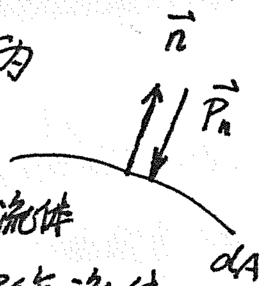
第三章、流体静力学（流体的平衡）.

本章主要介绍：① 流体的平衡条件；② 流体内部的压强分布规律；以及③ 对流体边界的压强合力等.

一．流体的平衡：若流体相对于某一坐标系（惯性系或非惯性系）静止不动，就称流体处于平衡状态（或相对平衡状态）。研究流体平衡的科学称为流体静力学.

二．流体平衡时的压强：

静止的流体不能承受切应力，只能承受法向应力。如第二章中所讲，作用在静止流体中一面元 dA 上的应力 $\vec{p}_n$ 可表示为



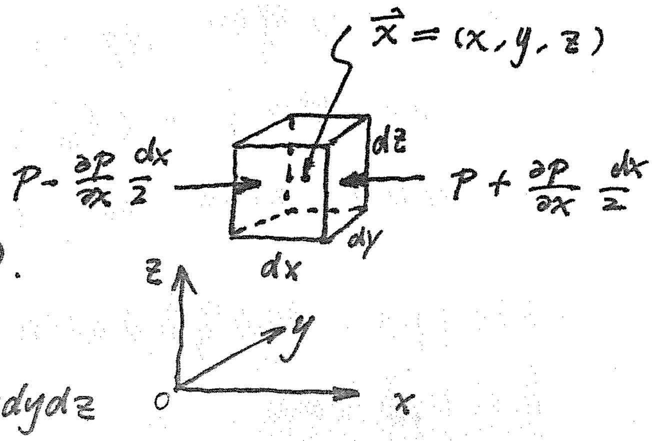
$$\vec{p}_n = -p\vec{n} \qquad (3.2.1)$$

其中 $\vec{n}$ 为面元外法线单位方向矢量，标量 p 表示静止流体中作用在该点任意取向的面元上压应力的大小，称作流体的静力学压强，简称压强。(3.2.1) 中的负号表明法向应力总是指向面元内侧。压强单位为帕斯卡 (Pa)．$1Pa = 1N/m^2$.

三．流体平衡的微分方程：

（一）流体的绝对平衡方程：

如右图在静止流体中任取一微元六面体 $dxdydz$，其中心点处压强为 $p(x,y,z)$.



则作用于 x 方向的合力为

$$dydz\left[p - \frac{\partial p}{\partial x}\frac{dx}{2} - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x}\frac{dx}{2}\right)\right] = -\frac{\partial p}{\partial x}dxdydz$$

同样作用于 y 方向和 z 方向的合力分别为:

$$-\frac{\partial p}{\partial y}dxdydz \text{ 和 } -\frac{\partial p}{\partial z}dxdydz.$$

因此，由于微元各面压力分布的不均匀而产生的合力为:

$$-\left(\frac{\partial p}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial p}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial p}{\partial z}\vec{k}\right)dxdydz=-\nabla p\,dxdydz$$

其中 $\nabla p=\frac{\partial p}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial p}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial p}{\partial z}\vec{k}$ 称为压强梯度.

假设作用于单位质量流体上的体积力为 $\vec{f_b}$，那么流体平衡时两者合力应为零，即:

$$\rho\vec{f_b}\,dxdydz-\nabla p\,dxdydz=0$$

由于微元体 $dxdydz$ 的任意性，我们有(对单位体积流体):

$$\rho\vec{f_b}=\nabla p \qquad (3.3.1)$$

方程(3.3.1)称为绝对静止流体的微分平衡方程.

(二) 等压面:

利用全微分，流体内部压强分部 $p(x,y,z,t)$ 在一点邻域内的空间增量 $dp=\frac{\partial p}{\partial x}dx+\frac{\partial p}{\partial y}dy+\frac{\partial p}{\partial z}dz$

由(3.3.1)可知: $dp=\rho(f_x dx+f_y dy+f_z dz)$

其中 体力 $\vec{f_b}=(f_x,f_y,f_z)$.

