第八章　解线性方程组的迭代法

8.1 迭代法及常用迭代格式.

1) 直接法的缺点：1° 舍入误差积累

2° 方程阶数高时，贮存量大

3° 解稀疏矩阵，工作量难减少.

迭代法的缺点：1° 可能不收敛

一种组合方法：先用直接法解出迭代初条件，再用迭代法提高精度.

2) 对线性方程组 $A\vec{x}=\vec{b}$，作分解 $A=R+S$，其中R可逆且易于求逆。

则 $R\vec{x}=\vec{b}+(R-A)\vec{x}$

即 $\vec{x}=R^{-1}\vec{b}+(I-R^{-1}A)\vec{x}$

令 $B=I-R^{-1}A$，$\vec{g}=R^{-1}\vec{b}$，则

$$\vec{x}=B\vec{x}+\vec{g}$$

递推公式为

$$\vec{x}^{(k+1)}=B\vec{x}^{(k)}+\vec{g}$$

，其中B称为迭代矩阵

注：这里 B、$\vec{g}$ 与迭代步数 k 无关，称为定常迭代。

3) 简单迭代法（Jacobi 迭代）

令 $R=\mathrm{diag}\{a_{ii}\}$，则 $R^{-1}=\mathrm{diag}\{a_{ii}^{-1}\}$，且

$$\begin{cases} b_{ij}=\delta_{ij}-a_{ii}^{-1}a_{ij}=\begin{cases}-\dfrac{a_{ij}}{a_{ii}} & (i\neq j)\\ 0 & (i=j)\end{cases} \\ g_i=\dfrac{b_i}{a_{ii}} \end{cases}$$

迭代公式为

$$\vec{x}^{(k+1)}=B\vec{x}^{(k)}+\vec{g}$$

停止准则：$\|\vec{x}^{(k+1)}-\vec{x}^{(k)}\|_\infty<\varepsilon$

4) Seidel 迭代法（赛得尔迭代法）

在简单迭代的第 $k+1$ 步的第 i 个方程中

$$x_i^{(k+1)}=\sum_{1\le j\le n}b_{ij}x_j^{(k)}+g_i$$

可以调整为

$$x_i^{(k+1)}=\sum_{1\le j\le i-1}b_{ij}x_j^{(k+1)}+\sum_{i+1\le j\le n}b_{ij}x_j^{(k)}+g_i$$

（因为 $x_j^{(k+1)}$ $(j=1,\cdots,i-1)$ 已知）

迭代公式的整体形式为

$$\vec{x}^{(k+1)} = L\vec{x}^{(k+1)} + U\vec{x}^{(k)} + \vec{g}$$

或 $$\vec{x}^{(k+1)} = (I-L)^{-1}U\vec{x}^{(k)} + (I-L)^{-1}\vec{g}$$

其中 $B = L+U$，为下三角阵和上三角阵.（这里B不是Seidel迭代法的迭代矩阵.）

5) 松弛法 (SOR: successive over relaxation)（加速Seidel迭代法）

对Seidal迭代法，记

$$\Delta\vec{x}^{(k+1)} = \vec{x}^{(k+1)} - \vec{x}^{(k)} = L\vec{x}^{(k+1)} + U\vec{x}^{(k)} + \vec{g} - \vec{x}^{(k)}$$

定义新的迭代公式

$$\vec{x}^{(k+1)} = \vec{x}^{(k)} + \omega\Delta\vec{x}^{(k+1)}$$

$$= (1-\omega)\vec{x}^{(k)} + \omega(L\vec{x}^{(k+1)} + U\vec{x}^{(k)} + \vec{g})$$

其中，ω为松弛因子. 当 $\omega<1$ 时，此法称为低松弛法或亚松弛法；当 $\omega>1$ 时，此法称为超松弛法。特别地，在 $\omega=1$ 时，此法就是Seidal迭代法。

因为 $(I-\omega L)\vec{x}^{(k+1)} = [(1-\omega)I + \omega U]\vec{x}^{(k)} + \omega\vec{g}$

且 $|I-\omega L| = 1 \neq 0$.

所以 $\vec{x}^{(k+1)} = (I-\omega L)^{-1}[(1-\omega)I + \omega U]\vec{x}^{(k)} + \omega(I-\omega L)^{-1}\vec{g}$

得到松弛法的迭代矩阵 $B_\omega = (I-\omega L)^{-1}[(1-\omega)I + \omega U]$.

注：最优松弛因子 ω_{opt} 是收敛最快的松弛因子，比 Jacobi 迭代或 Seidal 迭代快得多。

8.2 迭代法的收敛性.

1° 迭代公式 $\vec{x}^{(k+1)} = M\vec{x}^{(k)} + \vec{f}$ 收敛且与初值 $\vec{x}^{(0)}$ 无关

$\Leftrightarrow \rho(M) < 1$ （证明见[冯康]）

2° $\|M\| < 1 \Rightarrow$ 迭代公式收敛. （$\because \rho(M) \le \|M\|$）

不可约：如果矩阵A不能用行列对换变成 $\begin{pmatrix} A_1 & A_3 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$ 的形式，其中 A_1, A_2 为方阵，则称A不可约.

对角优势：$|a_{ii}| \ge \sum_{\substack{j=1 \\ j\ne i}}^{n} |a_{ij}|$ ，$(\forall\ i = 1,2,\cdots,n)$

则A有对角优势. 若不等式取 $>$，则称为严格对角优势.

3° (A严格对角优势) $\Rightarrow$ 简单迭代法、Seidel 迭代法 收敛.

(行交换) 或 (A有对角优势且不可约) 若 $0<\omega\le 1$, 则松弛法收敛.

4° A对称正定 $\Rightarrow$ Seidel 迭代法收敛

若 $0<\omega<2$, 则松弛法收敛.

5° 松弛法收敛 $\Rightarrow$ $0<\omega<2$

顺序:

1) $0<\omega\le 1$ 4°→3°→2°→1°

(注: 1°,2°中是迭代矩阵, 3°,4°中是系数矩阵)

2) $1<\omega<2$ 4°→2°→1°

3) Jacobi 3°→2°→1°

8.3 收敛速率

定常迭代: 各步迭代中, 迭代矩阵和常数项不变的迭代法。

注: 此前学过的三个迭代法都是定常迭代,

平均收敛速率: $R_k(M) = -\ln(\|M^k\|)^{\frac{1}{k}}$, 其中M是迭代矩阵。

渐近收敛速率: $R_\infty(M) = \lim\limits_{k\to\infty} R_k(M) = -\ln\rho(M)$.

注: M的谱半径越小 ($\rho<1$), 收敛速率越快.