第九章 气体动力学基础.

1. 热力学基础

1.1 完全气体状态方程 (perfect gas) equation of state.

$$p = \rho RT$$

或 $pv = RT$, $v = \frac{1}{\rho}$ (比容) ; R 气体常数 , $R = \frac{R_m}{m} = \frac{\text{普适气体常数}}{\text{摩尔质量}}$

对空气, $R = 287\ J\cdot kg^{-1}\cdot K^{-1}$

1.2 内能 $e = e(T)$

1° 热力学第一定律 $de = dq + dw$

等熵过程: (isentropic process) 绝热、可逆过程是等熵的.

$$ds = \frac{dq}{T} = 0$$

通常用无耗散、缓慢的过程近似等熵过程.

2° 热力学第二定律

$$ds \geq \frac{dq}{T}$$

对可逆过程 $de = Tds - pdv$ (e是单位质量气体的内能, v是比容 $v = \frac{V}{m}$)

3° 焓 (enthalpy): 除动能外, 所有能量的总和

$$h = e + \frac{p}{\rho} = e + pv$$

, pv 称为压力能. v为比容.

对可逆过程 $dh = Tds + vdp$

4° 热容

$$C_v = \left(\frac{\partial e}{\partial T}\right)_v , \quad C_p = \left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_p$$

对于热完全气体, $de = C_v dT$, $dh = C_p dT$

对量热完全气体, $\gamma = Const.$, $e = C_v T$, $h = C_p T$

5° 熵变

$$\Delta S = C_p \ln\frac{T_2}{T_1} - R\ln\frac{p_2}{p_1} , \quad (S = S(T,p))$$

$$\Delta S = C_v \ln\frac{T_2}{T_1} + R\ln\frac{\rho_1}{\rho_2} \quad (S = S(T,\rho))$$

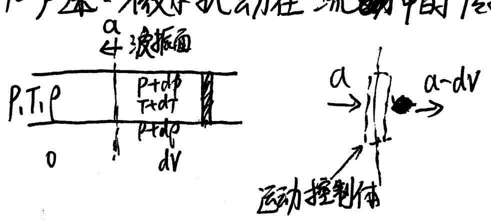
对等熵情况,

$$\ln\frac{T_2}{T_1} = \frac{R}{C_p}\ln\frac{p_2}{p_1} = \frac{R}{C_v}\ln\frac{\rho_2}{\rho_1}$$

$$\therefore \frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^{\gamma}$$

2、声速、马赫数、及流体的可压缩性.

2.1 声速: 微小扰动在流体中的传播.



① 质量守恒 $a\rho = (a - dv)(\rho + d\rho)$

$\Rightarrow a\,d\rho = \rho\, dv$

② 动量定理

$$p-(p+dp)=(\rho+d\rho)(a-dV)^2-\rho a^2$$

$$\Rightarrow -dp=-a^2 d\rho$$

∴ $a=\sqrt{\left(\frac{dp}{d\rho}\right)_S}$ (等熵)，其中 $\left(\frac{dp}{d\rho}\right)_S=C\gamma\rho^{\gamma-1}=\frac{\gamma}{\rho}p=\gamma RT$

对等熵量热完全气体，

∴ 声速 $a=\sqrt{\gamma RT}=\sqrt{\left(\frac{dp}{d\rho}\right)_s}$

③ 连续条件. $\frac{\Delta V}{a}=\frac{\Delta\rho}{\rho}=-\frac{\Delta v}{v}$ — 比容.

2-2. 马赫数

$M=\frac{V}{a}$.

$M<1$: 亚音速流　　$M<0.3$, 用不可压流动处理.

$M\approx 1$: 跨音速流

$M>1$: 超音速流

$$\frac{\gamma(\gamma-1)}{2}M^2=\frac{\frac{1}{2}V^2}{e}$$ ← 马赫数的物理解释. (动能/内能)

2-3. 马赫角

$\alpha=\arcsin\frac{a}{V}$

2-4. 流体的可压缩性.

热力学定义: $\tau=\frac{\left(-\frac{dv}{v}\right)}{dp}$　压强增加单位值时, 比容的相对减小值.

可推出, $\tau=\frac{\left(\frac{d\rho}{\rho}\right)}{dp}$

$$\frac{\Delta V}{V}=-\tau\Delta p$$

注: 1. $\frac{\Delta V}{V}\geq 0.05$ 时, 相当于 $M\geq 0.3$, 认为可压缩.

2. 表征可压缩性的量: τ, $\frac{\Delta V}{V}$, $\frac{\Delta\rho}{\rho}$, M, a.