在等压面上; $dp=0 \Rightarrow f_x dx+f_y dy+f_z dz=\vec{f_b}\cdot d\vec{r}=0$

$$(3.3.2)$$

方程(3.3.2)即为等压面的微分方程. 上述方程表明体力与等压面是处处垂直的.

例：两种互不混合的静止流体的分界面为等压面：

证明：在分界面上对于第一种流体(ρ_1)：

$$dp = \rho_1 (f_x dx + f_y dy + f_z dz)$$

对第二种流体(ρ_2)：

$$dp = \rho_2 (f_x dx + f_y dy + f_z dz)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2}\right) dp = 0 \xRightarrow[\rho_1 \neq \rho_2]{} dp = 0$$，即分界面为等压面.

(三) 流体的平衡条件：

我们考察流体的平衡方程(3.3.1)：$\rho \vec{f}_b = \vec{\nabla} p$. 两边同时除密度 ρ，再取旋度：

$$\vec{\nabla} \times \vec{f}_b = \vec{\nabla} \times \left(\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p\right) = -\frac{1}{\rho^2} \vec{\nabla} \rho \times \vec{\nabla} p \qquad (3.3.3)$$

考虑到(3.3.1)，将(3.3.3)两端分别在 $\vec{f}_b$ 和 $\frac{1}{\rho}\vec{\nabla} p$ 上投影，有：

$$\vec{f}_b \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{f}_b) = -\frac{1}{\rho^3} \vec{\nabla} p \cdot (\vec{\nabla} \rho \times \vec{\nabla} p) \equiv 0 .$$

即

$$\vec{f}_b \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{f}_b) = 0 \qquad (3.3.4)$$

方程(3.3.4)是流体能够保持平衡的必要条件。

1. 对于均质流体($\rho \equiv$ 常数)，由方程(3.3.3)可知：

$$\vec{\nabla} \times \vec{f}_b = 0$$

即体力无旋，因此存在势函数 π 使得 $\vec{f}_b = -\vec{\nabla} \pi$ (体力有势).

由(3.3.1) $\Rightarrow -\vec{\nabla} \pi = \vec{\nabla}\left(\frac{p}{\rho}\right) \Rightarrow \pi = -\frac{p}{\rho}$.

即平衡的均质流体的体力势 $\pi = -\frac{p}{\rho}$.

55193

2. 对于非均质流体

① ρ 只是 p 的函数：$\rho=\rho(p)$，称为正压流体。如等温或绝热的流体均属正压流体。

我们可以定义压力函数：$P(p)$ 使得

$$\vec{\nabla} P = \frac{\vec{\nabla} p}{\rho(p)}.$$

由 (3.3.1) 可知：$\vec{f_b} = \vec{\nabla} P$，而应取旋度有

$$\vec{\nabla}\times\vec{f_b} = 0 \Rightarrow \vec{f_b} = -\vec{\nabla}\pi, \quad \pi = -P(p).$$

因此，对于正压流体(包括均质流体)而言，体力的等势面、等压面、和等密度面三者重合。② ρ 除了与 p 有关，还与温度 T 有关，称为斜压流体(暂不讨论)。

四. 流体的静力学基本方程（静力学规律）.

我们考察静止流体在重力作用下的压强分布规律：方程 (3.3.1) 变为：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial p}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial p}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \end{cases} \qquad (3.4.1)$$

即压强 p 只与 z 有关，取 z 轴竖直向上为正（我们只考虑均质情况）：

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g$$

积分得

$$p = -\rho g z + C \qquad (3.4.2)$$

或写成：

$$\underbrace{gz}_{\text{重力势能}} + \underbrace{\frac{p}{\rho}}_{\text{压强势能}} = C_1 \quad \text{（在全流场适用）} \qquad (3.4.3)$$

即：在静止的均质流体中，单位质量的流体的总势能在全流场守恒。或总水头（也叫测压管水头）不变：$z + \dfrac{p}{\rho g} = C_2$（全流场）(3.4.4).

