北京大学工学院

第八章 不可压缩粘性流体内流问题

本章我们简单介绍不可压缩粘性流体的几个内流问题，包括①平行平板间的层流运动，②库埃特流动，③润滑理论，等。

上一章我们已经谈到了对不可压缩牛顿流体运动所遵循的N-S方程的简化问题。我们不防再回顾一下此方程：

$$\begin{cases} \vec{\nabla}\cdot\vec{u}=0 & (8.0.1) \\ \dfrac{\partial\vec{u}}{\partial t}+(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u}=-\dfrac{1}{\rho}\vec{\nabla}p+\nu\nabla^2\vec{u}+\vec{f}_b & (8.0.2) \end{cases}$$

我们有4个未知量，4个方程。数学求解的最大难点：非线性项$(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u}$.
在某些情况下，我们可以忽略惯性力的作用，而对实际问题影响很小，但却大大简化了方程的求解过程：

1. Reynolds 数 $Re=\dfrac{\text{惯性力}}{\text{粘性力}}\longrightarrow 0\Rightarrow$ 惯性力可略

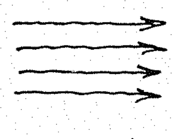
   $\Rightarrow$ 斯托克斯（Stokes）方程.（如上章中的小雷诺数圆球绕流）.

2. $Re \not\to 0$，但 $(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u}\cong 0$（由于几何约束的存在）

   $\Rightarrow$ 单向或准单向流动（unidirectional flows）.

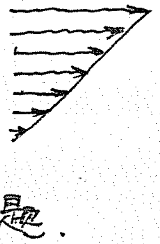
例如：

① 均匀来流 $U=const.$



$\Rightarrow U\cdot\dfrac{\partial U}{\partial x}=0$

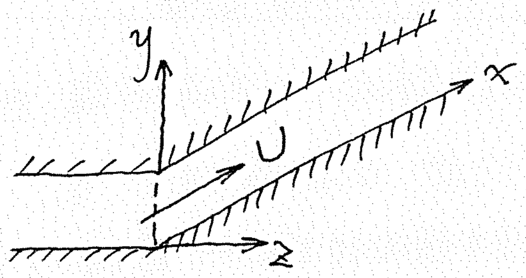
② 平行剪切流：$u=u(y)$.
$v=0$

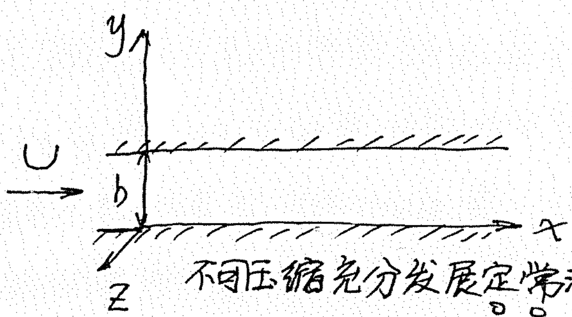


$\Rightarrow u\dfrac{\partial u}{\partial x}+v\dfrac{\partial u}{\partial y}=0$

$\Rightarrow$ 求解 Stokes 方程问题.

一. 平行平板间的层流运动（Poiseulle Flow，泊肃叶流）.





不可压缩充分发展定常流动.

1. 方程的简化：

① 定常 $\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}=0$

② 不可压均质 $\Rightarrow \rho = const.$

③ $u=u(y) \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$

又由 $\vec{\nabla}\cdot\vec{u}=0 \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial y}=0 \Rightarrow v=v(x)$，同时 $v\big|_{y=0,\,b}=0 \Rightarrow v\equiv 0$.

因此，$(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u}=0$

④ 重力作用：$f_x=0$，$f_y=-g$.

因而，N-S 方程可近似写成：

$$\begin{cases} 0=-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\frac{d^2u}{dy^2} & (8.1.1)\\ 0=-\rho g-\frac{\partial p}{\partial y} & (8.1.2)\end{cases}$$

$(8.1.2) \Rightarrow \quad p=-\rho g y+h(x)$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial p}{\partial x}=h'(x) \text{ 与 } y \text{ 无关} . \qquad (8.1.3)$$

$$(8.1.1) \Rightarrow \frac{dp}{dx}=\mu\frac{d^2u}{dy^2} \qquad (8.1.4)$$

方程右端仅与 y 相关. 因此，我们推出方程（8.1.4）两端应该二常数. 也就是说，当 μ 和流动的几何外形一定时，两板间的流动仅由 $\frac{dp}{dx}=$ 常数（通常 <0）来确定。

