引理：$\forall$ 幂零矩阵（变换），$\exists$ 基：矩阵为准对角 Jordan 块矩阵.

证明：引理1：$\mathcal{A}$ 是 $V$ 上的线性变换。$\mathcal{A}^{k-1}\xi \neq 0$，$\mathcal{A}^{k}\xi = 0 \Rightarrow \{\mathcal{A}^{k-1}\xi, \mathcal{A}^{k-2}\xi, \cdots, \xi\}$ 线性无关

（证明见习题10）

引理2：$\mathcal{A}$ 是 $V$ 上的线性变换，$\mathcal{A}^{n}\alpha = 0$，$\mathcal{A}^{n-1}\alpha \neq 0 \Rightarrow$ 基 $\{\mathcal{A}^{n-1}\alpha, \mathcal{A}^{n-2}\alpha, \cdots, \alpha\}$ 下的矩阵为 $J_n(0)$.

（显然）

$\boxed{\text{Jordan定理的证明}}$

设幂零矩阵 $B$ 的阶数为 $n$.

① $n=1$ 时，显然

② 假设 $n-1$ 时，命题成立

1° $B \backsim$ 上三角矩阵，且对角元为 0.

~~对 $\forall$ 矩阵 $M$，$\exists$ 矩阵 $P_{n\times n}$：$PM$ 为上三角矩阵.~~

1) claim：$\mathbb{C}$ 上，$\forall$ 方阵 $A$ 相似于上三角矩阵。

$n=1$ 时. □

若 $n-1$ 时成立，令 $\lambda$ 是 $A$ 的一个特征值，$\alpha_1$ 为对应的特征向量，构造基 $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$.

则
$$A(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)\begin{pmatrix} \lambda_1 & * \cdots * \\ 0 & \\ \vdots & A_1 \\ 0 & \end{pmatrix}$$

$\because \exists P$：$P^{-1}A_1P = R$，$R$ 是一个上三角矩阵.

$$\therefore \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 & * \cdots * \\ 0 & \\ \vdots & A_1 \\ 0 & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & R \end{pmatrix}$$，是一个上三角矩阵

$\therefore$ 命题成立.

2) 设 $B = Q^{-1}SQ$，$S$ 是一个上三角矩阵，且 $S = S_1 + S_2$，$S_1$ 为对角阵，$S_2$ 为主对角元为 0 的上三角阵

$\because B^n = 0$

$\therefore (Q^{-1}SQ)^n = Q^{-1}S^nQ = 0$

$\therefore S^n = 0$

$\therefore (S_1+S_2)^n = S_1^n + S' = 0$，其中 $S'$ 为主对角元为 0 的上三角阵，

$\therefore S_1^n = 0$

$\therefore S_1 = 0$，即命题 1° 成立.

2° 记 $B \backsim \begin{pmatrix} D & \delta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，则 $D$ 为幂零矩阵，阶数不超过 $n-1$.

$\therefore \exists X$：$D = X^{-1}\tilde{J}X$

$$\because \begin{pmatrix} X^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} D & \delta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{J} & X^{-1}\delta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore B \sim \begin{pmatrix} J_{k_1}(0) & & & 0 & * \\ & J_{k_2}(0) & & & * \\ & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & J_{k_s}(0) & * \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

即∃基 $E$：$\{\mathcal{B}^{k_1-1}\varepsilon_1, \mathcal{B}^{k_1-2}\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_1$

$\mathcal{B}^{k_2-1}\varepsilon_2, \mathcal{B}^{k_2-2}\varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_2$

$\cdots$

$\mathcal{B}^{k_s-1}\varepsilon_s, \mathcal{B}^{k_s-2}\varepsilon_s, \cdots, \varepsilon_s$

$\varepsilon_{s+1}\}$

且 $\mathcal{B}^{k_1}\varepsilon_1 = \mathcal{B}^{k_2}\varepsilon_2 = \cdots = \mathcal{B}^{k_s}\varepsilon_s = 0$，

$1 + \sum_{j=1}^{s} k_j = n$，$(k_1 \geq k_2 \geq \cdots \geq k_s \geq 1)$

3° 设 $\mathcal{B}\varepsilon_{s+1} = \sum_{j=1}^{s}\sum_{i=1}^{k_j} t_{ij}\mathcal{B}^{i-1}\varepsilon_j$

$\therefore \mathcal{B}(\varepsilon_{s+1} - \sum_{j=1}^{s}\sum_{i=2}^{k_j} t_{ij}\mathcal{B}^{i-2}\varepsilon_j) = \sum_{j=1}^{s} t_{1j}\varepsilon_j$

令 $\varepsilon'_{s+1} = \varepsilon_{s+1} - \sum_{j=1}^{s}\sum_{i=2}^{k_j} t_{ij}\mathcal{B}^{i-2}\varepsilon_j$

1) 若 $t_{1j} = 0$，$\forall j \in \{1, \cdots, s\}$，则证毕

2) 若 $t_{1j} = 0$，$\forall j \in \{1, \cdots, q-1\}$，$t_{1q} \neq 0$

令 $\varepsilon'_q = t_{1q}\varepsilon_q + \sum_{j=q+1}^{s} t_{1j}\varepsilon_j$

$\therefore \mathcal{B}\varepsilon'_{s+1} = \varepsilon'_q$

$\because \mathcal{B}^{k_q}\varepsilon'_q = 0$，$\mathcal{B}^{k_q-1}\varepsilon'_q = \sum_{j=q}^{?} t_{1j}\mathcal{B}^{k_q-1}\varepsilon_j \neq 0$

由引理得，$\mathcal{B}^{k_q-1}\varepsilon'_q, \cdots, \varepsilon'_q$ 线性无关

$\therefore \mathcal{B}^{k_q+1}\varepsilon'_{s+1} = 0$，且 $\mathcal{B}^{k_q}\varepsilon'_{s+1}, \mathcal{B}^{k_q-1}\varepsilon'_{s+1}, \cdots, \varepsilon'_{s+1}$ 线性无关.