若取自由面坐标 $z=z_0$，压强为 p_0，则由(3.4.12)可得:

$$p = p_0 + \rho g(z_0 - z) \qquad (3.4.5)$$

其中 $z_0 - z = h$ 称为"淹深"。这样流体静力学分布规律(3.4.5)可以写成

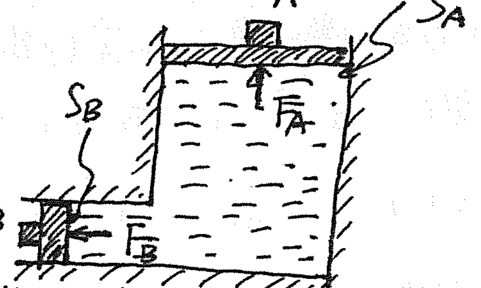
$$p = p_0 + \rho g h \qquad (3.4.6)$$

有时(3.4.6)还写成

$$p = \rho g\left(h + \frac{p_0}{\rho g}\right) = \rho g h_e \qquad (3.4.7)$$

其中 $h_e = h + \frac{p_0}{\rho g}$ 称为"等效深度"，相当于把自由面~~假想~~地升高 $\frac{p_0}{\rho g}$，并且抬升以后的"自由面"上的压强为零。此自由面称为"等效自由面"。

(一) 帕斯卡定理:



对(3.4.7)两端取微分运算有

$$\delta p = \delta p_0$$

即，在自由面(或某分界面)上压力有 δp_0 的变化，静止流体各点上的压力也发生相应的改变。

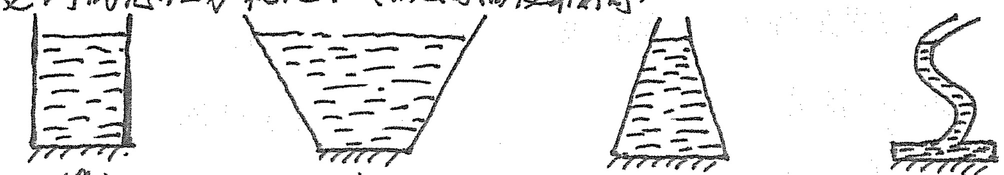
例如图中A、B两个活塞表面上的受力之比:

$$\frac{F_B}{F_A} = \frac{\Delta p S_B}{\Delta p S_A} = \frac{S_B}{S_A}$$

，即作用在活塞B上的力会在活塞A处被放大。

注: Pascal定理在水压机、液压千斤顶、和液压制动闸等领域的应用。

(二) 流体静力学矛盾: (a)(b)(c)(d)四个容器底部面积相等，哪个容器底部受到的总压力最大? (液面高度相同)。

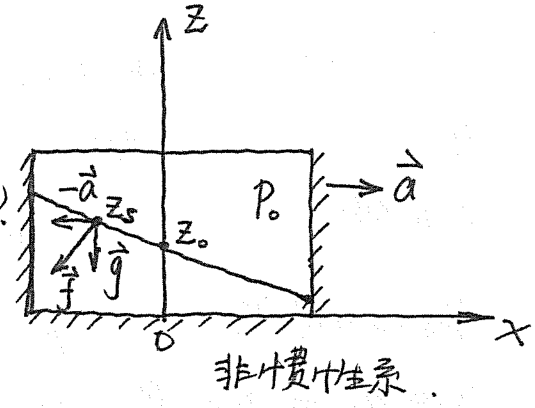


(a) (b) (c) (d)

$F = (p_0 + \rho g h)A$.

五．均质液体的相对平衡：

（一）均质液体做等加速度直线运动．



设容器内盛有均质液体（$\rho = const.$）

坐标系固定在匀加速运动的容器上（右图）

自由液面上压强为 p_0，容器运动的加速度为 $\vec{a}$．则在 x-z 坐标系下，作用于单位质量流体上的体力

$$\vec{f}_b = \vec{g} - \vec{a}$$

因此，平衡方程（3.3.1）变为：$\rho(\vec{g}-\vec{a}) = \nabla p$ （3.5.1）

由于在非惯性系中，$-\vec{a}$（惯性力）也为有势力，因此 $\vec{f}_b = \vec{g}-\vec{a}$ 为有势力，即 $\vec{f}_b = -\nabla\pi = \nabla\frac{p}{\rho} \Rightarrow \pi = -\frac{p}{\rho}$．

