第七章 不可压缩粘性流体的外流问题.

1、粘性流动的一般性质

1.1 运动方程组

$$\begin{cases} \nabla\cdot\vec{u}=0 \\ \frac{D\vec{u}}{Dt}=\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}+(\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u}=\vec{f_b}-\frac{1}{\rho}\nabla p+\nu\nabla^2\vec{u} \end{cases}$$

（在温度变化不大时，ν可视为常值）

1.2、粘性运动的有旋性

由 $\nabla^2\vec{u}=\nabla(\nabla\cdot\vec{u})-\nabla\times(\nabla\times\vec{u})=-\nabla\times\vec{\omega}$

若流动无旋 $\vec{\omega}=0$，则 $\nabla^2\vec{u}=0$

运动方程组改写为

$$\begin{cases} \nabla\cdot\vec{u}=0 \\ \frac{D\vec{u}}{Dt}=\vec{f_b}-\frac{1}{\rho}\nabla p \end{cases}$$

（欧拉方程）

于是流动方程与理想不可压流体流动一样，但差别在边界条件中多了一项 $V_\tau=0$.

由于理想不可压流体运动满足边条件和初条件的解通常是唯一的，且V_τ通常不为零. 所以上述问题通常无解。

所以不可压粘性流体运动一般有旋。

1.3 机械能的耗损性

动量方程 $\rho\frac{Du_i}{Dt}=\rho f_{b,i}-\frac{\partial p}{\partial x_i}+\mu\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j\partial x_j}$

两边点乘 u_i 得 $\rho u_i\frac{Du_i}{Dt}=\rho u_i f_{b,i}-u_i\frac{\partial p}{\partial x_i}+\mu u_i\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j\partial x_j}$ (*)

由体力有势得 $f_{b,i}=-\frac{\partial\Pi}{\partial x_i}$，由不可压缩性 $\frac{\partial u_i}{\partial x_i}=0$ 得

$$-\rho u_i\frac{\partial\Pi}{\partial x_i}=\frac{\partial(-\rho u_i\Pi)}{\partial x_i};\quad -u_i\frac{\partial p}{\partial x_i}=\frac{\partial(-p u_i)}{\partial x_i};\quad \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)=\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)=\frac{\partial}{\partial x_j}(2S_{ij})$$

$$2\mu u_i\frac{\partial S_{ij}}{\partial x_j}=2\mu\frac{\partial(S_{ij}u_i)}{\partial x_j}-2\mu S_{ij}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}=2\mu\frac{\partial(S_{ij}u_i)}{\partial x_j}-2\mu S_{ij}(S_{ij}+A_{ij})$$

其中 $S_{ij}A_{ij}=0$，因为 $\bar{\bar{S}}$对称、$\bar{\bar{A}}$反对称，$\bar{\bar{S}}$,$\bar{\bar{A}}$二次收缩为0.

代入(*)式有，

$$\frac{DE_k}{Dt}=\frac{\partial}{\partial x_i}\left[(-\rho\Pi-p)u_i\right]+\frac{\partial}{\partial x_j}(2\mu S_{ij}u_i)-2\mu S_{ij}S_{ij}$$

写成向量表达式为

$$\frac{DE_k}{Dt}=\nabla\cdot\left[(-\rho\Pi-p)\vec{u}-2\mu\bar{\bar{S}}\cdot\vec{u}\right]-2\mu\bar{\bar{S}}:\bar{\bar{S}}$$

全流场积分为

$$\int_V\frac{DE_k}{Dt}d\tau=\oint_S\left[(-\rho\Pi-p)\vec{u}-2\mu\bar{\bar{S}}\cdot\vec{u}\right]d\vec{A}-2\mu\int_V\bar{\bar{S}}:\bar{\bar{S}}\,d\tau$$

由于边条件 $r\to\infty$, $\vec{u}=0$；$\vec{u}|_S=0$

得

$$\frac{D}{Dt}\int_V E_k\,d\tau=-2\mu\int_V\bar{\bar{S}}:\bar{\bar{S}}\,d\tau<0.$$

说明动能是耗散的。

1° 因为 $\frac{D(\rho\Pi)}{Dt}=\frac{\partial}{\partial t}(\rho\Pi)+(\vec{u}\cdot\nabla)(\rho\Pi)=\vec{u}\cdot\nabla(\rho\Pi)$

右端积分式中的第一项移到左边和为机械能的变化率，所以实际上机械能是耗散的.