由(8.1.4) $\Rightarrow$ $u=\frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx}y^2+C_1y+C_2$ (8.1.5)

下面应用边界条件：$\begin{cases} y=0\text{时}, & u=0 \Rightarrow C_2=0 \\ y=b\text{时}, & u=0 \Rightarrow C_1=-\frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx}b. \end{cases}$

代入(8.1.5) $\Rightarrow$

$$u(y)=\frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx}(y^2-by)=\frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx}\left(y-\frac{b}{2}\right)^2-\frac{b^2}{8\mu}\frac{dp}{dx}. \quad (8.1.6)$$

2. 讨论：

① 最大速度：$u_m=-\frac{b^2}{8\mu}\frac{dp}{dx}$, at $y=\frac{b}{2}$.

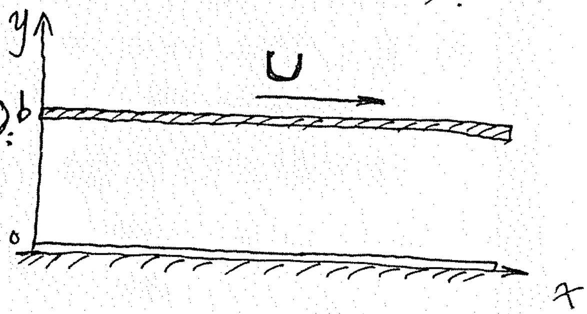
② 流量(单位宽度的体积流量)：$Q=\int_0^b u\,dy=-\frac{b^3}{12\mu}\frac{dp}{dx}$.

平均速度 $V=\frac{Q}{b}=-\frac{b^2}{12\mu}\frac{dp}{dx}=\frac{2}{3}u_m$

③ 切应力：$\tau=\mu\frac{du}{dy}=\mu\cdot\frac{1}{2\mu}\cdot\frac{dp}{dx}(2y-b)=\frac{dp}{dx}\left(y-\frac{b}{2}\right)$.

二. 一般库埃特流(Combined Couette & Poiseulle Flow).

控制方程与两平板间的Poiseulle流动相同(8.1.1)和(8.1.2)；解的一般形式(8.1.5)：



$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial x}=\mu\frac{d^2u}{dy^2} & (8.2.1) \\ \frac{\partial p}{\partial y}=-\rho g & (8.2.2) \end{cases}$$

边界条件：$y=0$ 时，$u=0 \Rightarrow C_2=0$

$y=b$ 时，$u=U \Rightarrow C_1=\frac{U}{b}-\frac{b}{2\mu}\frac{dp}{dx}$

$$\Rightarrow \quad u(y)=\frac{U}{b}y+\frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx}(y^2-by) \quad (8.2.3)$$

下面我们讨论本类问题的无量纲化：

1. 选取 U 为流动的特征速度，b 为特征长度：

则：$u^* = \frac{u}{U}$，$y^* = \frac{y}{b}$ 代入 (8.2.1) 有：

$$\frac{U}{b^2}\frac{d^2u^*}{dy^{*2}} = \frac{1}{\mu}\frac{dp}{dx} \Rightarrow \frac{d^2u^*}{dy^{*2}} = \underbrace{\frac{1}{\mu}\frac{dp}{dx}\frac{b^2}{U}}_{-\pi}$$

其中 $\pi = -\frac{1}{\mu}\frac{dp}{dx}\frac{b^2}{U}$，则

$$\frac{d^2u^*}{dy^{*2}} = -\pi \qquad (8.2.4)$$

边界条件：$\begin{cases} y^* = 0, & u^* = 0 \\ y^* = 1, & u^* = 1 \end{cases}$

则 (8.2.4) $\Rightarrow u^* = -\frac{1}{2}\pi y^{*2} + C_1 y^* + C_2$ (8.2.5)

应用边界条件 $\Rightarrow C_2 = 0$，$C_1 = 1 + \frac{1}{2}\pi$，代入 (8.2.5)

因此有：$u^* = -\frac{1}{2}\pi(y^{*2} - y^*) + y^*$

① 若 $\frac{dp}{dx}$ 很小 $\Rightarrow \pi \to 0 \Rightarrow u^* = y^*$（为无压力梯度的 Couette 流形式）.

② 若 U 很小 $\to 0 \Rightarrow \pi \to \infty$（非物理现象，在数学上为无用的或错误的解）. 说明在此情况下不能选取 U 为重复变量对该问题进行无量纲化.

