

# 北京大学工学院

## 第九章: 不可压缩理想流体平面势流问题

本章我们将着重讨论: ① 速度环量及其守恒定理; ② 速度势与流函数; ③ 平面势流基本解及其叠加; ④ 儒可夫斯基升力定理; ⑤ 平面势流的复势; 等。

### 一. 理想(无粘)流体的无旋运动.

(一) 速度环量: (无任何限制条件)

沿流场中任意封闭曲线 $L$ 的速度线积分, 用 $\Gamma$ 表示. (规定逆时针方向为正)

$$\Gamma = \oint_L \vec{v} \cdot d\vec{r} = \oint_L u dx + v dy + w dz$$

(6.1.1)

由 Stokes 定理: ( $A$  为张于 $L$ 上的物质曲面)

$$\Gamma = \oint_L \vec{v} \cdot d\vec{r} = \int_A (\nabla \times \vec{v}) \cdot d\vec{A} = \int_A (\vec{\omega} \cdot \vec{n}) dA = I \quad (6.1.2)$$

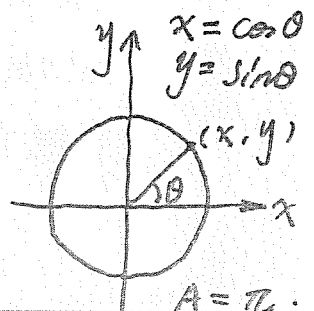
即: 沿封闭曲线 $L$ 的速度环量 = 曲线张成的曲面 $A$ 上的涡通量。  
因此, 可以通过速度环量来判断流动是否有旋。(涡管强度)

例题: = 旋流场:  $u = 2y, v = -3x$ . 求该流场中沿圆周线

$x^2 + y^2 = 1$  的速度环量.

$$\begin{aligned} \Gamma &= \oint_L u dx + v dy = \int_0^{2\pi} 2 \sin\theta (-\sin\theta) d\theta - \int_0^{2\pi} 3 \cos\theta (\cos\theta) d\theta \\ &= -5\pi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Gamma &= I = \int_A \omega_z dA = \int_A \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dA \\ &= (-3 - 2)A = -5\pi \end{aligned}$$



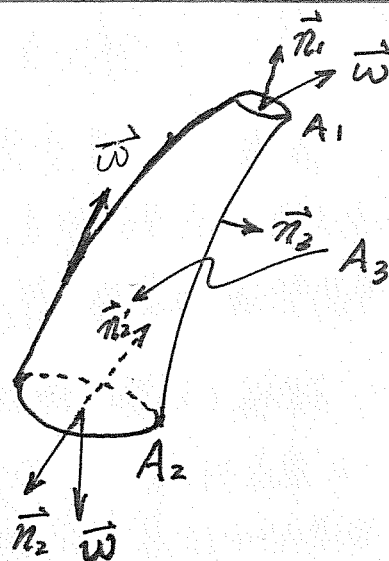
# 北京大学工学院

(=) 涡管强度守恒定理: (无限制条件)

$$I = \int_A \vec{\omega} \cdot d\vec{A} = \int_{A_1 + A_2 + A_3} \vec{\omega} \cdot d\vec{A}$$

$$= \int_V \underbrace{\nabla \cdot \vec{\omega}}_{\text{涡量场是无散场: } \nabla \cdot \vec{\omega} \equiv 0} d\tau \equiv 0$$

同时  $\vec{\omega} \cdot d\vec{A}_3 = 0$



$$\Rightarrow I = \int_{A_1} \vec{\omega} \cdot d\vec{A}_1 + \int_{A_2} \vec{\omega} \cdot d\vec{A}_2 = \int_{A_1} (\vec{\omega} \cdot \vec{n}_1) dA + \int_{A_2} (\vec{\omega} \cdot \vec{n}_2) dA$$

$$= \int_{A_1} (\vec{\omega} \cdot \vec{n}_1) dA - \int_{A_2} (\vec{\omega} \cdot \vec{n}'_2) dA = 0$$

$$\Rightarrow \int_{A_1} (\vec{\omega} \cdot \vec{n}_1) dA = \int_{A_2} (\vec{\omega} \cdot \vec{n}_2) dA \quad (6.1.3)$$

$A_1$  和  $A_2$  为沿涡管任意选取截面  $\Rightarrow$  同一涡管各截面涡通量相等, 也称涡管强度守恒.

结论:

- ① 同一涡管, 截面积越小的地方, 涡量越大 (流体旋转角速度越大).
- ② 涡管截面不能收缩为零, 即涡管不能在流体之中产生或终止, 只能在流体中形成环涡 (涡环), 或始于、终于边界, 或伸展至无穷远处.

(三) Kelvin's 速度环量定理.

① 理想流体 满足欧拉方程:

$$\frac{D\vec{u}}{Dt} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = \vec{f}_b - \frac{1}{\rho} \nabla p \quad (6.1.4)$$

# 北京大学工学院

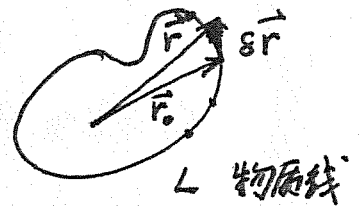
若: ② 流体正压:  $\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p = \vec{\nabla} P \leftarrow$  压强函数

③ 体力有势:  $\vec{f}_b = -\vec{\nabla} \pi \leftarrow$  体力势函数

则欧拉方程可写成:  $\frac{D\vec{u}}{Dt} = -\vec{\nabla} (P + \pi) \quad (6.1.5)$

考虑到  $\frac{D\Gamma}{Dt} = \frac{D}{Dt} \oint_L \vec{u} \cdot \delta\vec{r} = \oint_L \frac{D}{Dt} (\vec{u} \cdot \delta\vec{r})$

$$\frac{D}{Dt} (\vec{u} \cdot \delta\vec{r}) = \underbrace{\frac{D\vec{u}}{Dt} \cdot \delta\vec{r}}_{\text{流体质点速度的随体变化}} + \underbrace{\vec{u} \cdot \frac{D\delta\vec{r}}{Dt}}_{\text{流体线元的变形运动}}$$



由于  $\frac{D}{Dt} \delta\vec{r} = \frac{D}{Dt} (\vec{r} - \vec{r}_0) = \vec{u} - \vec{u}_0 = \delta\vec{u}$

$$\therefore \frac{D}{Dt} (\vec{u} \cdot \delta\vec{r}) = \frac{D\vec{u}}{Dt} \cdot \delta\vec{r} + \vec{u} \cdot \delta\vec{u} = \frac{D\vec{u}}{Dt} \cdot \delta\vec{r} + \delta \left( \frac{|\vec{u}|^2}{2} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{D\Gamma}{Dt} = \oint_L \frac{D\vec{u}}{Dt} \cdot \delta\vec{r} + \oint_L \delta \left( \frac{|\vec{u}|^2}{2} \right) = \oint_L \frac{D\vec{u}}{Dt} \cdot \delta\vec{r}$$

$$= - \oint_L \vec{\nabla} (P + \pi) \cdot \delta\vec{r} = - \oint_L d\pi + dP = 0$$

$$\text{或} = - \int_A [(\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} (P + \pi))] \cdot d\vec{A} = 0 \quad (6.1.6)$$

结论: ① 在体力有势、流体正压的情况下, 理想流体沿任一条封闭流体的速度环量不随时间变化, 称为开尔文速度环量定理。

② 亥姆霍兹 (Helmholtz) 涡管强度保持性定理:

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = 0 \Rightarrow \frac{D\Gamma}{Dt} = 0 \quad (6.1.7)$$

③ 拉格朗日定理: 在体力有势、流体正压的条件下, 理想流体若在某时刻的某一部分(系统)无旋, 则在这以前和以后的时间该部分流体也是无旋的。也就是说旋涡(或涡旋)不会自行产生和消亡。

# 北京大学工学院

## 二. 速度势和流函数.

### (一) 速度势函数.

由场论知识可知: 若流动无旋, 即  $\vec{\omega} = \nabla \times \vec{u} = 0$ .

则存在势函数  $\phi$ , 使得:  $\vec{u} = \nabla \phi$ , 即速度场有势.

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (6.2.1)$$

在柱坐标系下:  $\nabla = \frac{\partial}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_z$

$$\begin{aligned} \text{等势线: } d\phi = 0 &= \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \phi}{\partial z} dz \\ &= u dx + v dy + w dz \\ &= \vec{u} \cdot d\vec{r} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$  等势线处处与速度矢量垂直.

速度等势线为  $\phi = C$  (常数) 的一簇线.

### (二) 流函数.

对二维平面流动, 若流体不可压缩, 则连续性方程可写为:

$$\nabla \cdot \vec{u} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (6.2.2)$$

因此可寻找一标量函数  $\psi(x, y, t)$ , 使得:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (6.2.3)$$

并使不可压条件 (6.2.2) 自然满足.

$\psi(x, y, t)$  称为流函数.

$$\text{在极坐标下: } \nabla \cdot \vec{u} = \frac{\partial}{\partial r} (r u_r) + \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} = 0 \quad (6.2.4)$$

$$u_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad u_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r} \quad (6.2.5)$$

# 北京 大学 工学院

流函数等值线:

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = -v dx + u dy = 0$$

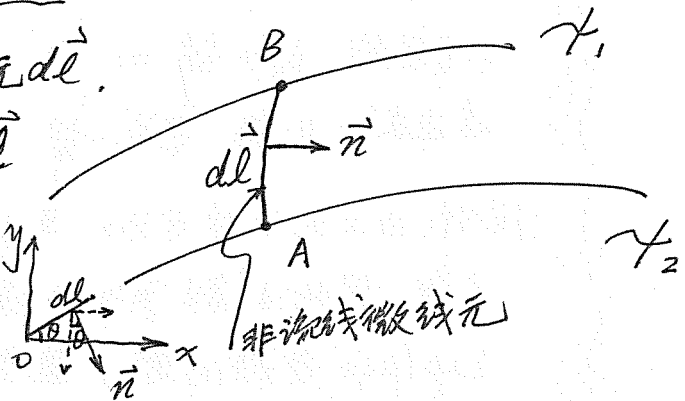
即:  $\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v}$  (6.2.6)

上式为流线方程.  $\Rightarrow$  等流函数线即是流线.

进一步  $\Rightarrow$  流线与等势线处处正交.

在任一非流线的曲线上取微元  $d\vec{l}$ .

