第六章 不可压缩理想流体的平面势流问题.

总假设：$1^\circ\ \frac{D\rho}{Dt}=0$ ；$2^\circ\ \mu=0$ ；$3^\circ\ \vec{v}=\vec{v}(x,y)=u(x,y)\vec{i}+v(x,y)\vec{j}$ ；
$4^\circ\ \vec{w}=0$

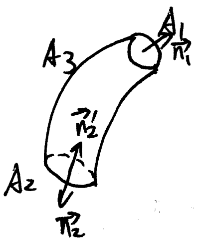
1、理想流体的无旋运动.

1.1. 速度环量

$$\Gamma=\oint_L \vec{u}\cdot d\vec{r}=\oint_L u dx+v dy+w dz$$

$$\therefore \Gamma=\int_A(\nabla\times\vec{u})\cdot d\vec{A}=\int_A \vec{w}\cdot\vec{n}\,dA=I\quad(\text{涡通量}).$$

1.2. 涡管强度守恒定理.



在图示封闭曲面 $A_1+A_2+A_3=A$ 上，已知 A_3 为涡管面，A_1，A_3 任意，
则 $I_{A_1}=I_{A_2}$，即涡通量相等，称涡管强度守恒.

$$I_A=\int_A \vec{w}\cdot d\vec{A}=\int_\Omega \nabla\cdot\vec{w}\,d\tau=\int_\Omega \nabla\cdot(\nabla\times\vec{v})\,d\tau\equiv 0$$

$$I_{A_3}=\int_{A_3}\vec{w}\cdot d\vec{A}=0$$

$$\therefore \int_{A_1}\vec{w}\cdot\vec{n}_1\,dA+\int_{A_2}\vec{w}\cdot\vec{n}_2\,\overset{dA}{=}0$$

$$\therefore \int_{A_1}\vec{w}\cdot\vec{n}_1\,dA=\int_A \vec{w}\cdot\vec{n}_2'\,dA$$

$$\therefore I_{A_1}=I_{A_2}.$$

结论：$1^\circ\ A\downarrow \sim \vec{w}\uparrow$

2° 涡管不能收缩为0； 涡管不能产生或终止； 在流体中只有涡环，或始于、终于边界
(这不同于涡旋不生不灭定理，不要求无粘)

1.3. Kelvin's 速度环量定理.

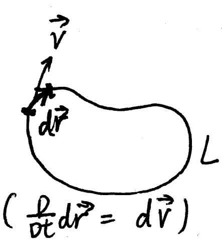
假设：$1^\circ\ \mu=0$. 由欧拉方程

$$\frac{D\vec{u}}{Dt}=\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}+(\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u}=\vec{f}_b-\frac{\nabla\vec{P}}{\rho}$$

$2^\circ\ \nabla P=\frac{\nabla p}{\rho}$，$3^\circ\ -\nabla\Pi=\vec{f}_b$

得 $\frac{D\vec{u}}{Dt}=-\nabla(P+\Pi)$

速度环量的随体导数：



$\left(\frac{D}{Dt}d\vec{r}=d\vec{v}\right)$

$$\frac{D\Gamma}{Dt}=\frac{D}{Dt}\oint_L\vec{u}\cdot d\vec{r}=\oint_L\frac{D}{Dt}(\vec{u}\cdot d\vec{r})=\oint_L\frac{D\vec{u}}{Dt}\cdot d\vec{r}+\vec{u}\,\frac{D}{Dt}(d\vec{r})$$

$$=\oint_L\frac{D\vec{u}}{Dt}\cdot d\vec{r}+\underbrace{\oint_L d\left(\frac{\vec{u}^2}{2}\right)}_{=0}$$

$$\therefore 1^\circ\ \frac{D\Gamma}{Dt}=-\oint\nabla(P+\Pi)\cdot d\vec{r}=-\oint d(\Pi+P)=0$$

即为速度环量定理.

2° 由 $I=\Gamma$，得 $\frac{DI}{Dt}=0$，即为 Hemholtz 涡管强度保持性定理.

4.3、物理法则分析法.