2. 我们选取 $\frac{dp}{dx}$，μ，和 b 为特征量（重复量），并构造速度特征量：

$$[V] \sim -\frac{dp}{dx}\frac{b^2}{\mu}$$

则：$u^* = \frac{u}{[V]} = \frac{u}{-\frac{dp}{dx}\frac{b^2}{\mu}}$，$y^* = \frac{y}{b}$，代入 (8.2.1) 有：

$$-\frac{dp}{dx}\frac{b^2}{\mu}\frac{1}{b^2}\frac{d^2u^*}{dy^{*2}} = \frac{1}{\mu}\frac{dp}{dx} \Rightarrow \frac{d^2u^*}{dy^{*2}} = -1 \qquad (8.2.6)$$

$(8.2.6) \Rightarrow \quad u^* = -\frac{1}{2}y^{*2} + C_1 y^* + C_2$

由边界条件: $\begin{cases} y^*=0, \quad u^*=0 \Rightarrow C_2 = 0 \\ y^*=1, \quad u^* = \dfrac{U}{-\frac{dp}{dx}\frac{b^2}{\mu}} = \dfrac{1}{\pi} \Rightarrow C_1 = \dfrac{1}{\pi} + \dfrac{1}{2} \end{cases}$

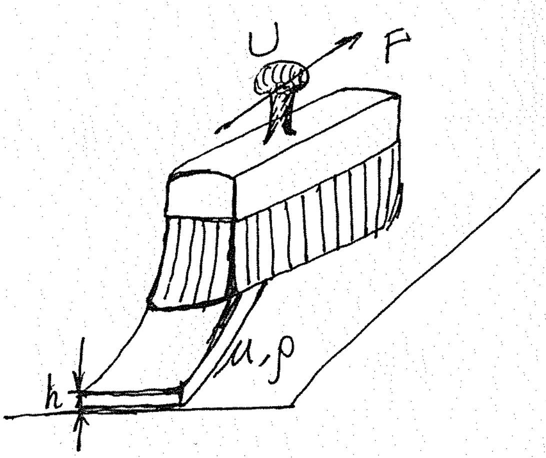
其中 $\pi = -\frac{1}{\mu}\frac{dp}{dx}\frac{b^2}{U}$.

$$\Rightarrow \quad u^* = \frac{1}{\pi}y^* + \frac{1}{2}(y^* - y^{*2}) \qquad (8.2.7)$$

当 $U \to 0$ 时, $\pi \to \infty \Rightarrow \quad u^* = \frac{1}{2}(y^* - y^{*2}) \qquad (8.2.8)$

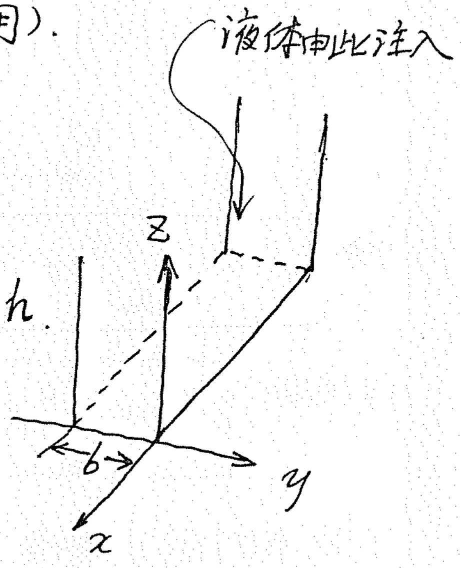
即.得到的是 Poiseulle 流动的解.

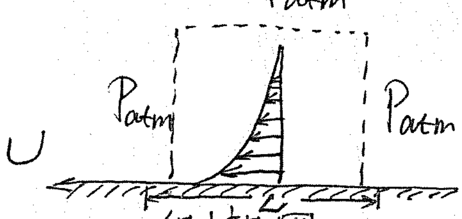
三. 油漆刷问题 (Couette 类型流动应用).



简化模型

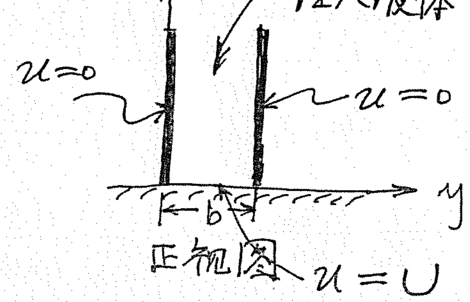
请估计漆面厚度 h.