$\vec{n}$  为微元法向单位矢量, 过微元  $d\vec{l}$  (设垂直纸面方向厚度为1) 的体积流量:



$$dQ = \vec{u} \cdot d\vec{l}$$

$$= (\vec{u} \cdot \vec{n}) dl$$

$$= \left( u \frac{dy}{dl} - v \frac{dx}{dl} \right) dl$$

$$= u dy - v dx = \frac{\partial \psi}{\partial y} dy + \frac{\partial \psi}{\partial x} dx = d\psi$$

$$\Rightarrow Q = \int_A^B dQ = \int_{\psi_A}^{\psi_B} d\psi = \psi_B - \psi_A \quad (6.2.7)$$

涡量—流函数方程:

$$\omega = \omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right)$$

$$\Rightarrow \nabla^2 \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\omega \quad (6.2.8)$$

(6.2.8) 称为不可压缩流体流动的涡量—流函数方程.

# 北京 大学 工学院

## 三. 平面势流与基本解.

①理想(无粘)、②不可压、③平面(=二维)流体定常、④无旋运动的数学问题提法:

无旋:  $\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \Rightarrow$  有势:  $u = \frac{\partial \phi}{\partial x}, v = \frac{\partial \phi}{\partial y}$ .

若满足不可压: 则有  $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \nabla^2 \phi = 0$  (6.3.1)

不可压缩:  $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \Rightarrow u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$

若无旋: 则有  $\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \Rightarrow -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 \Rightarrow \nabla^2 \psi = 0$  (6.3.2)

说明: 由上述条件可知, 平面势流中的速度势和流函数都是调和函数, 因此求解平面势流问题归结到在给定边界条件下求解 Laplace 方程问题。通常我们用叠加法来确定平面势流的基本解。

(一) 均匀来流问题:

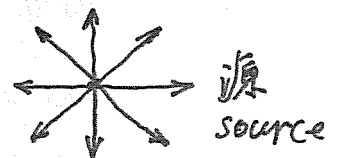
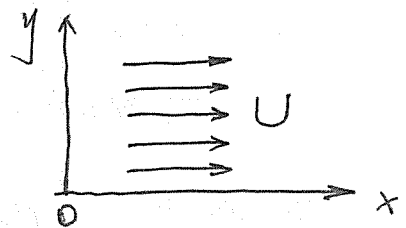
$u = U, v = 0$

因此,  $u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = U, v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0$

$\Rightarrow \psi = Uy + C_\psi$  (6.3.3)

$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = U, v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0$

$\Rightarrow \phi = Ux + C_\phi$  (6.3.4)



(二) 点源与点汇

点源: 流体由一点沿径向离开

点汇: 流体由各方向沿径向汇聚.

流量  $Q$  称为点源 ( $Q > 0$ ) 或点汇 ( $Q < 0$ ) 的强度.



# 北京大学工学院

我们采用极坐标:  $u_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{Q}{2\pi r}$ ,  $u_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = 0$

$$\Rightarrow \phi = \frac{Q}{2\pi} \ln r + C_\phi \quad (6.3.5)$$

$\Rightarrow$  等势线为  $r = \text{常数}$  的一簇线 (同心圆).

同样:  $u_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \frac{Q}{2\pi r}$ ,  $u_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = 0$

$$\Rightarrow \psi = \frac{Q}{2\pi} \theta + C_\psi \quad (6.3.6)$$

$\Rightarrow$  等流函数线 (流线) 为  $\theta = \text{常数}$  的一簇线.

(三) 点涡: 一根无限长的直涡线, 在与其垂直的平面内诱导的流场称为点涡场, 又称势涡。若涡线的涡量不变, 沿任意以  $r$  为半径的圆周的环量  $\Gamma = 2\pi r u_\theta = \text{const.}$ , 其中  $\Gamma$  为涡线的强度.

$$u_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r}$$

$$u_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = 0, \quad u_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = \frac{\Gamma}{2\pi r} \Rightarrow \phi = \frac{\Gamma}{2\pi} \theta \quad (6.3.7)$$

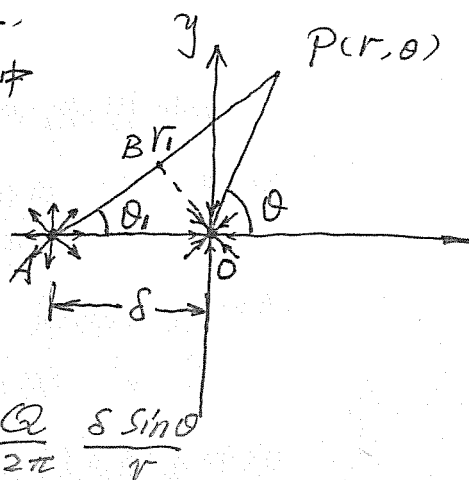
$$\text{又 } u_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = 0, \quad u_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{\Gamma}{2\pi r} \Rightarrow \psi = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln r \quad (6.3.8)$$

(四) 偶极子: 在  $O(0,0)$  点有强度为  $Q$  的点汇, 在  $(-s, 0)$  点有强度相同的点源, 因而流场中任一点  $P(r, \theta)$  的流函数:

$$\psi(r, \theta) = -\frac{Q}{2\pi} (\theta - \theta_1)$$

$$\overline{OB} = s \sin \theta_1, \quad \theta - \theta_1 = \frac{s \sin \theta_1}{r}$$

$$\Rightarrow \psi(r, \theta) = -\lim_{\substack{s \rightarrow 0 \\ \theta_1 \rightarrow 0}} \frac{Q}{2\pi} \frac{s \sin \theta_1}{r} = -\frac{Q}{2\pi} \frac{s \sin \theta}{r}$$



我们称  $M = Qs = \text{常数}$  为偶极矩.

# 北京 大学 工学院

$$\Rightarrow \psi(r, \theta) = -\frac{M}{2\pi} \frac{\sin\theta}{r} \quad (6.3.9)$$

而势函数  $\phi = \frac{M}{2\pi} \frac{1}{\delta} \ln\left(\frac{r_1}{r}\right)$

$$\Rightarrow \phi = \lim_{\substack{\delta \rightarrow 0 \\ r_1 \rightarrow r}} \frac{M}{2\pi} \frac{1}{\delta} \ln\left(1 + \frac{\delta \cos\theta}{r}\right)$$

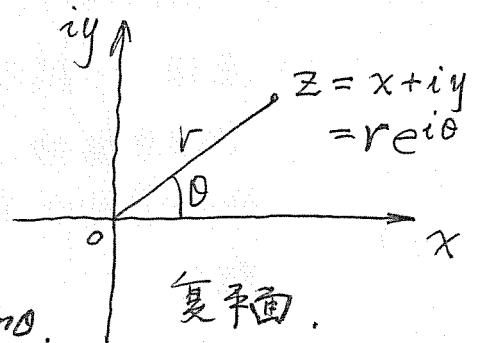
$$\Rightarrow \phi = \frac{M}{2\pi} \frac{\cos\theta}{r} \quad (6.3.10)$$

## 四. 平面势流的复势解法.

### (一) 复势和复速度.

我们用复变量  $z = x + iy$  表示复平面流场中的一点, 其矢径表示法为:  $z = re^{i\theta} = r\cos\theta + ir\sin\theta$ .

其中  $i = \sqrt{-1}$  为虚数单位,  $r$  为矢径  $\vec{r}$  的模,  $\theta$  为幅角.



复函数:  $F(z) = F(x + iy) = f(x, y) + ig(x, y) \quad (6.4.1)$

例:  $F(z) = z^2 = (x + iy)^2 = \underbrace{(x^2 - y^2)}_{f(x, y)} + i \underbrace{(2xy)}_{g(x, y)}$

在平面势流中, 调和函数  $\phi$  和  $\psi$  满足如下 Cauchy-Riemann

条件:  $\frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial\phi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x} \quad (6.4.2)$

因此可以组成一个解析函数:

$$F(z) = \phi(z) + i\psi(z) \quad (6.4.3)$$

称为平面无旋运动的复势.



# 北京 大学 工学院

由于解析函数在一点的导数与方向无关, 因而有:

$$\begin{aligned} W(z) &= \frac{dF}{dz} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} \\ &= \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} - i \frac{\partial \phi}{\partial y} = u - iv \quad (6.4.4) \end{aligned}$$

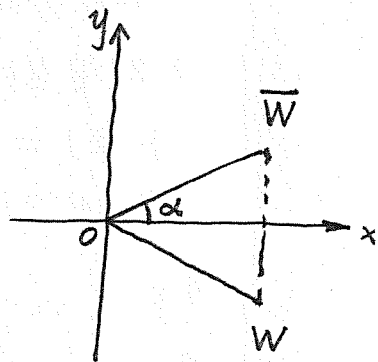
$W(z)$  称为复速度.

$\overline{W(z)} = u + iv$  称为共轭复速度.

$$\overline{W(z)} = |\overline{W}| e^{i\alpha} = \sqrt{u^2 + v^2} e^{i\alpha}$$

$$W(z) = \sqrt{u^2 + v^2} e^{-i\alpha} \quad (6.4.5)$$

其中  $\alpha = \arctan\left(\frac{v}{u}\right)$  为速度方向与  $x$  轴夹角.



由 (6.4.4) 有:

$$u = \operatorname{Re} \left\{ \frac{dF(z)}{dz} \right\} = \operatorname{Re} \{ W(z) \} \quad (6.4.6)$$

$$v = -\operatorname{Im} \left\{ \frac{dF(z)}{dz} \right\} = -\operatorname{Im} \{ W(z) \}$$

若对复势导数 (即复速度) 沿 <sup>流体质点</sup> 封闭曲线  $L$  积分:

$$\oint_L \frac{dF(z)}{dz} dz = \oint_L dF(z) = \oint_L d\phi + i \oint_L d\psi$$

$$\text{速度环量 } \Gamma = \oint_L \vec{u} \cdot d\vec{r} = \oint_L \vec{\nabla} \phi \cdot d\vec{r} = \oint_L d\phi$$

$$\text{流量 } Q = \oint_L dQ = \oint_L d\psi$$

因而: 
$$\boxed{\oint_L W(z) dz = \oint_L \frac{dF(z)}{dz} dz = \Gamma + iQ} \quad (6.4.7)$$

# 北京大学工学院

讨论: ①由复速度的定义(6.4.4)可以看出, 复势  $F(z)$  可以差一任意复常数而不影响流体流动.

②  $F(z)$  为常数相当于  $\phi(x, y)$  和  $\psi(x, y)$  均为常数, 而它们又分别表示等势线及流线, 且相互正交.