已知流体元：$\delta m, v$.

沿流线：迁移加速度 $v\frac{\partial v}{\partial s}$，不定常加速度 $\frac{\partial v}{\partial t}$.

压差 Δp　　法向速度梯度 $\frac{\partial v}{\partial n}$.

相关物理量：$\rho, V, l, \mu, g, \Delta p, t_0 (\frac{1}{\omega})$

迁移惯性力：$F_i = \delta m \cdot v\frac{\partial v}{\partial s} \sim \rho l^2 v^2$

不定常惯性力：$F_{it} = \delta m \frac{\partial v}{\partial t} \sim \rho l^3 \frac{v}{t_0}$

重力：$F_g = \delta m g \sim \rho l^3 g$

粘性力：$F_v = \mu \frac{\partial v}{\partial n} \cdot \delta A \sim \mu v l$.

压差力：$F_p = \Delta p \delta A \sim \Delta p\, l^2$

比较力的量级：

$$\frac{F_i}{F_v} = Re \;;\; \frac{F_i}{F_g} = F_r^2 \;;\; \frac{F_p}{F_i} = Eu \;;\; \frac{F_{it}}{F_i} = S_t.$$

$Ma = \frac{v}{a}$ ← 流速 ← 当地声数 $\Rightarrow Ma^2 = \frac{v^2}{a^2}$（由 $a^2 = \gamma RT$ 内能）$= \frac{动能}{内能}$

韦伯数 $We = \frac{\rho v^2 l}{\sigma} = \frac{惯性力}{表面张力}$

5、模型实验与相似性原理.

5.1. 模型实验

5.2. 相似性原理：

对相似的流动现象，可以将模型实验的数据与结论定量的推广到原型流动.

原型：$\pi_1 = f(\pi_2, \pi_3, \cdots, \pi_n)$　　π数与具体的尺寸参数无关，也适用于模型实验.

$\pi_{1m} = f(\pi_{2m}, \pi_{3m}, \cdots, \pi_{nm})$

若 $\pi_2 = \pi_{2m}, \cdots, \pi_n = \pi_{nm}$

则 $\pi_1 = \pi_{1m}$.

3° 拉格朗日定理：（涡旋不生不灭定理）

假定 1°、2°、3°成立时，若流场某一部分无旋，则在之前、之后该部分流体也无旋。

2、速度势和流函数.

2.1. 速度势 若 $\vec{\omega}=0$，则存在 ϕ，使得 $\vec{u}=\nabla\phi$.　（$\nabla^2\phi=\nabla\cdot\vec{u}$）

对于等势线 $d\phi=0$，有 $\vec{u}\cdot d\vec{r}=0$，所以 等势线 ⊥ 速度矢量

> 速度势的唯一性是显然的：任意一个无旋的矢量场，按路径积分的方法，在一个常数的区别下，唯一的确定了它的势函数。

2.2. 流函数（二维流场）

若流体不可压：$\nabla\cdot\vec{u}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0$

可以找到一个 $\psi(x,y,t)$，使

$$u=\frac{\partial\psi}{\partial y},\quad v=-\frac{\partial\psi}{\partial x}$$

> 流函数的唯一性：
> 当流体可压时，流函数显然不存在。即流体不可压是流函数存在的必要条件。
> 当流体不可压时，相当于已知 $\nabla\psi=(-v,u)$ 一个无旋的矢量场唯一地确定了它的势函数在不考虑一个常数的区别下。所以不可压流体的流场存在，且在同样的意义下唯一存在一个流函数。

对极坐标下，$\nabla\cdot\vec{u}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ru_r)+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}(u_\theta)=0$

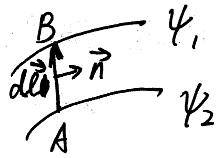
∴ 流函数 $u_r=\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}$，$u_\theta=-\frac{\partial\psi}{\partial r}$.