注：上述积分式可能不收敛，所以我们只是定性地说明了能量的耗散性，数学并不严谨。

1.4. 粘性流体运动中涡旋的扩散性.

动量方程 $\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u} = \vec{f_b} - \frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\nabla^2\vec{u}$

由 $(\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u} = \nabla(\frac{\vec{u}^2}{2}) - \vec{u}\times\vec{w}$

得 $\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = -\nabla(\frac{\vec{u}^2}{2} + \Pi + \frac{p}{\rho}) + \nu\nabla^2\vec{u} + \vec{u}\times\vec{w}$

由 $\nabla\times(\vec{u}\times\vec{w}) = (\vec{w}\cdot\nabla)\vec{u} - (\vec{u}\cdot\nabla)\vec{w}$

两边取旋度得

$$\frac{\partial \vec{w}}{\partial t} + (\vec{u}\cdot\nabla)\vec{w} = \nu\nabla^2\vec{w} + (\vec{w}\cdot\nabla)\vec{u}$$

其中 $p' = \frac{\vec{u}^2}{2} + \Pi + \frac{p}{\rho}$，$\nu\nabla^2\vec{w}$ 称为涡的扩散项，$(\vec{w}\cdot\nabla)\vec{u}$ 称为涡的拉伸压缩项

对于平面二维情况 $\vec{w} \perp \nabla\vec{u}$，上式化为

$$\frac{\partial w_z}{\partial t} + (\vec{u}\cdot\nabla)w_z = \nu\nabla^2 w_z.$$

在 $\vec{w}$ 的极值点，$\nabla w_z = 0$.

得 $\frac{\partial w_z}{\partial t} = \nu\nabla^2 w_z = \nu(\frac{\partial^2 w_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_z}{\partial y^2})$

w_z 为极小值时，$\nabla^2 w_z > 0$，$\frac{\partial w_z}{\partial t} > 0$.

w_z 为极大值时，$\nabla^2 w_z < 0$，$\frac{\partial w_z}{\partial t} < 0$.

可知涡旋是扩散的.

1.5. N-S方程的简化.

无量纲化N-S方程

$$St\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u} = \frac{1}{Fr^2}\vec{f_b} - \nabla p + \frac{1}{Re}\nabla^2\vec{u}$$

①若 $Re\to\infty$，(如 $\mu\to 0$)，则化为理想流体运动

②若 $Re\to 0$，(如 $L\to 0$ 或 $\mu\to\infty$)，则粘性力作用远大于惯性力.

忽略惯性力 并忽略体力，或者体力有势，$\vec{f_b} = -\nabla\Pi$，记 $p' = p + \Pi$，称为广义压强
(这里的Π的系数不必深究 差不多就行)

则运动方程组化为

$$\begin{cases} \nabla\cdot\vec{u} = 0 \\ \mu\nabla^2\vec{u} = \nabla p' \end{cases}$$

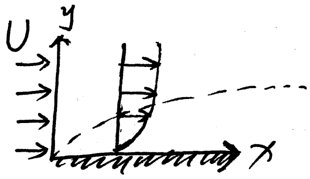
→ 称为 斯托克斯方程.

③若 Re 很大，流场的大部分区域仍可以忽略粘性力，在近壁面很薄的一层内，我们同时考虑粘性力和惯性力作用，称此层流体为边界层。

2、边界层的物理概念

2.1. 边界层的名义厚度 δ

名义厚度 $\delta(x)$：$u=0.99U$ 处的 y 值



- $\delta(x)$ 很小

惯性力量级：$\rho u\frac{\partial u}{\partial x} \sim \rho U\frac{U}{x}$

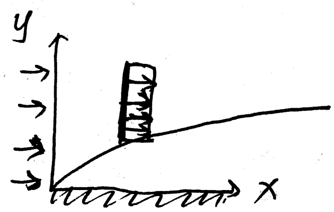
粘性力量级：$\mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \sim \mu\frac{U}{\delta^2}$ ⇐ 可以这么估算数量级么？一阶导数大不一定二阶导数大啊

考虑到 惯性力与粘性力相当

$\therefore \quad \rho\frac{U^2}{x} \sim \mu\frac{U}{\delta^2}$

$\therefore \quad \delta \sim x\sqrt{\frac{\mu}{\rho U x}} = x Re_x^{-\frac{1}{2}}$ ，Re_x 为与 x 坐标相关的雷诺数。