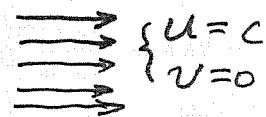
(二) 平面势流基本解:

(1) 均匀直线流

$$F(z) = cz \quad (6.4.8)$$

$$\text{则: } W(z) = \frac{dF(z)}{dz} = u - iv = c$$

①若  $c = \text{实常数}$ , 则  $u = c, v = 0$

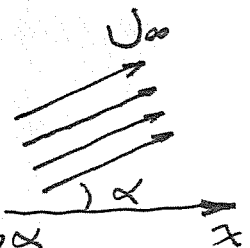


②若  $c = \text{复常数}$ , 则  $c = U_{\infty} e^{-i\alpha}$

$$\text{那么: } u - iv = U_{\infty} \cos\alpha - i U_{\infty} \sin\alpha$$

$$\Rightarrow u = U_{\infty} \cos\alpha, v = U_{\infty} \sin\alpha$$

为一均匀直线流, 速度大小  $U_{\infty}$ , 方向与  $x$  轴夹角为  $\alpha$ .



(2) 点源和点汇

$$F(z) = A \ln z, \quad (A \text{ 为实数}) \quad (6.4.9)$$

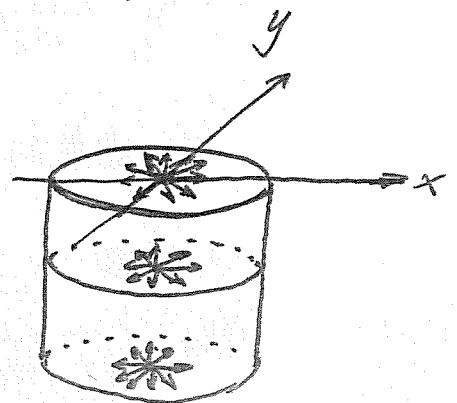
$$F(z) = A \ln r e^{i\theta} = A \ln r + i A \theta$$

$$\therefore \phi = A \ln r, \quad \psi = A \theta$$

$$\begin{cases} v_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{A}{r} \\ v_{\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = 0 \end{cases}$$

由(6.4.7):

$$\Gamma = \operatorname{Re} \left\{ \oint_L W(z) dz \right\} = \operatorname{Re} \left\{ \oint_L \frac{dF(z)}{dz} dz \right\} = \operatorname{Re} \left\{ \oint_L \frac{A}{z} dz \right\} = 0$$



# 北京大学工学院

$$Q = \text{Im} \left\{ \oint_L \frac{A}{z} dz \right\} = 2\pi A \Rightarrow A = \frac{Q}{2\pi}$$

$Q$  为体积流量,  $Q > 0 \Rightarrow$  源,  $Q < 0 \Rightarrow$  汇.

因此, 点源(汇)的流动复势为:

$$F(z) = \frac{Q}{2\pi} \ln z \quad (\text{位于原点}) \quad (6.4.10)$$

若点源(汇)位于  $z = z_0$  处, 则复势为

$$F(z) = \frac{Q}{2\pi} \ln(z - z_0) \quad (6.4.11)$$

(3) 点涡:

考察复势:  $F(z) = Ai \ln z$ , 其中  $A$  为实常数.

$$\begin{aligned} \text{则有: } F(z) &= Ai \ln(re^{i\theta}) = Ai(\ln r + i\theta) \\ &= -A\theta + iA \ln r \end{aligned}$$

$$\therefore \phi = -A\theta, \quad \psi = A \ln r$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = 0 \\ v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = -\frac{A}{r} \end{cases}$$

$$Q = \text{Im} \left\{ \oint_L \frac{dF(z)}{dz} dz \right\} = \text{Im} \left\{ \oint_L \frac{Ai}{z} dz \right\} = 0$$

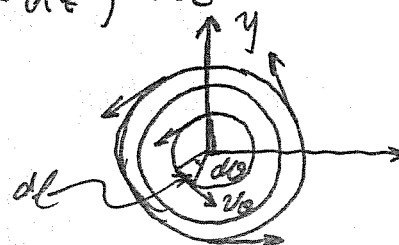
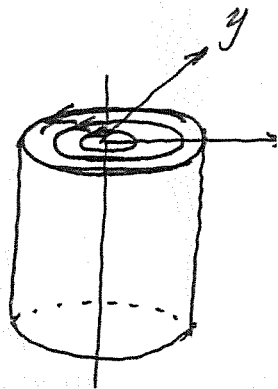
$$\Gamma = \text{Re} \left\{ \oint_L \frac{Ai}{z} dz \right\} = -2\pi A$$

$$\Rightarrow A = -\frac{\Gamma}{2\pi}$$

$$\text{因此: } F(z) = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z \quad (6.4.12)$$

$\Gamma > 0$  时  $\Rightarrow$  逆时针流动,  $\Gamma < 0$  时  $\Rightarrow$  顺时针流动.

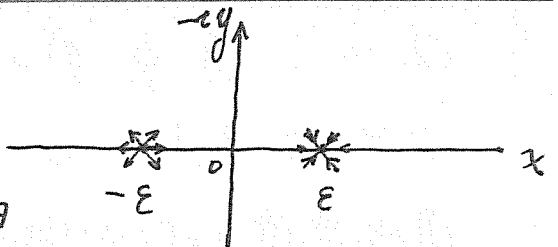
$$\text{检验: } \Gamma = \oint_L \vec{u} \cdot d\vec{r} = \oint_L v_\theta dl = \oint_L \frac{\Gamma}{2\pi r} r d\theta = \Gamma$$



# 北京大学工学院

## (4) 偶极子: (Doublet-Dipole)

在实轴上  $(-\varepsilon, 0)$  处放一流量为  $Q$  的点源, 同时在  $(\varepsilon, 0)$  处放一流量为  $(-Q)$  的点汇。那么, 在流场内任意一点的复势为:



$$F(z) = \frac{Q}{2\pi} \ln(z + \varepsilon) - \frac{Q}{2\pi} \ln(z - \varepsilon)$$

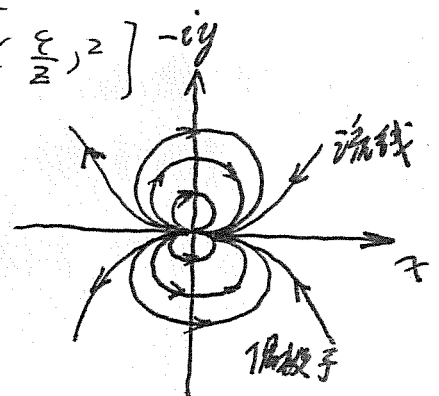
$$= \frac{Q}{2\pi} \ln \left[ \frac{1 + \frac{\varepsilon}{z}}{1 - \frac{\varepsilon}{z}} \right]$$

注意到  $|\frac{\varepsilon}{z}| \leq 1, \Rightarrow (1 - \frac{\varepsilon}{z})^{-1} = 1 + \frac{\varepsilon}{z} + O(\frac{\varepsilon}{z})^2$

$$\therefore F(z) \cong \frac{Q}{2\pi} \ln \left[ \left(1 + \frac{\varepsilon}{z}\right) \left(1 + \frac{\varepsilon}{z}\right) \right]$$

$$\cong \frac{Q}{2\pi} \ln \left(1 + 2\frac{\varepsilon}{z}\right)$$

$$\cong \frac{Q}{2\pi} \cdot 2\frac{\varepsilon}{z} = \frac{2Q\varepsilon}{2\pi} \frac{1}{z}$$



令  $\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ Q \rightarrow \infty}} 2Q\varepsilon = M$  则  $F(z) = \frac{M}{2\pi} \cdot \frac{1}{z}$  (6.4.13)

这里  $M$  称为偶极矩, 方向由汇指向源。(这时偶极子位于原点)

若偶极子放于  $z = z_0$  处, 则其复势为  $F(z) = \frac{M}{2\pi} \frac{1}{z - z_0}$  (6.4.14)  
其方向与  $x$  轴平行。

## (5) 角域流:

$$F(z) = Az^n, \quad n \geq \frac{1}{2}, \quad n \neq 1, \quad \text{且 } A \text{ 为实数}$$

$$W(z) = \frac{dF}{dz} = Anz^{n-1} = Anr^{n-1}e^{i(n-1)\theta}$$

其中  $z = re^{i\theta}$

$$\text{令 } \vec{u} = (u, v)$$

(6.4.15)

# 北京 大学 工 学 院

$$\begin{cases} u = v_r \cos\theta - v_\theta \sin\theta \\ v = v_r \sin\theta + v_\theta \cos\theta \end{cases} \quad (6.4.16)$$

考虑到  $W(z) = u - iv$  (6.4.17)

将 (6.4.16) 代入上式有:

$$\begin{aligned} W(z) &= v_r \cos\theta - v_\theta \sin\theta - i(v_r \sin\theta + v_\theta \cos\theta) \\ &= v_r (\cos\theta - i \sin\theta) - i v_\theta (\cos\theta - i \sin\theta) \\ &= (v_r - i v_\theta) e^{-i\theta} \end{aligned} \quad (6.4.18)$$

比较 (6.4.17) 和 (6.4.18), 我们有:

$$W(z) = u - iv = (v_r - i v_\theta) e^{-i\theta} \quad (6.4.19)$$

由 (6.4.15) 可得:

$$\begin{aligned} W(z) &= A n r^{n-1} e^{in\theta} e^{-i\theta} \\ &= \left[ \underbrace{(n A r^{n-1} \cos n\theta)}_{v_r} + i \underbrace{(n A r^{n-1} \sin n\theta)}_{-v_\theta} \right] e^{-i\theta} \end{aligned} \quad (6.4.20)$$

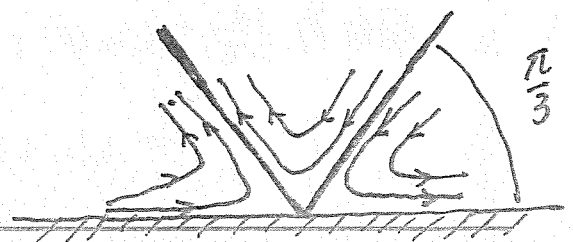
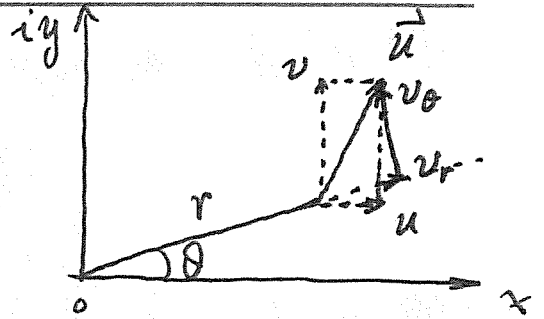
$$F(z) = A z^n = A r^n e^{in\theta} = \underbrace{A r^n \cos n\theta}_\phi + i \underbrace{A r^n \sin n\theta}_\psi$$

$$\text{令 } \psi = A r^n \sin n\theta = 0 \quad (0 \text{ 流线})$$

$$\Rightarrow n\theta = k\pi \Rightarrow \theta = \frac{k\pi}{n} = k\Delta\theta, \text{ 其中 } \Delta\theta = \frac{\pi}{n}$$