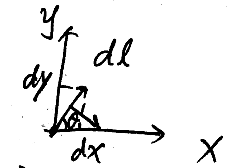
对流函数的等值线：$d\psi=0$，

有 $\frac{\partial\psi}{\partial x}dx+\frac{\partial\psi}{\partial y}dy=-v\,dx+u\,dy=0$

∴ $\frac{dx}{u}=\frac{dy}{v}$，即 流函数等值线为流线.

流量计算：





$$\begin{aligned}
dQ&=\vec{u}\cdot d\vec{l}\\
&=\vec{u}\cdot\vec{n}\,dl\\
&=\left(u\frac{dy}{dl}-v\frac{dx}{dl}\right)dl\\
&=u\,dy-v\,dx\\
&=\frac{\partial\psi}{\partial y}dy+\frac{\partial\psi}{\partial x}dx\\
&=d\psi
\end{aligned}$$

$\vec{n}=(\sin\theta,-\cos\theta)$
$=\left(\frac{dy}{dl},-\frac{dx}{dl}\right)$

∴ $Q=\int_A^B dQ=\int_{\psi_A}^{\psi_B}d\psi=\psi_B-\psi_A$.

涡量-流函数方程.

$$\omega=\omega_z=\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}-\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}=-\nabla^2\psi$$

∴ $\nabla^2\psi=-\omega_z$ 为 2D 不可压缩流体的 $\omega-\psi$ 方程.

3. 平面势流与基本解.

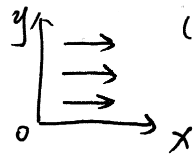
假设（平面势流）：1° $\mu=0$　2° $\nabla\cdot\vec{v}=0$　3° $\vec{u}(x,y)=u(x,y)\vec{i}+v(x,y)\vec{j}$
4° $\frac{\partial}{\partial t}=0$　5° $\vec{\omega}=0$

> 求解平面势流的基本解，是为了构造复杂的或实际的流动.

由 2°、5° 得 $\nabla^2\phi=0$，$\nabla^2\psi=0$

说明平面势流中的速度势和流函数都是调和函数。

3.1. 均匀来流问题



$(u,v)=(U,0)$

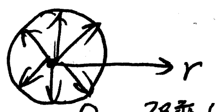
由 $\frac{\partial\psi}{\partial y}=u$, $\frac{\partial\psi}{\partial x}=-v$

$\therefore \psi = Uy + C_\psi$

由 $\frac{\partial\phi}{\partial x}=u$, $\frac{\partial\phi}{\partial y}=v$

$\therefore \phi = Ux + C_\phi$

3.2. 点源(汇) ($Q=$ Constant)



Q—强度(类似流量)

由 $u_r=\frac{\partial\phi}{\partial r}=\frac{Q}{2\pi r}$, $u_\theta=\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}=0$

$\therefore \phi=\frac{Q}{2\pi}\ln r + C_\phi$.

由 $u_r=\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}=\frac{Q}{2\pi r}$, $u_\theta=-\frac{\partial\psi}{\partial r}=0$

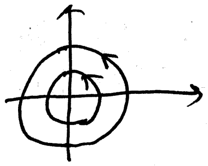
$\therefore \psi=\frac{Q}{2\pi}\theta + C_\psi$

定解问题: $\begin{cases}\nabla^2\phi = Q\delta^2(\vec{r}) \\ \nabla^2\psi=0\end{cases}$

3.3. 点涡 ($\Gamma\equiv$ Constant)

涡线的强度 $\Gamma = 2\pi r v_\theta \equiv$ Constant.

$\therefore v_\theta=\frac{\Gamma}{2\pi r}$



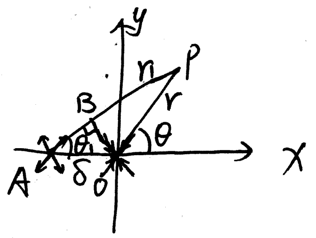
由 $u_r=\frac{\partial\phi}{\partial r}=0$, $u_\theta=\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}=\frac{\Gamma}{2\pi r}$

$\therefore \phi=\frac{\Gamma}{2\pi}\theta$

由 $u_r=\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}=0$, $u_\theta=-\frac{\partial\psi}{\partial r}=\frac{\Gamma}{2\pi r}$