2.2. 位移厚度（质量流量亏损厚度）



$$\rho U\delta^* \equiv \int_0^\infty \rho(U-u)dy$$

$$\therefore \delta^* = \int_0^\infty 1-\frac{u}{U}dy$$

2.3. 动量亏损厚度 θ

$$(\rho U\theta)U \equiv \int_0^\infty \rho(U-u)u\,dy.$$ （质量流量 × 速度亏损量）

$$\therefore \theta = \int_0^\infty \frac{u}{U}\left(1-\frac{u}{U}\right)dy$$

2.4 边界层流动的控制方程（二维平板层流边界层）

取无量纲形式的 N-S 方程，特征速度为 U，特征长度为板长 L，特征时间为 $\frac{L}{U}$，特征压强为 ρU^2。（我也不知道压强为什么这样无量纲化）

则 $x^* \sim 1,\ y^* \sim \delta^*,\ t^* \sim 1,\ u^* \sim 1$，其中 $\delta^* = \frac{\delta}{L}$，是无量纲化的边界层厚度。

$$\begin{cases} \frac{\partial u^*}{\partial t^*} + u^*\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^*\frac{\partial u^*}{\partial y^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}}\right) \\ \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0 \\ \frac{\partial v^*}{\partial t^*} + u^*\frac{\partial v^*}{\partial x^*} + v^*\frac{\partial v^*}{\partial y^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial y^*} + \frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial y^{*2}}\right) \end{cases}$$

$1+1+1 \ : \ ? \ + \delta^2\left(1+\frac{1}{\delta^2}\right)$

$1+1 \ : \ 0$

$\delta+\delta+\delta \ : \ ? \ + \delta^2\left(\delta+\frac{1}{\delta}\right)$

由连续性方程有 $v^* \sim \delta^*$，由于边界层中粘性力与惯性力同量级，所以 $\frac{1}{Re} \sim \delta^{*2}$，剩下 $\frac{\partial p^*}{\partial x^*} \sim 1$，$\frac{\partial p^*}{\partial y^*} \sim \delta^*$（压力梯度的量阶由方程中的其它项决定）。

还原为有量纲形式

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

（普朗特边界层方程的一般形式）

prandtl.

（本质上是 $\frac{\partial p}{\partial y} \sim \rho U^2\delta^*$）

在边界层外缘，即 $y=\delta(x)$ 时，$u=u_e$，其中 $u_e=0.99U$。因为边界层外缘粘性力可忽略，

所以方程化为

$$\frac{\partial U}{\partial t}+U\frac{\partial U}{\partial x}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p_e}{\partial x}$$

（V可忽略）
（U不是常值，$U=U(x,t)$）

~~代入一般方程有~~

由于 $\frac{\partial p}{\partial y}=0$，故 $p=p_e(x)$，故一般方程化为

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial U}{\partial t}+U\frac{\partial U}{\partial x}+\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

（普朗特边界层方程的另一形式）

3、平板层流边界层的精确解

在匀速来流下，

设流动定常，又因为 u_e 是常值，上述方程化为

$$\begin{cases} u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \end{cases}$$

定义长度：$g(x)=\sqrt{\frac{\nu x}{U}}$ （边界层厚度的形式，区别为一个常数倍。）

引入无量纲量：$\eta=\frac{y}{g(x)}$ （相似变量）（使方程变为常微分方程）

引入流函数：$\psi(x,y)$

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi}{\partial y}=u \\ \frac{\partial \psi}{\partial x}=-v \end{cases}$$

（从而 prandtl 边界层方程由两个减为一个）

无量纲流函数：$f(\eta)=\frac{\psi}{\sqrt{\nu U x}} \Rightarrow \psi=f(\eta)\sqrt{\nu U x}$

（如果自相似解存在，则按相似解的定义，无量纲流动（速度场、流函数）只是无量纲尺度 η 的函数。）

∴ 方程化为 $\frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x\partial y}-\frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}=\nu\frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3}$，其中

① $u=\frac{\partial \psi}{\partial y}=\frac{\partial \psi}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}=Uf' \Rightarrow f'=\frac{u}{U}$

② $\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial \eta}(Uf')\frac{\partial \eta}{\partial y}=Uf''\sqrt{\frac{U}{\nu x}}$

③ $\frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3}=f'''\frac{U^2}{\nu x}$