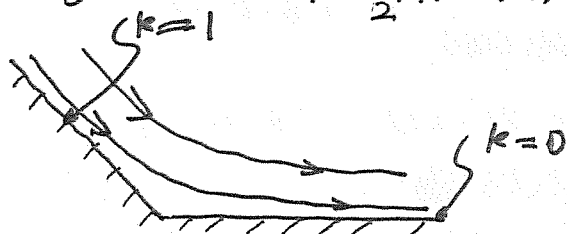
① 若  $n=3$ , 则  $\Delta\theta = \frac{\pi}{3}$ , 即:

$$\begin{cases} v_r = 3 A r^2 (-1)^k \\ v_\theta = 0 \end{cases}$$



# 北京 大学 工 学 院

②  $n = \frac{3}{2}$ , 则  $\Delta\theta = \frac{2}{3}\pi$ , 那么  $v_r = \frac{3}{2}Ar^{\frac{1}{2}}(-1)^k$

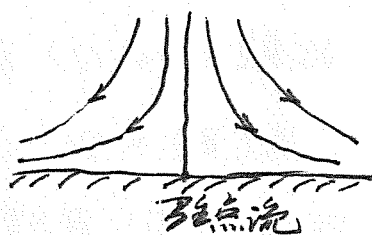


③  $n = \frac{1}{2}$ , 则  $\Delta\theta = 2\pi$ , 那么  $v_r = \frac{1}{2}Ar^{-\frac{1}{2}}(-1)^k$



④  $n < \frac{1}{2}$ ,  $\Delta\theta > 2\pi$  (无物理解)

⑤  $n = 2$ ,  $\Delta\theta = \frac{\pi}{2}$



⑥  $n = 1$ ,  $\Delta\theta = \pi$

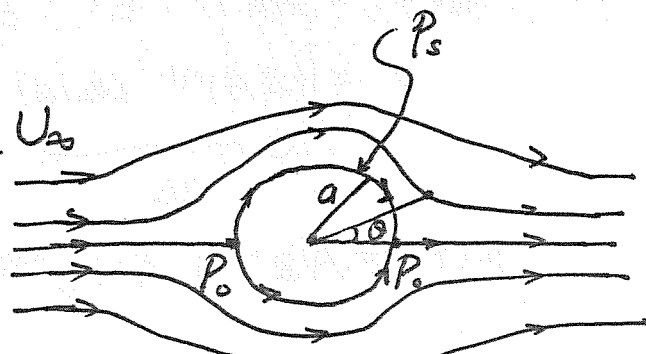


(6) 无环量圆柱绕流.

$$F(z) = U_\infty z + \frac{M}{2\pi} \frac{1}{z} \quad (6.4.21)$$

$$= U_\infty r e^{i\theta} + \frac{M}{2\pi} \frac{1}{r} e^{-i\theta}$$

$$= \underbrace{\left( U_\infty r \cos\theta + \frac{M}{2\pi r} \cos\theta \right)}_{\phi} + i \underbrace{\left( U_\infty r \sin\theta - \frac{M}{2\pi r} \sin\theta \right)}_{\psi}$$



令  $\psi = 0$  (零流线)  $\Rightarrow U_\infty r \sin\theta - \frac{M}{2\pi r} \sin\theta = 0 \Rightarrow \begin{cases} \theta = 0, \pi \\ r = \sqrt{\frac{M}{2\pi U_\infty}} = a. \end{cases}$

因而有  $\frac{M}{2\pi} = U_\infty a^2$ , 代入 (6.4.21) 得到复势:

$$F(z) = U_\infty \left( z + \frac{a^2}{z} \right), \quad |z| \geq a \quad (6.4.22)$$

# 北京 大学 工学院

$$\begin{aligned}
 W(z) &= \frac{dF(z)}{dz} = U_\infty \left(1 - \frac{a^2}{z^2}\right) = U_\infty \left(1 - \frac{a^2}{r^2} e^{-i2\theta}\right) \\
 &= U_\infty \left(e^{i\theta} - \frac{a^2}{r^2} e^{-i\theta}\right) e^{-i\theta} \\
 &= \underbrace{\left[ U_\infty \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) \cos\theta \right]}_{v_r} + i \underbrace{\left[ U_\infty \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) \sin\theta \right]}_{-v_\theta} e^{-i\theta}
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_r = U_\infty \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) \cos\theta \\ v_\theta = -U_\infty \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) \sin\theta \end{cases} \quad (6.4.23)$$

在圆柱面上:  $r = a \Rightarrow v_r = 0, v_\theta = -2U_\infty \sin\theta$   
 $(\pm a, 0)$  为两驻点.

由 Bernoulli 积分:

$$\begin{aligned}
 P_\infty + \frac{1}{2}\rho U_\infty^2 &= P_s + \frac{1}{2}\rho v_s^2 \\
 \Rightarrow C_p &= \frac{P_s - P_\infty}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2} = 1 - \frac{v_s^2}{U_\infty^2} = 1 - \frac{v_\theta^2}{U_\infty^2} = 1 - 4\sin^2\theta \quad (6.4.24)
 \end{aligned}$$

(7) 有环量圆柱绕流:

$$F(z) = U_\infty \left(z + \frac{a^2}{z}\right) - \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z \quad (6.4.25)$$

$$\begin{aligned}
 &= U_\infty \left(r + \frac{a^2}{r}\right) \cos\theta + i U_\infty \left(r - \frac{a^2}{r}\right) \sin\theta - \frac{\Gamma}{2\pi i} [\ln r + i\theta] \\
 &= \underbrace{\left[ U_\infty \left(r + \frac{a^2}{r}\right) \cos\theta - \frac{\Gamma\theta}{2\pi} \right]}_{\phi} + i \underbrace{\left[ U_\infty \left(r - \frac{a^2}{r}\right) \sin\theta + \frac{\Gamma \ln r}{2\pi} \right]}_{\psi}
 \end{aligned}$$

# 北京大学工学院

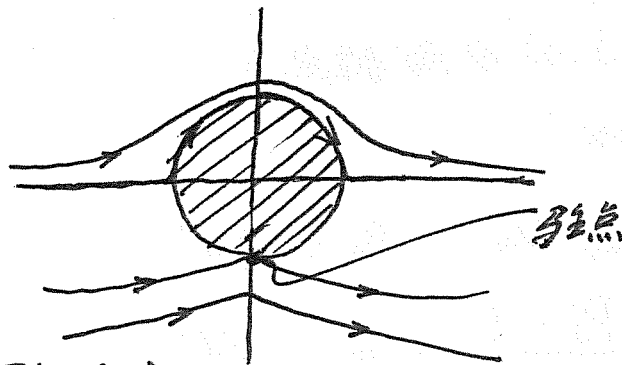
$$\begin{cases} v_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = U_\infty \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) \cos \theta \\ v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = -U_\infty \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) \sin \theta - \frac{\Gamma}{2\pi r} \end{cases} \quad (6.4.26)$$

在圆柱表面上,  $r=a$ ,  $\Rightarrow v_r=0$ ,  $v_\theta = -2U_\infty \sin \theta - \frac{\Gamma}{2\pi a}$

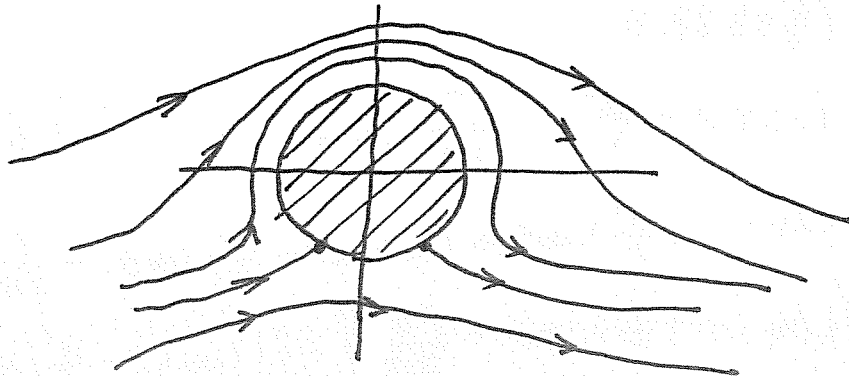
驻点位置:  $v_\theta = 0 \Rightarrow -2U_\infty \sin \theta - \frac{\Gamma}{2\pi a} = 0$   
 $\Rightarrow \sin \theta_c = -\frac{\Gamma}{4\pi U_\infty a} \quad (6.4.27)$

若: ①  $\Gamma=0 \Rightarrow \sin \theta_c = 0 \Rightarrow \theta_c = 0, \pi$  (无环量绕流情况)

②  $\Gamma = 4\pi U_\infty a \Rightarrow \sin \theta_c = -1 \Rightarrow \theta_c = -\frac{\pi}{2}$  (一个驻点)



③  $0 < \Gamma < 4\pi U_\infty a \Rightarrow -1 < \sin \theta_c < 0$  (两个驻点)



④  $\Gamma > 4\pi U_\infty a \Rightarrow \sin \theta_c < -1$  (无解, 即圆柱表面无驻点, 驻点移到柱面下方).



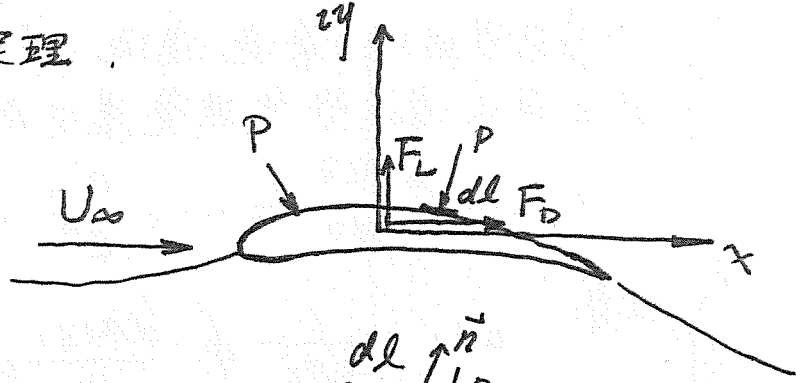
# 北京 大学 工学院

五. 柱体定常绕流中所受的力 (阻力和升力) 和力矩.