侧视图

(应用相对运动原理).



正视图

注意 x 方向的压力分布，可认为 $\frac{dp}{dx}\cong 0$，因此 x 方向 N-S 方程 (8.2.1) 写成:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0 \qquad (8.3.1)$$

由于 $L\gg b$，$\Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x^2}\ll\frac{\partial^2}{\partial y^2}, \frac{\partial^2}{\partial z^2}$，即 (8.3.1)

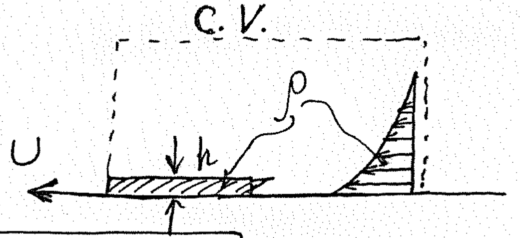
$$\Rightarrow \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0 \qquad (8.3.2)$$

边界条件为:

$$\begin{cases} u(y=0)=0, & u(y=b)=0. \\ u(z=0)=U, & u(z\to\infty)=0. \end{cases} \qquad (8.3.3)$$

质量流量:

$$\dot{m}=\rho\int_0^\infty dz\int_0^b dy\ u(y,z)=\rho hbU \qquad (8.3.4)$$



$$\Rightarrow \boxed{h=\frac{1}{b}\int_0^\infty dz\int_0^b dy\frac{u}{U}} \qquad (8.3.5)$$

作用力:

$$\boxed{F=\int_0^L dx\int_0^b \mu\frac{\partial u}{\partial z}dy} \qquad (8.3.6)$$

下面，我们用分离变量法求解: (8.3.2)

令 $u=\sum_n A_n Y_n(y)Z_n(z)$，$u_n=Y_nZ_n$

则:

$$Z_n\frac{d^2Y_n}{dy^2}+Y_n\frac{d^2Z_n}{dz^2}=0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{Y_n}\frac{d^2Y_n}{dy^2}=-\frac{1}{Z_n}\frac{d^2Z_n}{dz^2}=-\lambda_n^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{d^2Y_n}{dy^2} + \lambda_n^2 Y_n = 0 & (8.3.7) \\ \dfrac{d^2Z_n}{dz^2} - \lambda_n^2 Z_n = 0 & (8.3.8) \end{cases}$$

$(8.3.7) \Rightarrow Y_n = a_n \cos\lambda_n y + b_n \sin\lambda_n y$

$u|_{y=0} = 0 \Rightarrow a_n = 0$

$u|_{y=b} = 0 \Rightarrow \lambda_n = \frac{n\pi}{b}$

$(8.3.8) \Rightarrow Z_n = c_n e^{\lambda_n z} + d_n e^{-\lambda_n z}$

$u|_{z\to\infty} = \text{finite} \Rightarrow c_n = 0$

$\therefore Z_n = d_n e^{-\lambda_n z} = d_n e^{-\frac{n\pi}{b} z}$

因此，$u(y,z) = \sum_n A_n \sin\frac{n\pi}{b} y e^{-\frac{n\pi}{b} z}$ $\quad (8.3.9)$

$u(y, z=0) = U = \sum_n A_n \sin\frac{n\pi}{b} y$

$$\Rightarrow \int_0^b U \sin\frac{m\pi}{b} y\, dy = \sum_n A_n \int_0^b \sin\frac{n\pi}{b} y \sin\frac{m\pi}{b} y\, dy$$

$$\Rightarrow \underbrace{-\frac{Ub}{m\pi}\cos\frac{m\pi}{b} y\Big|_0^b}_{-\frac{Ub}{m\pi}\cdot\begin{cases}0, & m\text{为偶数,}\\ -2, & m\text{为奇数.}\end{cases}} = \sum_n A_n \begin{cases} 0, & \text{若 } m \neq n \\ \frac{b}{2}, & \text{若 } m = n \end{cases} = \frac{b}{2}\sum_n A_n \delta_{mn} = \frac{b}{2} A_m$$

$$\Rightarrow A_m = \begin{cases} 0, & m\text{为偶数;} \\ \dfrac{4U}{m\pi}, & m\text{为奇数.} \end{cases} \quad (8.3.10)$$