$\therefore \psi=-\frac{\Gamma}{2\pi}\ln r$

3.4. 偶极子 (汇(O点)与源(A点)强度均为 Q)



叠加可得流函数:

$\psi_P(r,\theta)=\frac{Q}{2\pi}\theta_1 - \frac{Q}{2\pi}\theta$ $(Q>0)$

$\because \overline{OB}=\delta\sin\theta_1$

$\therefore \theta-\theta_1=\frac{\delta\sin\theta_1}{r}$ (极限情况)

$\therefore \psi(r,\theta)=\lim_{\delta\to0}-\frac{Q}{2\pi}\frac{\delta\sin\theta_1}{r}=-\frac{Q}{2\pi}\frac{\delta\sin\theta}{r}$

定义偶极矩 $M=Q\delta$

$\therefore \psi(r,\theta)=-\frac{M}{2\pi}\frac{\sin\theta}{r}$

同理 $\phi(r,\theta)=\frac{M}{2\pi}\frac{1}{\delta}\ln r_1-\frac{M}{2\pi}\frac{1}{\delta}\ln r$

$=\frac{M}{2\pi}\frac{1}{\delta}\ln\left(1+\frac{\delta\cos\theta_1}{r}\right)$

$=\frac{M}{2\pi}\frac{1}{\delta}\frac{\delta\cos\theta_1}{r}$

$=\frac{M}{2\pi}\frac{\cos\theta}{r}$

定解问题:

$\begin{cases}\nabla^2\phi=Q\left(-\delta^2(\vec{r})+\delta^2(\vec{r}+\delta\vec{i})\right) \\ \quad (Q\delta=M,\ \delta\to0) \\ \nabla^2\psi=0\end{cases}$

可叠加性(系统线性性):

因为 3.2 点源(汇)的定解问题是线性的,由叠加原理,偶极子的 ϕ、ψ 可由 3.2 的解叠加而成。

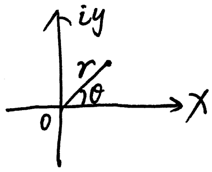
定解性:

$\nabla^2\phi=\nabla\cdot\vec{u}$, $\nabla^2\psi=-\omega_z$

给定一矢量场的散度和旋度,由 Hemholtz 定理,除了一个常数的差别,矢量场(流场)是唯一确定的。进而 ϕ、ψ 在同样意义下被确定。

4. 平面势流的复势

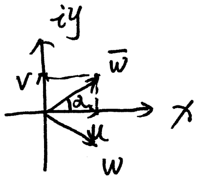
4.1. 复势和复速度



由 $\begin{cases} u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{cases}$

$\therefore$ ϕ, ψ 满足 Cauchy-Riemann 条件.

$\therefore$ 存在 $F(x,y) = \phi + i\psi$，~~称为平面势流的复势~~.



又定义 $W(z) = \frac{dF}{dz} = \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial x} + i\frac{\partial \psi}{\partial x} = u - iv$，称为复速度。

$\overline{W}(z) = u + iv$，称为共轭复速度.

$= |\overline{w}| e^{i\alpha}$

$\therefore$ $u = Re\left\{\frac{dF}{dz}\right\}$，$v = -Im\left\{\frac{dF}{dz}\right\}$.

积分 $\oint_L W(z)\,dz = \oint_L \frac{dF}{dz}dz = \oint_L dF = \oint_L \phi + i\oint_L \psi = \Gamma + iQ$.

$\left(\begin{array}{l} \Gamma = \oint_L \vec{u}\cdot d\vec{l} = \oint_L \nabla\phi \cdot d\vec{r} = \oint_L d\phi \\ Q = \oint_L dQ = \oint_L d\psi \end{array} \right.$

ϕ, ψ 的环路积分不一定为零，因为 ϕ, ψ 可以是不好的函数，具体参见教材

4.2. 平面势流的复势解法

1° 均匀直线流

$F(z) = Cz$

$W(z) = C = u - iv$

若 $C = V_\infty e^{-i\alpha}$，则 $u = V_\infty \cos\alpha$，$v = V_\infty \sin\alpha$.