(一) 布拉修斯 (Blasius) 第一定理.

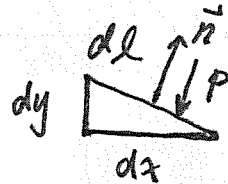
$$\vec{n} = (n_x, n_y)$$

$$n_x = \frac{dy}{dl}, \quad n_y = -\frac{dx}{dl}$$



作用在  $dl$  上的压力:

$$d\vec{F} = -p\vec{n}dl \Rightarrow \begin{cases} dF_x = -p dy \\ dF_y = p dx \end{cases}$$



$$\therefore d(F_x - iF_y) = -p dy - i p dx = -ip(dx - i dy) = -ip d\bar{z} \quad (6.5.1)$$

由 Bernoulli 积分:

$$P_\infty + \frac{1}{2}\rho U_\infty^2 = p + \frac{1}{2}\rho v_s^2$$

$$\Rightarrow p = \underbrace{P_\infty + \frac{1}{2}\rho U_\infty^2}_{P_0 \text{ (驻点压强)}} - \frac{1}{2}\rho v_s^2$$

$P_0$  (驻点压强)

$$\text{同时, } v_s^2 = u^2 + v^2 = W\bar{W} = \frac{dF}{dz} \overline{\frac{dF}{dz}} = \frac{dF}{dz} \frac{d\bar{F}}{d\bar{z}}$$

$$\therefore p = P_0 - \frac{1}{2}\rho \frac{dF}{dz} \frac{d\bar{F}}{d\bar{z}} \quad (6.5.2)$$

将 (6.5.2) 代入 (6.5.1) 有:

$$F_x - iF_y = \oint_L \left[ -ip_0 d\bar{z} + i\frac{1}{2}\rho \frac{dF}{dz} d\bar{F} \right]$$

由于积分周界  $L$  为流线  $\Rightarrow d\psi = 0 \Rightarrow d\bar{F} = dF = d\phi = \frac{dF}{dz} dz$

$$\text{因而: } F_x - iF_y = \frac{1}{2}ip \oint_L \left( \frac{dF}{dz} \right)^2 dz = \frac{1}{2}ip \oint_L W^2 dz \quad (6.5.3)$$

# 北京大学工学院

(二) 儒可夫斯基 (Kutta-Joukowski) 定理:

在无穷远均匀来流绕流问题中, 复势在物体周界以外无奇点, 因此, 可以将复势复速度展开成罗伦级数:

$$W(z) = \frac{dF(z)}{dz} = \dots + \frac{a_{-n}}{z^n} + \dots + \frac{a_{-1}}{z} + a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n + \dots$$

且有: 
$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{dF(z)}{dz} dz = \frac{1}{2\pi i} (\Gamma + iQ)$$

又有: 
$$\left. \left( \frac{dF}{dz} \right) \right|_{\infty} = U_{\infty} e^{-i\alpha}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_0 = U_{\infty} e^{-i\alpha} \\ a_1 = a_2 = \dots = 0 \end{cases}$$

因此, 
$$\frac{dF}{dz} = U_{\infty} e^{-i\alpha} + \frac{Q - i\Gamma}{2\pi} \frac{1}{z} + \frac{a_{-2}}{z^2} + \dots \quad (6.5.4)$$

$$\begin{aligned} \therefore F_x - iF_y &= \frac{1}{2} i\rho \oint_L \left( \frac{dF}{dz} \right)^2 dz \\ &= \frac{1}{2} i\rho \oint_L \left( U_{\infty} e^{-i\alpha} + \frac{Q - i\Gamma}{2\pi} \cdot \frac{1}{z} + \frac{a_{-2}}{z^2} + \dots \right)^2 dz \\ &= \frac{1}{2} i\rho \oint_L \left( U_{\infty} e^{-i\alpha} \frac{Q - i\Gamma}{2\pi} \frac{1}{z} \right) dz \quad (6.5.5) \end{aligned}$$

在周界上, 由于  $Q = 0$ , 因此积分式(6.5.5)变为:

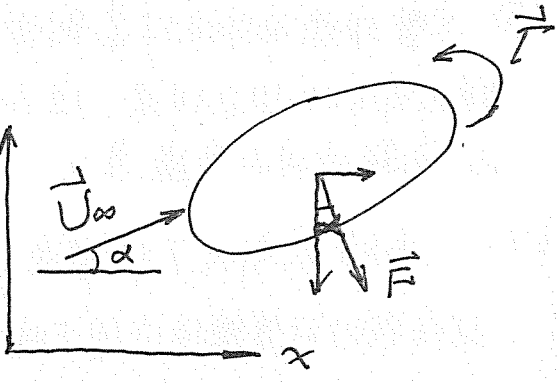
$$\begin{aligned} F_x - iF_y &= \frac{1}{2} i\rho \cdot 2\pi i \cdot U_{\infty} e^{-i\alpha} \frac{-i\Gamma}{2\pi} \\ &= \rho U_{\infty} \Gamma [i(\cos\alpha - i\sin\alpha)] = \rho U_{\infty} \Gamma [\sin\alpha + i\rho U_{\infty} \Gamma \cos\alpha] \end{aligned}$$

即: 
$$F_x = \rho U_{\infty} \Gamma \sin\alpha, \quad F_y = -\rho U_{\infty} \Gamma \cos\alpha \quad (6.5.6)$$

# 北京 大学 工学院

$$|\vec{F}| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \rho U_\infty |\vec{\Gamma}|$$

方向为来流方向逆 $\Gamma$ 方向旋转 $90^\circ$ 。  
若将 $\Gamma$ 写成矢量(并规定逆时针为正)  
则 $\vec{F}$ 与 $\vec{U}_\infty$ 和 $\vec{\Gamma}$ 满足右手法则:



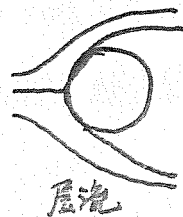
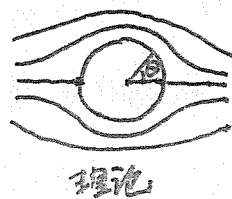
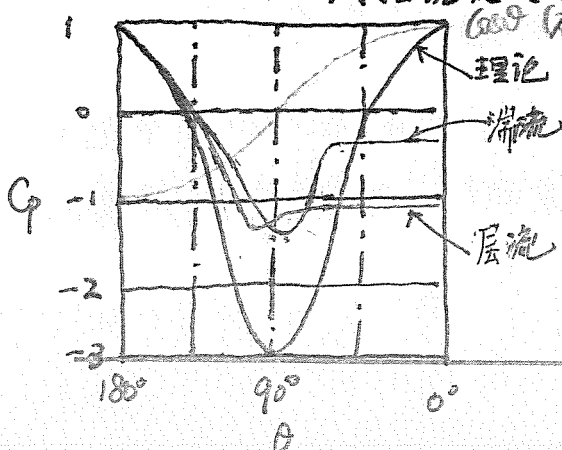
$$\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} = \rho \vec{U}_\infty \times \vec{\Gamma} \quad (6.5.7)$$

(6.5.7) 称为儒可夫斯基定理。

讨论: 压缩流体

① 理想不可入绕任意剖面不脱体绕流中, 物体所受合力大小与流体的密度 $\rho$ , 来流速度的大小 $U_\infty$ 以及绕物体环量的大小成正比; 合力方向为逆 $\Gamma$ 方向旋转 $90^\circ$ 。

② 若环量 $|\vec{\Gamma}|=0$ , 则 $|\vec{F}|=0$ , 即柱体既不承受与来流方向垂直的升力, 也不承受来流方向的阻力。这就是著名的达朗贝尔佯谬 (d'Alembert's paradox reached in 1752 by French mathematician Jean le Rond d'Alembert)。如果说前者与实际情况符合的话, 那么后者显然和真实情况不符。产生这个佯谬的根源在于我们没有考虑流体的粘性作用(会产生摩擦阻力)和流动分离(流体的脱体运动, 会产生压差阻力)。这一点可以通过对比圆柱绕流问题的理论和实验结果来加以说明。



湍流时阻力较层流小。

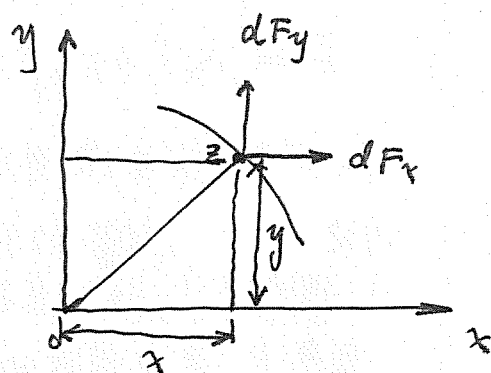
圆柱为非流线型物体, 圆柱表面上的边界层经不起逆压的作用而

# 北京 大学 工学院

③ 尽管理想流体绕任意剖面不脱体绕流的数学模型不能给出与实际情况符合的阻力结果, 但(6.5.7)在计算升力方面还是正确的. 在绕流问题中具有普遍意义.

(三). 布拉休斯关于柱体受力的第二定理: 合力矩公式.

现在我们计算流体作用于绕流物体(柱体)上的力矩. 设  $M$  表示对柱体重心  $O$  的力矩, 作用于微元弧段  $ds$  上的作用力对柱体重心的力矩:



$$\begin{aligned} dM &= dF_y x - dF_x y \\ &= \operatorname{Re} [i (dF_x - i dF_y) z] \\ &= \operatorname{Re} [i (-p dy - i p dx) z] \quad (\text{参考}(6.5.1)) \\ &= \operatorname{Re} [p (dx - i dy) z] = \operatorname{Re} (p z d\bar{z}) \quad (6.5.8) \end{aligned}$$

将(6.5.2)代入(6.5.8), 并考虑留数定理有:

$$\begin{aligned} M &= \operatorname{Re} \oint_L (p_0 - \frac{1}{2} \rho \frac{dF}{dz} \frac{d\bar{F}}{d\bar{z}}) z d\bar{z} \\ &= -\frac{1}{2} \rho \operatorname{Re} \left\{ \oint_L \left( \frac{dF}{dz} \right)^2 z dz \right\} \\ &= -\frac{1}{2} \rho \operatorname{Re} \left\{ \oint_L W^2 z dz \right\} \quad (6.5.9) \end{aligned}$$

注: 由于(6.5.3)和(6.5.9), 即合力和合力矩的积分公式首先由恰普雷金提出. 因此统称为恰普雷金公式, 也称布拉休斯公式.