④ $\frac{\partial \psi}{\partial x}=\frac{\partial \psi}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}+\frac{\partial \psi}{\partial x}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\nu U}{x}}(f-\eta f')$

（这里本质上是错，等式左边 $\psi=\psi(x,y)$，右边 $\psi=\psi(\eta,x)$，约定不同，不能写在一起。正确的方法是把 η 还原为 x,y 的函数，再对 x 求偏导。）

⑤ $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x\partial y}=-\frac{1}{2}\frac{U}{x}\eta f''$

代入原方程得 $2f'''+ff''=0$

边条件

$$\begin{cases} y=0, & u=v=0 \\ y\to\infty, & u=U \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \eta=0, & f=f'=0 \\ \eta\to\infty, & f'=1 \end{cases}$$

讨论：1、边界层界面上，$f'=0.99$，$y=\delta$，数值解得 $\eta = 5.0$

由 $\eta = y\sqrt{\frac{U}{\nu x}}$，解得无量纲名义厚度

$$\frac{\delta}{x} = 5 Re_x^{-\frac{1}{2}}$$

2、同理 $\delta^* = \int_0^\infty \left(1-\frac{u}{U}\right) dy \cong \int_0^\delta \left(1-\frac{u}{U}\right) dy$

由 $dy = \sqrt{\frac{\nu x}{U}}\, d\eta$ 得（x为常值，左式成立）

$$\delta^* = x Re_x^{-\frac{1}{2}} \int_0^5 (1-f')\, d\eta$$

由数值解得，无量纲位移厚度

$$\frac{\delta^*}{x} = 1.72 Re_x^{-\frac{1}{2}}$$

3、同理，无量纲动量厚度

$$\frac{\theta}{x} = 0.664 Re_x^{-\frac{1}{2}}$$

4、壁面切应力 $\tau_w = \mu \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=0} = \mu U f'' \sqrt{\frac{U}{\nu x}}\Big|_{\eta=0} = 0.332 \rho U^2 Re_x^{-\frac{1}{2}}$

得壁面局部摩擦系数

$$C_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho U^2} = 0.664 Re^{-\frac{1}{2}}$$

4. 边界层流动的积分解法

定常、二维、普朗特边界层方程.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = U\frac{dU}{dx} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \end{cases}$$

得动量积分方程

$$\tau_w = \frac{d}{dx}(\rho U^2 \theta) + (\rho U \delta^*)\frac{dU}{dx}$$

U = 常数，$\Rightarrow \tau_w = \rho U^2 \frac{d\theta}{dx}$

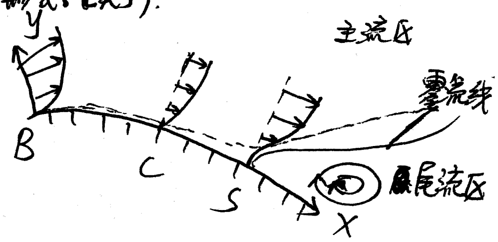
摩擦系数 $C_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho U^2} = 2\frac{d\theta}{dx}$.

5、边界层的分离

(在曲面的曲率半径不太小，曲率半径变化不太大的情况下，prandtl 边界层方程与平板边界层方程有一样的形式。[实])

普朗特边界层方程沿曲壁坐标方向的分量式.

$$\rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right)=-\frac{dp}{dx}+\mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$



因为在壁面上 $u=v=0$，得

$$\frac{dp}{dx}=\mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

2、顺压区BC（$\frac{dp}{dx}<0$），速度面"外凸"

逆压区 CS（$\frac{dp}{dx}>0$），速度"内凹".

由边界层分离形成的阻力称为尾涡阻力、压差阻力、形状阻力.

边界层分离的根本原因：粘性.

分离条件：逆压梯度存在.

6、绕流物体所受阻力.

6.1. 摩擦阻力

$$F_D^f=\int_A(\vec{\tau}_w\cdot\vec{i})dA \qquad (drag)$$

6.2. 压差阻力

$$F_D^p=\int_A -p(\vec{n}\cdot\vec{i})dA.$$

7、低雷诺数流动之外流

$$\begin{cases}\nabla\cdot\vec{u}=0\\ \nabla p=\mu\nabla^2\vec{u}\end{cases}\rightarrow \text{stokes方程.}$$

$$\Rightarrow \nabla^2\vec{\omega}=0.$$