2° 点源（汇）

$F(z) = A\ln z = A\ln r + iA\theta$

~~$W(z) =$~~

$\begin{cases} V_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{A}{r} \\ V_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \theta} = 0 \end{cases}$

环量 $\Gamma = Re\left\{\oint_L w(z)dz\right\} = Re\left\{\oint_L \frac{A}{z}dz\right\} = Re\{2\pi i \cdot A\} = 0$

流量 $Q = Im\left\{\oint_L w(z)dz\right\} = 2\pi A$

$\therefore$ $A = \frac{Q}{2\pi}$，$F(z) = \frac{Q}{2\pi}\ln z$

3° 点涡

$F(z) = iA\ln z = iA\ln(re^{i\theta}) = -A\theta + iA\ln r$

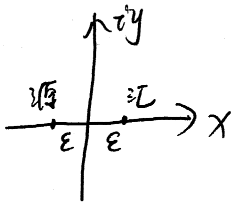
$\begin{cases} u_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = 0 \\ u_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \theta} = \frac{-A}{r} \end{cases}$

流量 $Q = Im\left\{\oint_L w(z)dz\right\} = Im\left\{\oint_L \frac{iA}{z}dz\right\} = Im\{-2\pi A\} = 0$.

环量 $\Gamma = Re\left\{\oint_L w(z)dz\right\} = -2\pi A$

$\therefore$ $A = -\frac{\Gamma}{2\pi}$，$F(z) = i\left(-\frac{\Gamma}{2\pi}\right)\ln z = \frac{\Gamma}{2\pi i}\ln z$

4° 偶极子



$$F(z) = \frac{Q}{2\pi}\ln(z+\varepsilon) - \frac{Q}{2\pi}\ln(z-\varepsilon)$$

$$= \frac{Q}{2\pi}\ln\left(\frac{z+\varepsilon}{z-\varepsilon}\right)$$

$$= \frac{Q}{2\pi}\ln\left(\frac{1+\frac{\varepsilon}{z}}{1-\frac{\varepsilon}{z}}\right)$$

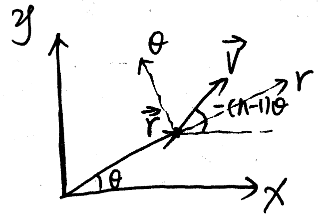
$$= \frac{Q}{2\pi}\ln\left[\left(1+\frac{\varepsilon}{z}\right)\left(1+\frac{\varepsilon}{z}+o\left(\frac{\varepsilon}{z}\right)\right)\right]$$

$$= \frac{Q}{2\pi}\ln\left[1+2\frac{\varepsilon}{z}+o\left(\frac{\varepsilon}{z}\right)\right]$$

$$= \frac{Q}{2\pi}\left(\frac{2\varepsilon}{z}\right) \qquad \left(M \equiv \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ Q\to\infty}} 2Q\varepsilon\right)$$

$$= \frac{M}{2\pi}\frac{1}{z}$$

5° 角域流



$F(z) = Az^n \quad (n \geq \frac{1}{2},\ n \neq 1,\ A$为实数$)$

$W(z) = Anz^{n-1} = Anr^{n-1}e^{i\theta(n-1)} = u - iv$

$\therefore \overline{W}(z) = A\cdot n r^{n-1} e^{-i(n-1)\theta}$

$\therefore$ x轴到$\vec{V}$的角 $-(n-1)\theta$，x轴到$\vec{r}$的角为 θ.

$\therefore$ r轴到$\vec{V}$的角 $[-(n-1)\theta] - \theta = -n\theta$

$$\therefore \begin{cases} V_r = Anr^{n-1}\cos n\theta \\ V_\theta = -Anr^{n-1}\sin n\theta \end{cases}$$

$F(z) = Ar^n e^{in\theta} = Ar^n\cos n\theta + i\,Ar^n\sin n\theta$

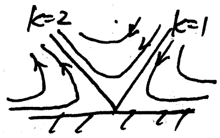
令 $\psi = 0$.（称为零流线）

$\therefore Ar^n \sin n\theta = 0$

$\therefore n\theta = k\pi$，即 $\theta = k\frac{\pi}{n} = k\Delta\theta$.