# 北京 大学 工学院

由 (6.5.4), 同时考虑到  $Q = 0$  :

$$\frac{dF}{dz} = U_{\infty} e^{-i\alpha} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \frac{1}{z} + \frac{a_{-2}}{z^2} + \dots \quad (6.5.10)$$

代入 (6.5.9) 有:

$$\begin{aligned} M &= \operatorname{Re} \left[ -\frac{\rho}{2} \oint_L \left( U_{\infty} e^{-i\alpha} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \frac{1}{z} + \frac{a_{-2}}{z^2} + \dots \right)^2 z dz \right] \\ &= \operatorname{Re} \left[ -\frac{\rho}{2} 2\pi i \left( -\frac{\Gamma^2}{4\pi^2} + 2U_{\infty} e^{-i\alpha} a_{-2} \right) \right] \\ &= -2\pi\rho U_{\infty} \operatorname{Re} \{ i e^{-i\alpha} a_{-2} \} \quad (6.5.11) \end{aligned}$$

即: 若  $w(z)$  的罗伦级数中  $z^{-2}$  项的系数  $a_{-2}$  知道后, 我们可按 (6.5.11) 式求出合力矩的大小.

## 六. 机翼理论简介.

### (一) 库塔条件 (The Kutta condition).

#### 1. 翼型: (airfoil; aerofoil)

机翼 (wing) 的剖面形状称为翼型.

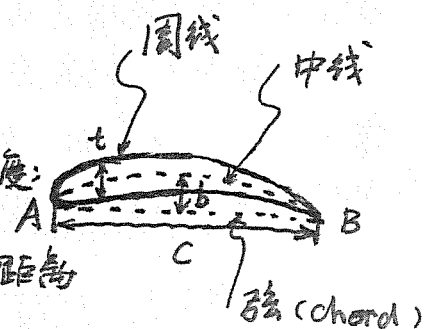
① 厚度: 周线上下各点的垂直距离  $t$  称为当地厚度.

② 弯度或拱度 (camber): 中线各点到弦的垂直距离  $b$  称为弯度或拱度.

③ 翼型前缘点 (Leading edge) 到后缘点 (trailing edge) 的直线  $C$  称为翼弦 (chord).

④ 机翼的展向长度  $l$  称为翼展

⑤ 展弦比:  $\lambda = l/c$ .

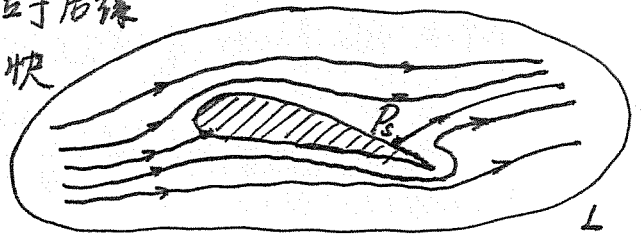


# 北京 大学 工学院

## 2. 起动涡 (The starting vortex)、绕翼型环量的产生.

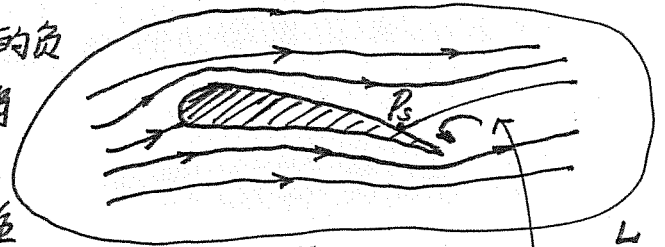
(包括由此而产生的升力)

当机翼(飞机)从静止开始加速运动时, 绕翼型(机翼)的环量并非与生俱来的, 环量在起动瞬间为零。(并且  $L$  所占区域足够大时,  $\Gamma_L$  永远近似为零), 流线如图(A)所示, 后驻点位于后缘附近上表面. 在尖后缘处, 空气要以极快的速度突然改变方向绕过后缘而沿上表面逐渐减速运动至后驻点  $P_s$  处, 即后缘处流体速度值获得无穷大值(无粘理论).



(A)  $\Gamma_L = 0$

大于  $\pi$  角的角度流角点处的速度  $(U_r)_{\theta=\frac{\pi}{2}} = -2A r^{\pi-1}, \pi < 1$ , 由伯努利积分可知, 该处将形成无穷大的负压. 这显然是非物理的. 实际上, 流体将从上下表面顺着翼型表面平滑地流过尖后缘(小攻角情况). 也就是说后驻点应移至尖后缘处. 这就是著名的库塔条件:



(B)  $\Gamma_L = 0$

粘性力 + 逆压梯度

边界层分离

流体(空气)离开后缘上表面形成涡旋.

条件: 在机翼后缘点压差  $\Delta p = \rho U_\infty^2 \delta = 0$

$$(6.6.1)$$

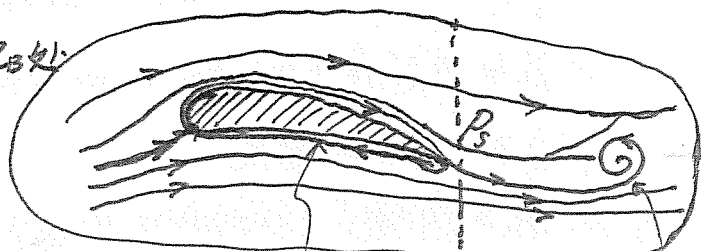
该处上下两层流体无着力差, 后驻点(驻点)  $P_s$  推到翼型尖后缘点. 由德国数学家 Kutta (1902) 首先提出. 据此, 儒可夫斯基首先提出 (1909)

了确定环量的补充条件, 即后缘点  $z_B$  处:

$$W(z) \Big|_{z_B} = \frac{dF(z)}{dz} \Big|_{z_B} = \text{常数}$$

为有限值.

$$(6.6.2)$$



附着涡

起动涡  
或切线涡

后驻点  $P_s$  推送到尖后缘点  $z_B$  是个非常快的渐近过程.

# 北京 大学 工学院

第一, 从无粘流理论来讲, 空气绕过后缘从下表面上表面运动时会  
在上表面角点处造成很大的压力梯度;

第二, 从真空(粘性)流体运动来讲, 流体在点后缘处的高速转向运动  
必然伴随局部很大的加速度, 从而产生很大的粘性切应力。

而尖后缘上表面附近的流体(边界层)承受不了这两种力的联合  
作用, 而在后缘处形成切向速度<sup>速度</sup>间断面, 导致流体不能绕过后缘而走向  
驻点位置, 而是离开上表面卷成一个涡旋<sup>(逆向)</sup>(图(B))。由于环量(近似)守恒, 并成  
绕翼型的顺时针环量。由前面的知识, 后驻点位置将向后缘位  
置移动。随后, 继续有涡从后缘上表面脱落, 绕机翼环量继续增  
强, 后驻点继续后移, 升力逐渐增大, 直到后驻点到达尖后缘  
位置(图(C))。脱离机翼而运动于其后方的涡的强度与附于其  
上的涡旋相当, 但方向相反。前者被称为脱体涡(detached vortices)  
或起动涡(Starting vortex)或初始涡(initial eddy)。后者被  
称为附着涡(attached vortex)。

### 3. Kutta - Joukowski Condition (库塔-儒可夫斯基条件):

- ① 对于给定攻角(一般限于小攻角)下的翼型, 绕翼型环量的  
值要能够保证流体沿翼型上下表面平滑地流过尖端(薄翼),  
速度值相等, 且为有限值;
- ② 对于实际的翼型(后缘尖端有一个有限角度), 后驻点位于尖后缘处。

(二). 升力:

$$F_L = \rho U_\infty \Gamma = \int_0^c \rho U_\infty \gamma ds \quad (6.6.3).$$

# 北京大学工学院

由于空气密度一定，要想获得较大升力，一是要增大来流速度 $U_\infty$ ，二是要增加绕机翼环量 $\Gamma$ 。

通常来讲 $\Gamma$ 与翼型设计的形状和来流攻角有关：

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2} U_\infty a_0(z) b(z) [\underbrace{\alpha - \alpha_0}_{\alpha_a(z)} - \alpha_i] \quad (6.6.4)$$