由(3.5.1) ⇒ $dp = \rho(-a\,dx - g\,dz)$

积分得：$p = -\rho(ax+gz) + C$ （3.5.2）

应用边界条件：$x=0, z=z_0, p=p_0 \Rightarrow C = p_0 + \rho g z_0$，代入（3.5.2）

有：$p = p_0 + \rho g\left[(z_0 - z) - \frac{a}{g}x\right]$ （3.5.3）

讨论：① 压强在 x 和 z 方向均为线性分布．

② 等压面 $dp=0 \Rightarrow a\,dx + g\,dz = 0 \xRightarrow{积分} ax + gz = c'$

不同的 c' 表示一簇相互平行并垂直于 $\vec{f}_b$ 的斜平面．

③ 在自由面 $x=0, z=z_0$ 处，$c' = gz_0$。若自由面上任意点的垂直坐标为 z_s，则自由面方程为 $ax + g(z_s - z_0) = 0$

④ 用液深 $h = z_s - z$，（3.5.3）式又可写成

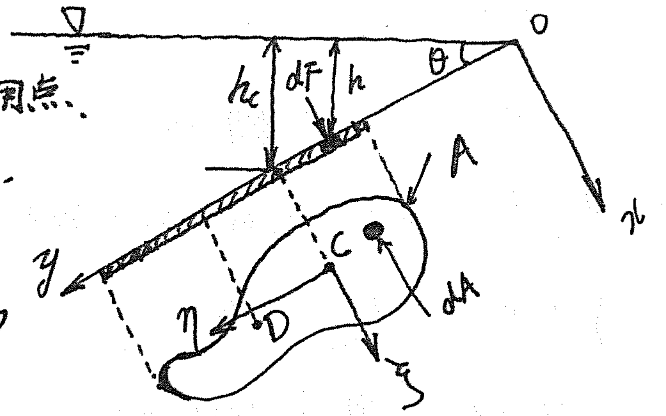
$$p = p_0 + \rho g(z_s - z) = p_0 + \rho g h \quad (3.5.4)$$

说明均质液体在作等加速直线运动时，垂直方向的压力分布与静止液体一样．

（二）均质液体的等角速度旋转运动.（请同学自学）.

六. 均质液体对平壁面的总压力.

总压力即压强作用合力，包括力的大小、方向和作用点.
在壁面上任取微元面 dA. 其坐标（纵向）y，淹深 $h = y\sin\theta$，其压强合力 dF 应⊥面元：



$$dF = \rho g h dA = \rho g y \sin\theta dA$$ （平面壁两面均受大气压作用，所以计算液体对平壁的总压力时不考虑大气压强作用）.

因此，壁面 A 所受总压力

$$\boxed{F = \rho g \sin\theta \int_A y\, dA} \qquad (3.6.1)$$

令 y_c 为壁面 A 的"形心"纵坐标，则 $\int_A y\, dA = y_c A$ ← 面元一阶矩.

所以：

$$\boxed{F = \rho g y_c \sin\theta A = \underbrace{\rho g h_c}_{P_c} A = P_c A}$$ （方向垂直指向壁面）（3.6.2）.

其中 h_c 称为形心淹深，P_c 为形心压强.

考虑到压强在深度方向成线性增长，压力中心（总压力作用点）D 通常在形心以下（即 $h_p > h_c$）.

下面我们用力矩合成法来确定压强中心的位置（积分法）：设压强中心坐标（x_D, y_D），以 C 为原点建立辅助坐标系 $C\xi\eta$，ξ 轴和 η 轴分别平行于 x 轴和 y 轴.

令 $e = y_D - y_c$，$f = x_D - x_c$，分别为压强中心 D 对形心 C

的纵向偏心距和横向偏心矩.

总合力 F 对 ξ 轴和 η 轴的力矩应分别为:

$$Fe = \int_A dF\,\eta = \rho g \sin\theta \int_A y\eta\, dA \qquad (3.6.3)$$

$$Ff = \int_A dF\,\xi = \rho g \sin\theta \int_A y\xi\, dA \qquad (3.6.4)$$

又知道: $y = y_c + \eta$, 代入以上两式中的二阶惯性矩项:

$$\int_A y\eta\, dA = y_c \int_A \eta\, dA + \int_A \eta^2 dA = 0 + I_{\xi\xi} \qquad (3.6.5)$$

$$\int_A y\xi\, dA = y_c \int_A \xi\, dA + \int_A \xi\eta\, dA = 0 + I_{\xi\eta} \qquad (3.6.6)$$

其中 $I_{\xi\xi}$ 和 $I_{\xi\eta}$ 为壁面的二阶惯性矩.