① 若 $n=3$，则 $\Delta\theta = \frac{\pi}{3}$

$u_r = 3Ar^2(-1)^k$

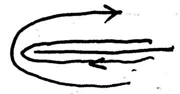


② $n = \frac{3}{2}$，则 $\Delta\theta = \frac{2\pi}{3}$

$u_r = \frac{3}{2}Ar^{\frac{1}{2}}(-1)^k$

③ $n = \frac{1}{2}$，则 $\Delta\theta = 2\pi$

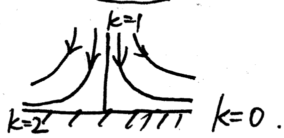
$u_r = \frac{1}{2}Ar^{-\frac{1}{2}}(-1)^k$.



④ $n < \frac{1}{2}$，则 $\Delta\theta > 2\pi$，无解.

⑤ $n = 2$时，$\Delta\theta = \frac{\pi}{2}$

$u_r = 2Ar(-1)^k$



6° 无环量圆柱绕流 (直线流+偶极子)

$$F(z)=U_\infty z+\frac{M}{2\pi}\frac{1}{z}$$

$$=\left(U_\infty r\cos\theta+\frac{M}{2\pi r}\cos\theta\right)+i\left(U_\infty r\sin\theta-\frac{M}{2\pi r}\sin\theta\right)$$

零流线 $\psi=0$.

$\therefore U_\infty r\sin\theta-\frac{M}{2\pi r}\sin\theta=0$

$\therefore \begin{cases}\theta=0,\pi\\ r=\sqrt{\frac{M}{2\pi U_\infty}}=a\end{cases}$

$\therefore \frac{M}{2\pi}=U_\infty a^2$

$\therefore \underline{F(z)=U_\infty z+U_\infty\frac{a^2}{z}}\quad (|z|\geq a)$

$$W(z)=U_\infty\left(1-\frac{a^2}{z^2}\right)=U_\infty\left(1-\frac{a^2}{r^2}e^{-i2\theta}\right)=U_\infty\left(e^{i\theta}-\frac{a^2}{r^2}e^{-i\theta}\right)e^{-i\theta}$$

$$=\left[U_\infty\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right)\cos\theta+iU_\infty\left(1+\frac{a^2}{r^2}\right)\sin\theta\right]e^{-i\theta}$$

$$=(u_r-iu_\theta)e^{-i\theta}$$

$(\pm a,0)$ 为两个驻点.

由伯努利积分 $p_\infty+\frac{1}{2}\rho U_\infty^2=p_s+\frac{1}{2}\rho u_s^2$ (平面势流假设下,伯努利积分成立.)

压力系数 $C_p=\frac{p_s-p_\infty}{\frac{1}{2}\rho_\infty U_\infty^2}=1-\frac{u_s^2}{U_\infty^2}=1-\frac{u_\theta^2}{U_\infty^2}=1-4\sin^2\theta.$ (p_s 为物面压强)

驻点压力

7° 有环量圆柱绕流

$$F(z)=U_\infty z+\frac{M}{2\pi}\frac{1}{z}-\frac{\Gamma}{2\pi i}\ln z \quad \text{(负号表示顺时针环量)}$$

$$=U_\infty\left(z+\frac{a^2}{z}\right)-\frac{\Gamma}{2\pi i}\ln z$$

$$=U_\infty\left(r+\frac{a^2}{r}\right)\cos\theta+iU_\infty\left(r-\frac{a^2}{r}\right)\sin\theta-\frac{\Gamma}{2\pi i}(\ln r+i\theta)$$

$$=\left(U_\infty\left(r+\frac{a^2}{r}\right)\cos\theta-\frac{\Gamma}{2\pi}\theta\right)+i\left[U_\infty\left(r-\frac{a^2}{r}\right)\sin\theta+\frac{\Gamma}{2\pi}\ln r\right).$$

$$u_r=\frac{\partial\phi}{\partial r}=U_\infty\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right)\cos\theta$$

$$u_\theta=\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}=-U_\infty\left(1+\frac{a^2}{r^2}\right)\sin\theta-\frac{\Gamma}{2\pi r}$$