其中 $z$ 表示机翼展向坐标（不同的展向位置，参数不同）。

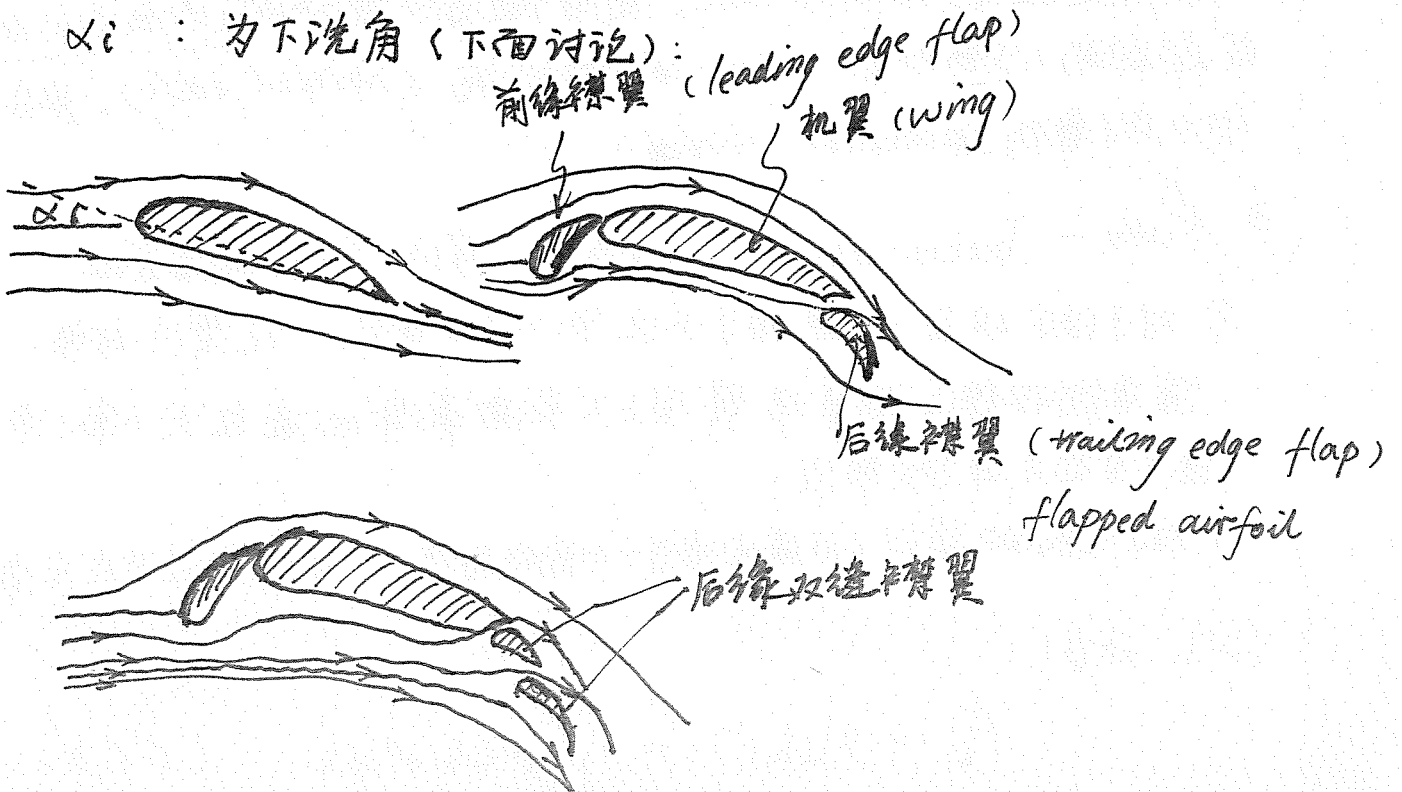
$a_0(z)$ ：表示翼型升力线斜率，为关于 $z$ 的常数；

$b(z)$ ：表示拱度，取决于翼型形状；

$\alpha$ ：为几何攻角（angle of attack or angle of incidence），为来流与弦线夹角。

$\alpha_0$ ：为零升力角（也称物攻角），它与翼型形状（即拱度 $b$ ）有关，为一不大的负值；

$\alpha_i$ ：为下洗角（下面讨论）：





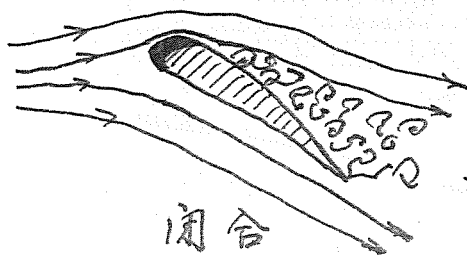
# 北京大学工学院

因此,为了提升升力,通常采用增升装置:如前、后缘襟翼<sup>(flap)</sup>,前缘缝翼(Slat)。主要原理是①增大攻角②增大拱度。

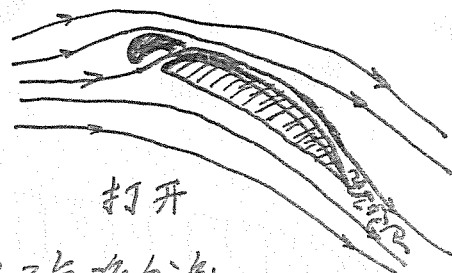
在飞机起飞和着陆时③遵循迎风(逆风)起降原则。

说明:

- (1) 飞机起飞时,后缘襟翼向后下伸出一定角度(较小)来增大机翼的弯度,从而起到增大升力的作用,加速飞机的起飞,缩短飞机在地面的滑跑距离;飞机降落时,后缘襟翼伸出角较大,可以使飞机升力和阻力同时增大,以便降低着陆速度,缩短滑跑距离。
- (2) 前缘襟翼可看作是可偏转的前缘,在大攻角时,它向下偏转,使前缘与来流之间的角度减小,气流沿上翼面的流动较光滑,避免发生局部气流分离,同时也增大了翼型的拱度。
- (3) 前缘缝翼主要是延缓机翼上的气流分离,从而提高了飞机的临界攻角(大于这个角度飞机会失速,升力急剧下降),避免大攻角飞行失速,提高升力系数。



闭合



打开

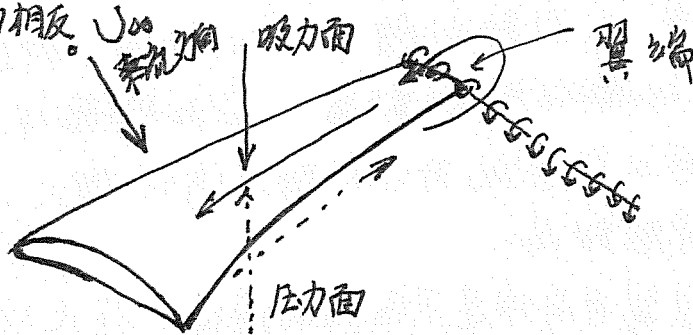
前缘缝翼打开时,有效地推迟了气流分离。

# 北京 大学 工 学 院

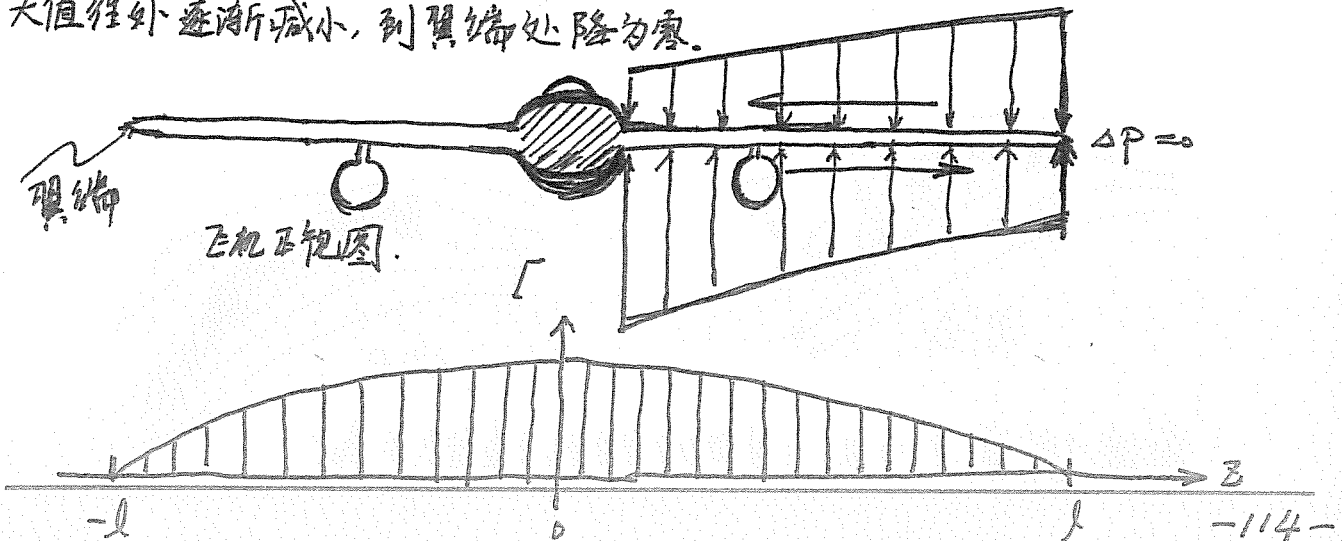
## (三). 有限翼展效应.

### 1. 尾涡 (The trailing vortex system).

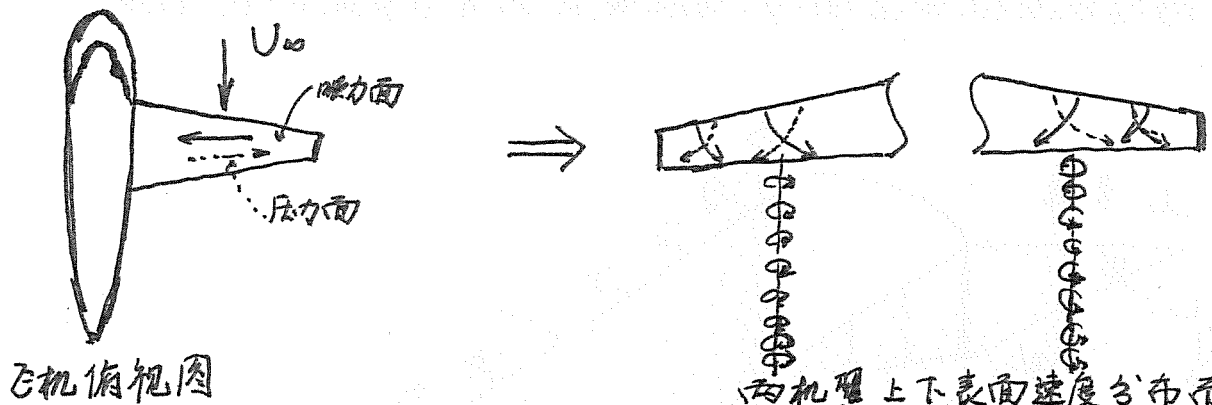
真实的机翼的展向长度是有限的。气流流过机翼时，机翼受到向上的升力。因此机翼下表面(压力面)压力显然大于上表面(吸力面)压力。在上下表面压差的作用下，气流在翼端(也称翼尖)处绕过端部由下表面流向上表面。在机翼两端产生涡旋并脱落形成尾涡(trailing vortices)，且在两翼端处方向相反。



实际上，压力在机翼下表面将从中间最高的地方往两侧逐渐降低，而在上表面处压力从两端最高的地方向中间连续降低，但在翼端处压力差为零(环量为零)。在机翼下表面产生由中间向外(翼端)的速度分量，而在上表面产生由两翼端向中间(机身)的速度分量。机翼上下表面的压力差，环量 $\Gamma$ 以及产生的升力沿展向( $z$ )是变化的，由中间的最大值往外逐渐减小，到翼端处降为零。