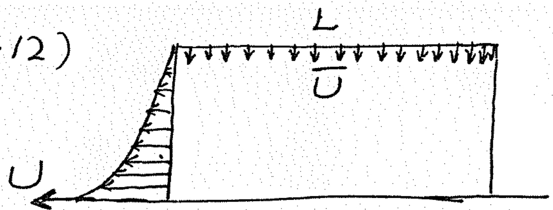
$$\therefore u(y,z) = \sum_{n=\text{奇数}} \frac{4U}{n\pi} \sin\frac{n\pi}{b} y e^{-\frac{n\pi}{b} z} \quad (8.3.11)$$

$$\therefore h = \frac{1}{b}\int_0^b dy \int_0^\infty \frac{u}{U} dz = \frac{1}{b}\int_0^b dy \int_0^\infty \sum_{n=\text{奇数}} \frac{4}{n\pi} \sin\frac{n\pi}{b} y e^{-\frac{n\pi}{b} z} dz$$

$$= \frac{1}{b}\sum_{n=\text{奇数}} \frac{4}{n\pi}\left(-\cos\frac{n\pi}{b} y\right)\Big|_0^b \frac{b}{n\pi}\cdot\left(-\frac{b}{n\pi}\right) e^{-\frac{n\pi}{b} z}\Big|_0^\infty$$

北京大学工学院

即. $h \cong 0.29\, b$. (8·3·12)



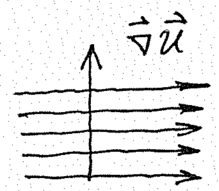
另外, $\overline{U} L b \cong 0.29 U b^2$

$\Rightarrow \overline{U} \sim U\frac{b}{L}$, 若 $L \gg b$, 则可推断 $\overline{U} \ll U$. 可忽略.

四. 粘性流体内流中的低雷诺数流动 —— 润滑理论 (Lubrication Theory).

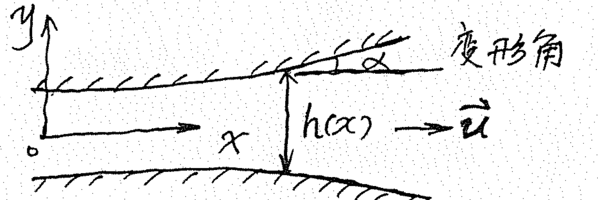
我们考察如下流动模型:

①



$\vec{u} \perp \nabla\vec{u} \Rightarrow (\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u} = \vec{0}$

②



对于 α 较小情况: $\alpha = \dfrac{dh}{dx}$.

x方向动量方程给出:

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = -\mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right) \qquad (8.4.1)$$

$$Re = \frac{[惯性力]}{[粘性力]} \overset{}{\underset{定常}{=\!=}} \frac{\rho\left[O\left(u\frac{\partial u}{\partial x}\right) + O\left(v\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]}{\mu\, O\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)}$$

由连续性条件: $u(x)\, h(x) = const$

$$\Rightarrow h\frac{du}{dx} = -u\frac{dh(x)}{dx} \Rightarrow \frac{du}{dx} \cong -\frac{u}{h}\alpha \sim -\frac{\overline{u}}{h}\alpha$$

x方向无特征长度,故需间接估计量级

$$\frac{\partial u}{\partial y} \sim \frac{\overline{u}}{h}$$ —特征长度.

连续条件: $\dfrac{\partial v}{\partial y} = -\dfrac{\partial u}{\partial x} \Rightarrow v = -\displaystyle\int_0^y \frac{\partial u}{\partial x}dy \sim -\underbrace{\int_0^y O\left(\frac{\overline{u}}{h}\alpha\right)dy}_{O(\alpha\overline{u})}$

$\Rightarrow \bar{v} \sim \alpha \bar{u}$，即 $\bar{v} \ll \bar{u}$

因此：$$Re = \frac{\rho\left[O\left(\bar{u}\frac{\bar{u}}{h}\alpha\right) + O\left(\alpha \bar{u}\frac{\bar{u}}{h}\right)\right]}{\mu\, O\left(\frac{\bar{u}}{h^2}\right)}$$

$$\Rightarrow Re_{\alpha h} = \frac{\bar{u}h}{\nu}\alpha \qquad (8.4.2)$$

若 $Re_h = \frac{\bar{u}h}{\nu} = 500$，则 $Re_{\alpha h} = \alpha Re_h \overset{\alpha=10^{-4}}{=\!=\!=} \frac{1}{20}$