由 (3.6.2), (3.6.3) ~ (3.6.6) 可知:

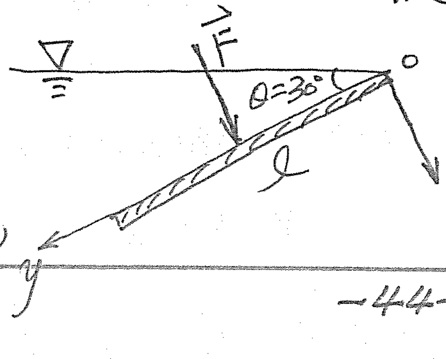
$$e = \frac{I_{\xi\xi}}{y_c A}, \quad f = \frac{I_{\xi\eta}}{y_c A}.$$

若 A 关于其中一轴对称, 则 $I_{\xi\eta} = 0 \Rightarrow f = 0$.

e 和 f 确定以后, 压力中心位置 ($y_D = e + y_c$, $x_D = f + x_c$).

例题: (J) C 1.5.2.

自由液面为大气压, 闸门长×宽 $= l \times b = 4m \times 2m$. b 边与自由液面平行, l 边与自由面成 $\theta = 30°$ 夹角。求: 总压力 F 的大小和纵向偏心矩.



解: 建立 oxy 坐标系, 其中 ox 轴位于自由面上, oy 轴沿闸门纵向下:

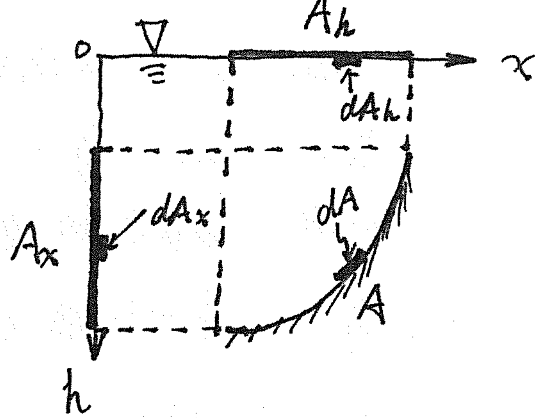
形心淹深 $h_c = 0.5 l \sin 30° = \frac{1}{4} l = 1 (m)$

$$F=\rho g h_c A = 9.8\times1000\times1\times2\times4 = 78480\,(N)$$

形心纵坐标：$y_c = \frac{l}{2} = 2(m)$

压力中心纵向偏心距：$e = \frac{I_{cc}}{y_c A} = \frac{\frac{bl^3}{12}}{\frac{l}{2}\cdot bl} = \frac{l}{6} = 0.67(m)$

七. 均质液体对曲壁的总压力（二维曲壁）.



考察均质液体中的曲壁面A，取其上一面元dA（宽度为1，垂直于纸面方向），水平和垂直方向投影分别为dA_x和dA_h，形心淹深记为h，则作用于dA上液体压力的分量式为：

$$dF_x = \rho g h\, dA_x$$

$$dF_y = \rho g h\, dA_h$$

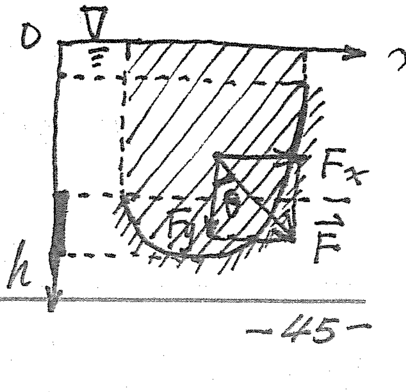
1. 总压力的水平分量：

$$F_x = \int_{A_x} dF_x = \rho g \int_{A_x} h\, dA_x = \rho g\, h_{xc} A_x \qquad (3.7.1)$$

其中 h_{xc} 为投影面A_x的形心淹深.