3、无粘可压缩流体、定常等熵流动的伯努利方程.

$$\begin{cases} \dfrac{D\rho}{Dt} + \rho(\nabla\cdot\vec{u}) = 0 & \text{连续性方程} \\ \dfrac{D\vec{u}}{Dt} = (\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u} = -\dfrac{1}{\rho}\nabla p & \text{动量方程} \quad (\dfrac{\partial}{\partial t}=0;\ \mu=0). \\ p = \rho R T & \text{状态方程}. \\ p = c\rho^{\gamma} & \text{等熵关系} \end{cases}$$

① 由热一. $dh = Tds + vdp$

$$\Rightarrow \quad Tds = dh - vdp$$

$$\Rightarrow \quad T\nabla s = \nabla h - v\nabla p$$

由 $-\frac{1}{\rho}\nabla p = \nabla(\frac{\vec{u}^2}{2}) - \vec{u}\times\vec{w}$

$$\therefore \Rightarrow \quad T\nabla s - \nabla\underbrace{\left(h + \frac{\vec{u}^2}{2}\right)}_{\text{总焓(总能量)}} = -\vec{u}\times\vec{w}$$

等熵时, $\nabla s = 0$, 沿流线积分

$$\Rightarrow \quad h + \frac{\vec{u}^2}{2} = h_0 \quad \leftarrow \text{总焓}$$

② 对量热完全气体

$$\frac{V^2}{2} + c_p T = \frac{V^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1}RT = \frac{V^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p}{\rho} = \frac{V^2}{2} + \frac{a^2}{\gamma-1} = \text{常数}.$$

4. 一维等熵关系式.

4.1. 滞止状态与滞止参数.

滞止状态: 绝热地减速到0时的状态,称为当地状态对应的滞止状态.

$$\frac{V^2}{2} + \frac{\gamma R}{\gamma-1}T = \frac{\gamma R}{\gamma-1}T_0 \quad \leftarrow \text{总温}.$$

$$\Rightarrow \frac{T_0}{T} = 1 + \frac{V^2}{2}\frac{\gamma-1}{\gamma RT} = 1 + \frac{\gamma-1}{2}\frac{V^2}{a^2} = 1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2 \quad \text{—— 温度的滞止参数}.$$

由等熵关系

$$\frac{p_0}{p} = \left(\frac{T_0}{T}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = \left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^{\gamma}$$

可得 $\frac{p_0}{p}$、$\frac{\rho_0}{\rho}$ 这些滞止参数.

定义 $a_0 = \sqrt{\gamma R T_0}$ —— 总音速

$$\therefore \frac{a_0}{a} = \left(\frac{T_0}{T}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

4.2. 临界状态和临界参数.

物质

临界状态：绝热地将质点速度变到 a 时的状态，称为当地状态对应的临界状态。

用 $*$ 表征临界量.

由 $\frac{V^2}{2}+\frac{a^2}{\gamma-1}=\frac{V^{*2}}{2}+\frac{a^{*2}}{\gamma-1}$ $\quad (V^*=a^*)$

$\Rightarrow \frac{V^2}{2}+\frac{a^2}{\gamma-1}=\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}a^{*2}$

又 $\frac{V^2}{2}+\frac{a^2}{\gamma-1}=\frac{a_0^2}{\gamma-1}$

$\Rightarrow$ 临界参数. $\frac{a^{*2}}{a_0^2}=\frac{2}{\gamma+1}=\frac{T^*}{T_0}$

温度

由等熵关系 $\frac{p^*}{p_0}=\left(\frac{T^*}{T_0}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}=\left(\frac{\rho^*}{\rho_0}\right)^{\gamma}$，可得临界压强、密度参数。

定义速度系数 $M^*=\lambda=\frac{V}{a^*}$

由 $\frac{V^2}{2}+\frac{a^2}{\gamma-1}=\frac{1}{2}\frac{\gamma+1}{\gamma-1}a^{*2}$

$\Rightarrow M^2=\dfrac{2}{\frac{\gamma+1}{\lambda^2}-(\gamma-1)}$ 或 $\lambda^2=\dfrac{\gamma+1}{\frac{2}{M^2}+(\gamma-1)}$

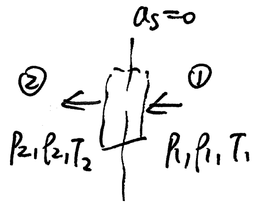
当 $M\to\infty$，$\lambda\to\sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}$.

（自学：一维变截面管定常等熵流 P177~185）

6. 激波，一维静止正激波.

6.1. 激波的形成.

6.2. 静止正激波的基本关系式.



1° 基本方程

① 连续性方程：$\rho_1V_1A_1=\rho_2V_2A_2 \quad (A_1=A_2) \Rightarrow \rho_1V_1=\rho_2V_2$

② 动量方程：$\rho_2V_2^2A_2-\rho_1V_1^2A_1=p_1A_1-p_2A_2. \Rightarrow p_1+\rho_1V_1^2=p_2+\rho_2V_2^2$

③ 能量方程：$h_1+\frac{1}{2}V_1^2=h_2+\frac{1}{2}V_2^2$ （总焓守恒，但是过程不等熵）（量热完全气体：$h=c_pT$.）

④ 状态方程：$p=\rho RT$.

No.

Date

2、激波前后关系式

$\frac{②}{\rho V}$:

$\frac{p}{\rho}=RT=\frac{a^2}{\gamma}$:

临界关系式 $\frac{V^2}{2}+\frac{a^2}{\gamma-1}=\frac{1}{2}\frac{\gamma+1}{\gamma-1}a^{*2} \Rightarrow a^2=\frac{\gamma+1}{2}a^{*2}$