第八章 不可压缩粘性流体的内流问题

不可压粘性流动的运动方程：

$$\begin{cases} \nabla\cdot\vec{u}=0 \\ \dfrac{\partial\vec{u}}{\partial t}+(\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u}=-\dfrac{1}{\rho}\nabla p+\nu\nabla\vec{u}+\vec{f_b} \end{cases}$$

求解的难点在于非线性项 $(\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u}$.

其中有4个(标量)未知量，4个(分量)问题.

可解情形为：

1. $Re=\dfrac{[惯性力]}{[粘性力]}\to 0$，于是可以忽略粘性力，方程化为 stokes 方程.

2. $Re \not\to 0$，但 $(\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u}\cong 0$.（几何约束所致）

$\Rightarrow$ 单向或准单向流动.

均匀来流，平行剪切流.

$\Rightarrow$ Stokes 流.

1. 平行平板间的层流运动（泊肃叶流）

方程简化假设：1° 定常 $\frac{\partial}{\partial t}=0$. ; 2° 均质不可压 $\rho=Const.$; 3° $u=u(y)$

4° $\vec{f_b}=-g\vec{j}$

运动方程化为：

$$\begin{cases} 0=-\dfrac{\partial p}{\partial x}+\mu\dfrac{d^2u}{dy^2} \\ 0=-\rho g-\dfrac{\partial p}{\partial y} \end{cases} \qquad \begin{aligned} &\Rightarrow \dfrac{\partial p}{\partial x}=\mu\dfrac{d^2u}{dy^2}=Const. \\ &\Rightarrow p=-\rho g y+h(x) \end{aligned}$$

$$\therefore \begin{cases} u=\dfrac{1}{2\mu}\dfrac{\partial p}{\partial x}y^2+C_1y+C_2 \\ p=-\rho g y+\dfrac{\partial p}{\partial x}x \end{cases}$$

代入边条件 $\begin{cases} u|_{y=0}=0 \\ u|_{y=b}=0 \end{cases}$ 得 $u(y)=\dfrac{1}{2\mu}\dfrac{\partial p}{\partial x}(y^2-by)$

2. 一般库埃特流

仅是边条件有变化：$\begin{cases} u|_{y=0}=0 \\ u|_{y=b}=U \end{cases}$

代入通解有，$u(y)=\dfrac{1}{2\mu}\dfrac{\partial p}{\partial x}(y^2-by)+\dfrac{U}{b}y.$

注：在问题的无量纲化过程中，