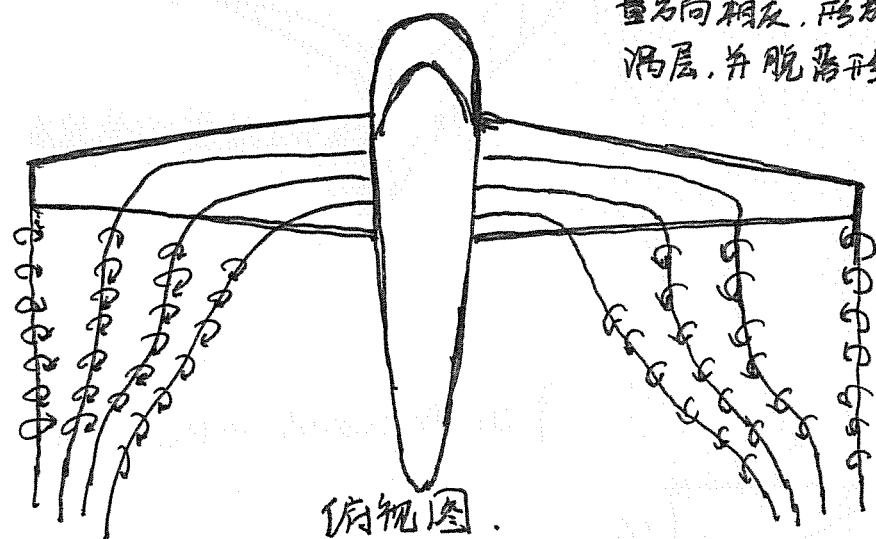


# 北京 大学 工 学 院



飞机俯视图

两机翼上下表面速度分布而引起尾涡在机翼后缘，上下两侧流体横向速度分量方向相反，形成切向速度间断面即涡层，并脱落形成尾涡面。



俯视图。

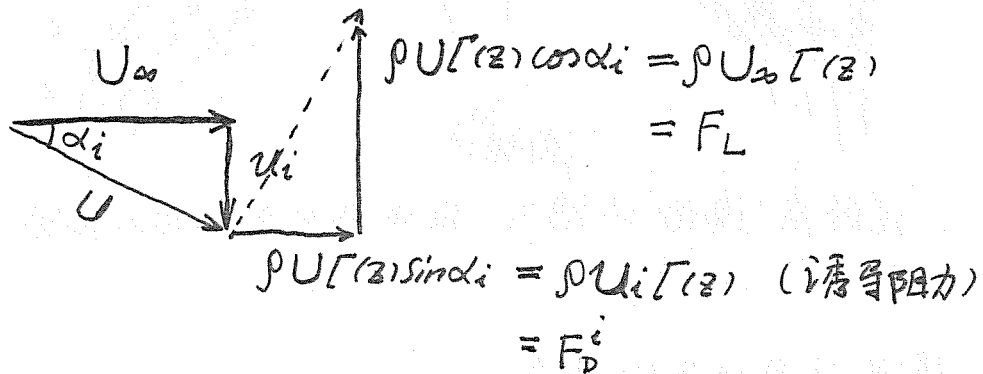
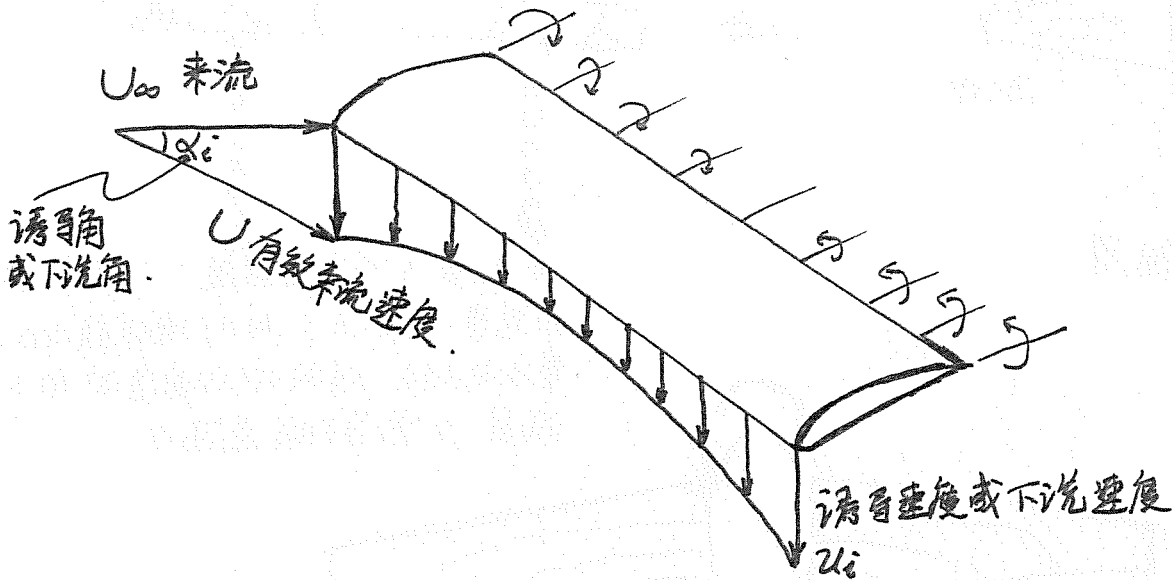
尾涡层(涡面)不稳定，在离开机翼后面不远处翻卷成两个孤立的大旋涡。如上图。

## 2. 尾涡诱导的气流速度

尾涡的存在在向来流垂直的横向平面内将存在尾涡诱导的向下的气流速度分量，称为诱导速度，或下洗速度。随着机翼的前进，机翼后面的新尾涡系将产生，它所引起的新的气流下洗运动也不断产生。它们的能量必须由运动着的机翼连续对流体做功来维持，表现为机翼要克服一定的诱导阻力。因此，即使是

# 北京大学工学院

在理想流体模型范围内,有限翼展机翼也要承受一定阻力。

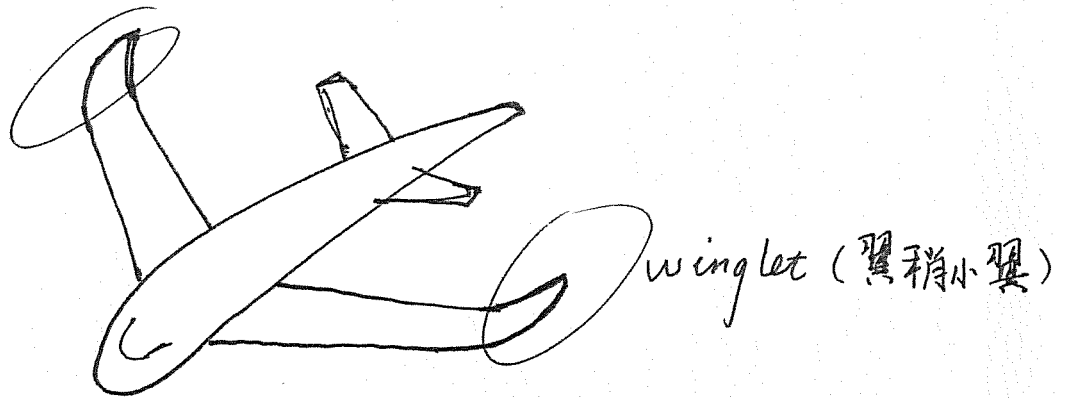


因此,对于小攻角(无分离流)工况,机翼所受阻力包括粘性阻力  $F_D^{vis}$  (与真实流体粘性有关) 和诱导阻力  $F_D^i$  (与机翼平面形状和剖面形状)。

$$F_D = F_D^{vis} + F_D^i$$

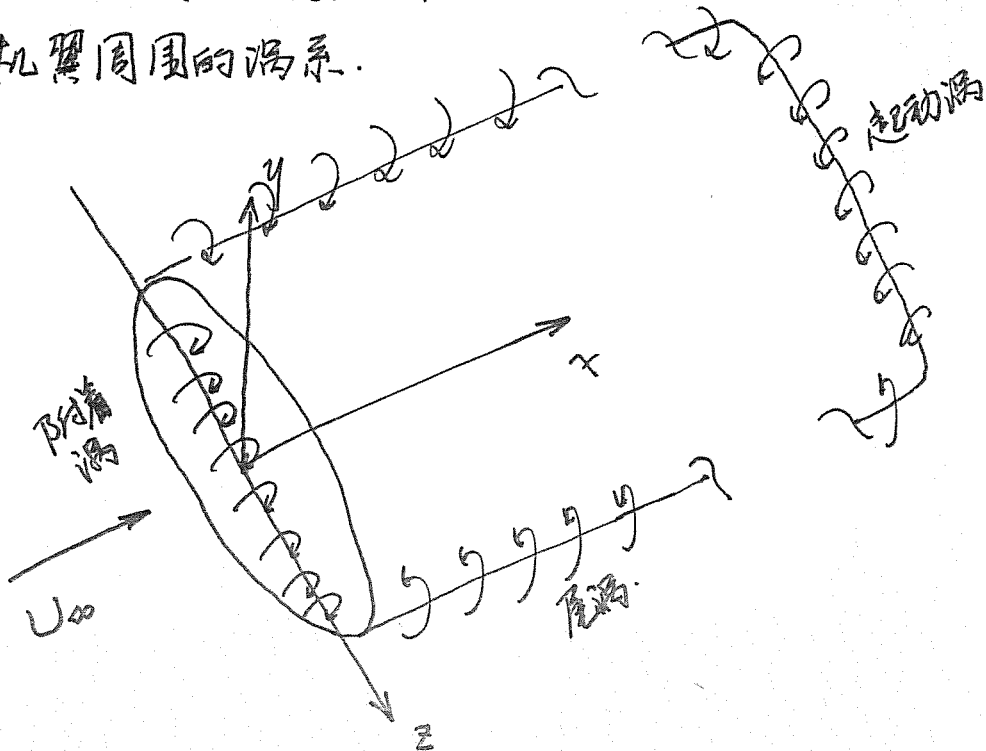
# 北京大学工学院

上世纪70年代,美国NASA(宇航局)提出了应用梯形翼稍小翼(Winglet)技术来降低诱导阻力。这主要归功于著名空气动力学家惠特科姆(Richard T. Whitcomb)(1976)受鸟类的翅尖小翼的启发而发明的。



翼稍小翼重新调整翼尖涡流,使其远离翼尖外侧,移至层流之上,使翼尖附近的诱导速度大大减弱或消失从而起到降低诱导阻力,降低侧向噪声,增强机翼稳定性等显著作用。

### 3. 机翼周围的涡系。



起边涡在飞机起飞后被远远留在机头,附着涡(Attached vortex 或 bound vortex)和机翼附近两侧的尾涡(trailing vortex)构成马蹄涡(the horseshoe vortex)。

THE UNIVERSITY OF CHICAGO  
 DIVISION OF THE PHYSICAL SCIENCES  
 DEPARTMENT OF CHEMISTRY