构造基 $E^*$：$\{\mathcal{B}^{k_1-1}\varepsilon_1, \mathcal{B}^{k_1-2}\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_1$

$\cdots$

$\mathcal{B}^{k_{q-1}-1}\varepsilon_{q-1}, \mathcal{B}^{k_{q-1}-2}\varepsilon_{q-1}, \cdots, \varepsilon_{q-1}$

$\mathcal{B}^{k_q}\varepsilon'_{s+1}, \mathcal{B}^{k_q-1}\varepsilon'_{s+1}, \cdots, \varepsilon'_{s+1}$

$\mathcal{B}^{k_{q+1}-1}\varepsilon_{q+1}, \mathcal{B}^{k_{q+1}-2}\varepsilon_{q+1}, \cdots, \varepsilon_{q+1}$

$\cdots$

$\mathcal{B}^{k_s-1}\varepsilon_s, \mathcal{B}^{k_s-2}\varepsilon_s, \cdots, \varepsilon_s\}$

则 $\mathcal{B}^{k_1}\varepsilon_1 = \cdots = \mathcal{B}^{k_{q-1}}\varepsilon_{q-1} = \mathcal{B}^{k_q+1}\varepsilon'_{s+1} = \mathcal{B}^{k_{q+1}}\varepsilon_{q+1} = \cdots = \mathcal{B}^{k_s}\varepsilon_s = 0$

a) $E^*$ 是 $V$ 的一组基。

$\because t_{1q} \neq 0$

$\therefore \varepsilon_q = (\varepsilon'_q - \sum_{j=q+1}^{s} t_{1j}\varepsilon_j)\frac{1}{t_{1q}}$

$\mathcal{B}\varepsilon_q = (\mathcal{B}\varepsilon'_q - \sum_{j=q+1}^{?} t_{1j}\mathcal{B}\varepsilon_j)\frac{1}{t_{1q}}$

$\mathcal{B}^{k_q-1}\varepsilon_q = (\mathcal{B}^{k_q-1}\varepsilon'_q - \sum_{j=q+1}^{?} t_{1j}\mathcal{B}^{k_q-1}\varepsilon_j)\frac{1}{t_{1q}}$

$\varepsilon_{s+1} = \varepsilon'_{s+1} + \sum_{j=1}^{s}\sum_{i=2}^{k_j} t_{ij}\mathcal{B}^{i-2}\varepsilon_j = \varepsilon'_{s+1} + \sum^{k_q} t_{iq}\mathcal{B}^{i-2}\varepsilon_q + \sum \cdots \sum_{i=2}^{k_j} t_{ij}\mathcal{B}^{i-2}\varepsilon_j$

即 $\varepsilon_q, \mathcal{B}\varepsilon_q, \cdots, \mathcal{B}^{k_q-1}\varepsilon_q, \varepsilon_{s+1}$ 可被 $E^*$ 线性表出.

∴ $E$ 可以被 $E^*$ 线性表出.

∵ $E$ 是 $V$ 的一组基

∴ $E^*$ 是 $V$ 的一组基.

b) 矩阵 $\mathcal{B}$ 在 $E^*$ 下的矩阵为准对角 Jordan 块矩阵.

由引理 2, 显然.

综合①,②, 由数学归纳法, □.

(补: 唯一性: $\mathcal{A}^{-1}(0)$ 唯一,

$(\mathcal{A}^2)^{-1}(0)$ 唯一,

---

⇒ Jordan 形中各 Jordan 块的数量, 阶数唯一

⇔ Jordan 形唯一. )

Jordan 定理: 设 $\mathcal{A}$ 是复数域上线性空间 $V$ 的一个线性变换, 则在 $V$ 中必定存在一组基, 使 $\mathcal{A}$ 在这组基下的矩阵是 Jordan 阵.

证明: $\mathcal{A}$ 的特征多项式为 $f(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{r_1}(\lambda-\lambda_2)^{r_2}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{r_s}$

其中 $\lambda_1, \cdots, \lambda_s$ 互异。

按照不变子空间分解定理, $V$ 可分解为 $\mathcal{A}$-子空间的直和.

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_s, \text{其中 } V_i = \{\xi \in V \mid (\mathcal{A} - \lambda_i \mathcal{E})^{r_i}\xi = 0\}$$

令 $\mathcal{B} = (\mathcal{A} - \lambda_i\mathcal{E})|V_i$, 则 $\mathcal{B}^{r_i} = 0$, $\mathcal{B}$ 为幂零矩阵。

由引理, 存在 $V_i$ 的基使 $\mathcal{B}$ 的矩阵为 Jordan 形 $J(0)$.

∴ $\mathcal{A}|V_i = \mathcal{B} + \lambda_i\mathcal{E}$ 在该基下的矩阵为 $J(\lambda_i)$.

将上述各 $V_i$ 的基合起来是 $V$ 的基, 且 $\mathcal{A}$ 在该基下的矩阵为 Jordan 形.