(3.7.1)式说明：均质液体对二维曲壁面总压力的水平分量＝曲壁面在该方向投影面上的总压力，方向指向曲壁，作用线过投影面的压强中心.

注：水平方向重叠投影部分合力为零.



2. 总压力的垂直分量：

$$F_h = \int_{A_h} dF_h = \rho g \int_{A_h} h\, dA_h = \rho g \tau_p . \quad (3.7.2)$$

其中 $\tau_p = \int_{A_h} h\, dA_h$ 称为压力体.

(3.7.2) 式表明：均质液体对曲壁面总压力的垂直分量＝与曲壁面对应的压力体内液体的重量。垂直分量的作用线通过压力体的重心.

3. 总压力大小与作用线：

总压力大小：$|\vec{F}| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$

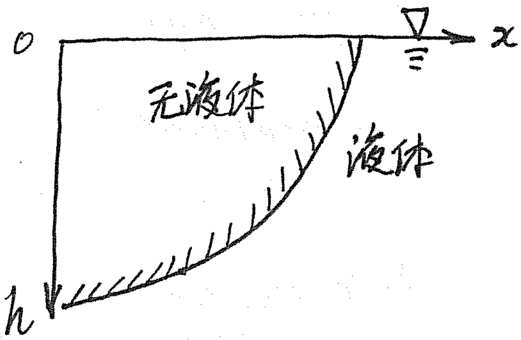
作用线与垂直方向夹角满足：$\mathrm{arc\,tan}\,\theta = \dfrac{F_x}{F_y}$.

4. 液体与压力体异侧时：

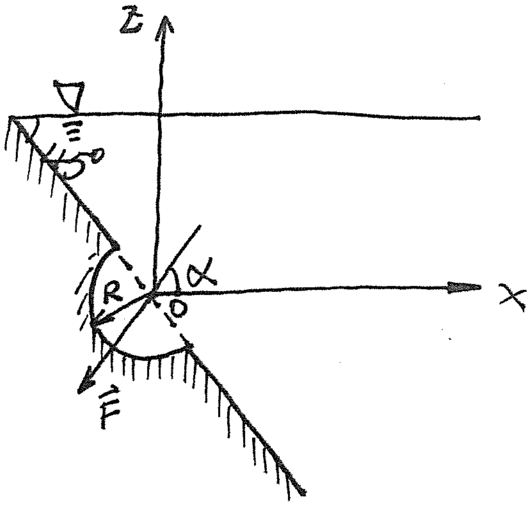
$$F_x' = -\rho g h_{xc} A_x \quad (3.7.3)$$

$$F_y' = \rho g \tau_p' = -\rho g \tau_p \quad (3.7.4)$$

其中 $\tau_p' = -\tau_p$ 称为虚压力体容积.



例题：与水平面成 45° 的倾斜壁面上有一半径为 R 的圆孔，孔心的深度为 H，现在你用一个半径为 R 的半球面堵住小孔．试求：半球面所受液体的压强合力 $\vec{F}$ 的大小和方向（不计大气压强的作用）.



解：以孔心为原点建立如右图所示坐标系 oxz，则：

$$A_x=\pi R^2\sin 45°=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi R^2$$

$$F_x=-\rho g H A_x=-\frac{\sqrt{2}}{2}\pi\rho g H R^2.$$

压力体容积

$$\tau_p=\frac{2}{3}\pi R^3+\pi R^2 H\cos 45°$$

$$=\left(\frac{2}{3}+\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{H}{R}\right)\pi R^3$$

$$F_z=-\rho g\tau_p=-\left(\frac{2}{3}+\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{H}{R}\right)\pi\rho g R^3.$$

$$\therefore |\vec{F}|=\sqrt{F_x^2+F_z^2}=\pi\rho g R^2\sqrt{\frac{4}{9}R^2+H^2+\frac{2\sqrt{2}}{3}RH}$$

$\vec{F}$ 与 x 轴方向夹角 $\alpha=\arctan\dfrac{F_z}{F_x}=\arctan\dfrac{\frac{2}{3}R+\frac{\sqrt{2}}{2}H}{\frac{\sqrt{2}}{2}H}$.

八. 阿基米德定理（请同学自学）.