即 $Re_{\alpha h} \ll 1 \Rightarrow$ 可忽略惯性力作用。

此类流动的控制方程为：

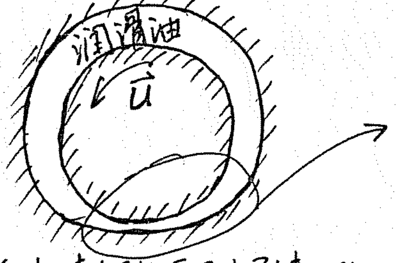
$$\frac{dp}{dx} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \qquad (8.4.3)$$

stokes 方程.

v较u而忽略

同样，我们忽略体力：$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \Rightarrow p = p(x)$ (8.4.4)

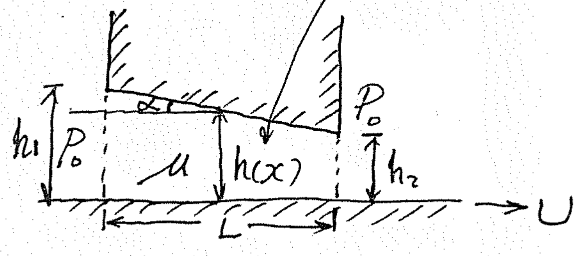
此类流体力学模型的一个重要工程应用就是轴承中的润滑油的运动。相应的理论称为润滑理论.



轴承中轴的运动引起的润滑油动动.

模型

$\Longrightarrow$



楔形狭缝中的润滑流动

模型流动的边界条件：

$$\begin{cases} u(y=0) = U \\ u(y=h(x)) = 0 \end{cases} \qquad (8.4.5)$$

以及：
$$\begin{cases} x=0 \text{ 时}, & p=p_0 \\ x=L \text{ 时}, & p=p_0 \end{cases} \qquad (8.4.6)$$

要注意的是，与两平板间流动不同，润滑油中的流向压力梯度 $\frac{dp}{dx}$ 不是常数（因为 $u=u(x,y)$），而是随 x 变化的。

我们对（8.4.3）对 y 积分两次，并应用速度边界条件（8.4.5）得到：

$$\boxed{u(x,y) = -\frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx}\,y\,[h(x)-y] + U\frac{h(x)-y}{h(x)}} \qquad (8.4.7)$$

由连续性条件：

$$Q = \int_0^{h(x)} u(x,y)\,dy = const = -\frac{h^3}{12\mu}\frac{dp}{dx} + \frac{Uh}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dp}{dx} = 12\mu\left[\frac{U}{2h^2} - \frac{Q}{h^3}\right] \qquad (8.4.8)$$

令 $\frac{dp}{dx}=0$ 时，$h=h^*$，则有 $Q=\frac{1}{2}Uh^*$，代入（8.4.8）

$$\Rightarrow \quad \frac{dp}{dx} = 6\mu U\left(\frac{1}{h^2} - \frac{h^*}{h^3}\right) \qquad (8.4.9)$$

考虑到 $\frac{dh}{dx} = -\alpha$，代入（8.4.9）有：

$$\frac{dp}{dh} = -\frac{6\mu U}{\alpha}\left(\frac{1}{h^2} - \frac{h^*}{h^3}\right)$$

积分有：$$p = \frac{6\mu U}{\alpha}\left(\frac{1}{h} - \frac{h^*}{2h^2}\right) + C \qquad (8.4.10)$$

利用压力边界条件：

$$x=0,\quad h=h_1,\quad p=p_0$$
$$x=L,\quad h=h_2,\quad p=p_0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} p_0 = \dfrac{6\mu U}{\alpha}\left(\dfrac{1}{h_1} - \dfrac{h^*}{2h_1^2}\right) + C \\ p_0 = \dfrac{6\mu U}{\alpha}\left(\dfrac{1}{h_2} - \dfrac{h^*}{2h_2^2}\right) + C \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C = P_0 - \dfrac{6\mu U}{\alpha}\dfrac{1}{h_1+h_2} \\ h^* = \dfrac{2h_1h_2}{h_1+h_2} \end{cases} \qquad (8.4.11)$$

代入(8.4.10)有:

$$\boxed{p(x) = P_0 - \frac{6\mu U}{\alpha}\frac{(h-h_1)(h-h_2)}{h^2(h_1+h_2)}} \qquad (8.4.12)$$

单位宽度壁面所受法向合力:

$$F = \int_0^L (p-P_0)\,dx$$

$$= \frac{6\mu U}{\alpha^2}\left[\ln\left(\frac{h_1}{h_2}\right) - 2\frac{h_1-h_2}{h_1+h_2}\right] \qquad (8.4.13)$$