当 $r=a$ 时, $u_r=0$, $u_\theta=-2U_\infty\sin\theta-\frac{\Gamma}{2\pi a}$

$\therefore$ 驻点为 (a,θ_c), $\sin\theta_c=-\frac{\Gamma}{4\pi a U_\infty}$

① $\Gamma=0$, $\sin\theta_c=0$, 无环量问题

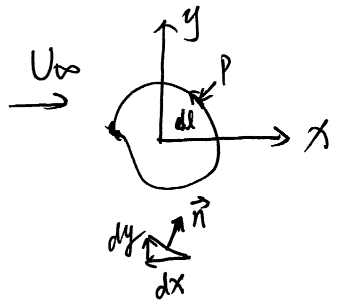
② $0<\Gamma<4\pi U_\infty a$, $-1<\sin\theta_c<0$, 驻点下移

③ $\Gamma=4\pi U_\infty a$, $\theta_c=-\frac{\pi}{2}$

④ $\Gamma>4\pi U_\infty a$, 驻点分离.

5、柱体定常绕流中的力与力矩.

5.1 布拉修斯（Blasius）定理：合力公式



$$d\vec{F} = -p\vec{n}\,dl$$

$$\Rightarrow \begin{cases} dF_x = -p\left(\frac{dy}{dl}\right)dl = -p\,dy \\ dF_y = -p\left(-\frac{dx}{dl}\right)dl = p\,dx \end{cases}$$

$$\therefore d(F_x - iF_y) = -ip(dx - idy)$$

① 为什么是 $F_x - iF_y$（共轭

由伯努利积分 $p_\infty + \frac{1}{2}\rho U_\infty^2 = p + \frac{1}{2}\rho V_s^2$. （$V_s$: 物面流速）.

$$\therefore p = p_\infty + \frac{1}{2}\rho U_\infty^2 - \frac{1}{2}\rho V_s^2,$$

$$= p_0 - \frac{1}{2}\rho V_s^2$$

其中 $p_0 = p_\infty + \frac{1}{2}\rho U_\infty^2$ 为驻点压强

$$\because V_s^2 = |W|^2 = W\overline{W} = \frac{dF}{dz}\left(\overline{\frac{dF}{dz}}\right) = \frac{dF}{dz}\frac{d\overline{F}}{d\overline{z}}$$

$$\therefore p = p_0 - \frac{1}{2}\rho\frac{dF}{dz}\frac{d\overline{F}}{d\overline{z}}$$

$$\therefore d(F_x - iF_y) = \frac{1}{2}i\rho\frac{dF}{dz}\left(\frac{d\overline{F}}{d\overline{z}}\right)d\overline{z} - ip_0 d\overline{z}$$

$$= \frac{1}{2}i\rho\left(\frac{dF}{dz}\right)^2 dz - ip_0 d\overline{z}$$

（∵ 物面上 $d\psi = 0$）

（$\overline{dF} = \overline{(d\phi + id\psi)} = \overline{d\phi} = d\phi = dF$）

$$\therefore \text{总合力}\ F_x - iF_y = \oint_L d(F_x - iF_y).$$

$$= \oint_L \frac{1}{2}i\rho\left(\frac{dF}{dz}\right)^2 dz - ip_0 d\overline{z}$$

