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial z^{*2}}\right)$$

$$\therefore St\frac{\partial u^*}{\partial t^*} + \left(u^*\frac{\partial u^*}{\partial t^*} + v^*\frac{\partial v^*}{\partial t^*} + w^*\frac{\partial w^*}{\partial t^*}\right) = Fr^{-2}f_x^* - Eu\frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial z^{*2}}\right)$$

其中 $St = \frac{[\text{不定常惯性力}]}{[\text{迁移惯性力}]}$ $\quad Fr = \left[\frac{\text{惯性力}}{\text{体力}}\right]^{\frac{1}{2}}$

$Eu = \frac{[\text{压力}]}{[\text{惯性力}]}$ $\quad Re = \frac{[\text{惯性力}]}{[\text{粘性力}]}$.

通常，重力可忽略，$Fr^{-2} \approx 0$，对于 $St \approx 1$，$Eu \approx 1$.