~~（∵解析，环量积分为0）~~（$\oint d\overline{z} = \overline{z}\Big|_{z}^{z} = 0$）

$$= \frac{1}{2}i\rho\oint_L\left(\frac{dF}{dz}\right)^2 dz.$$

$$= \frac{1}{2}i\rho\oint_L W^2(z)\,dz.$$

5.2. 儒可夫斯基定理

复势 $F(z)$ 或复速度 $W(z)$ 在物面以外解析，可以在原点将其展开成罗朗级数：①

$$W(z) = \frac{dF(z)}{dz} = \cdots + \frac{a_{-1}}{z} + a_0 + a_1 z + \cdots$$

其中 $a_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{dF}{dz}dz = \frac{1}{2\pi i}(\Gamma + iQ)$

$$\left(\oint_L \frac{dF}{dz}dz = \oint_L (u - iv)(dx + idy) = \oint_L (udx + vdy) + i(udy - vdx) = \oint_L \vec{V}\cdot d\vec{r} + i\vec{V}\times d\vec{r} = \Gamma + iQ\right)$$

又 $W(z)\big|_\infty = \frac{dF}{dz}\Big|_\infty = U_\infty e^{-i\alpha}$

$$\therefore a_1 = a_2 = \cdots = 0.$$

$$\therefore W(z) = \frac{dF}{dz} = U_\infty e^{-i\alpha} + \frac{Q - i\Gamma}{2\pi}\frac{1}{z} + \frac{a_{-2}}{z^2} + \cdots$$

$$\therefore F_x - iF_y = \frac{1}{2}i\rho\oint_L\left(U_\infty e^{-i\alpha} + \frac{Q - i\Gamma}{2\pi}\frac{1}{z} + \cdots\right)^2 dz$$

$$= \frac{1}{2}i\rho\cdot 2\pi i\cdot 2U_\infty\cdot\frac{-i\Gamma}{2\pi}e^{-i\alpha}$$ （其中物面上 $Q = 0$）

$$= \rho U_\infty \Gamma i e^{-i\alpha}$$

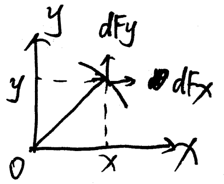
$$= \rho U_\infty \Gamma i(\cos\alpha - i\sin\alpha)$$

$$\therefore \begin{cases} F_x = \rho U_\infty \Gamma\sin\alpha \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{F} = \rho\vec{U}_\infty \times \vec{\Gamma}$$ （Γ 以逆时针为正）

讨论：① 理想不可压流体绕任一剖面的柱体作不脱体绕流中，物体所受流体作用合力大小
与 ρ, U_∞, Γ 成正比
② 若 $\Gamma=0$，则 $\vec{F}=\vec{0}$，称为达朗贝尔佯谬，是因为没有考虑粘性。

5.3 布拉修斯第二定理：合力矩公式



$$dM = dF_y\, x - dF_x\, y$$
$$= Re[i(dF_x - i\,dF_y) z]$$
$$= Re[i(-p\,dy - i\,p\,dx) z]$$
$$= Re[p(dx - i\,dy) z]$$
$$= Re[p z\, d\bar{z}]$$
$$\therefore M = Re\left[\oint_L \left(p_0 - \frac{1}{2}\rho \frac{dF}{dz}\frac{d\bar{F}}{d\bar{z}}\right) z\, d\bar{z}\right]$$
$$= Re\left[\oint_L p_0 z\, d\bar{z}\right] - Re\left[\oint_L \frac{1}{2}\rho \left(\frac{dF}{dz}\right)^2 z\, dz\right]$$
$$= -\frac{\rho}{2} Re\left[\oint_L \left(\frac{dF}{dz}\right)^2 z\, dz\right]$$
$$= -\frac{\rho}{2} Re\left[\oint_L \left(U_\infty e^{-i\alpha} + \frac{\Gamma}{2\pi i}\frac{1}{z} + \frac{a_{-2}}{z^2} + \cdots\right)^2 z\, dz\right]$$
$$= -\frac{\rho}{2} Re\left[2\pi i\left(2U_\infty e^{-i\alpha} a_{-2} - \frac{\Gamma^2}{4\pi^2}\right)\right]$$
$$= -2\pi\rho U_\infty Re\{i e^{-i\alpha} a_{-2}\}.$$

$$Re\left[\oint_L p_0 z\, d\bar{z}\right] = p_0 \oint_L x\,dx + y\,dy$$
$$= \frac{p_0}{2}\oint_L dr^2$$
$$= 0$$