第八章 λ 矩阵

定义： λ 矩阵：元素为 λ 的多项式的矩阵。

数字矩阵：以数域 P 中的数作为元素的矩阵。

定义：秩： λ 矩阵 $A(\lambda)$ 中，有一个 r 级子式不为零，而所有 r+1 级子式全为零，则 r 称为 $A(\lambda)$ 的秩。规定零矩阵的秩为零。

可逆：两个 $n\times n$ 的 lambda 矩阵 A,B，如果 $A(\lambda)B(\lambda)=B(\lambda)A(\lambda)=I$ ，那么 lambda 矩阵 A,B 可逆，且互为逆矩阵。

定理 1： $n\times n$ 的 lambda 矩阵 A 可逆 $\Leftrightarrow$ $det(A(\lambda))$ 是一个非零的数。

定义：初等变换：行列互换、行列倍乘、行列乘以 $\varphi(\lambda)$ 加到另一行列上。

定义：等价：lambda 矩阵 $A(\lambda)$ 可以通过初等变换化为 $B(\lambda)$ ，则称 A,B 等价。
性质：反身性，对称性，传递性。

引理：设 lambda 矩阵 $A(\lambda)$ 的左上角元素 $a_{11}(\lambda)$ 不为零，且 $A(\lambda)$ 中至少有一个元素不能被它除尽，那么一定存在一个 $A(\lambda)$ 的等价矩阵 $B(\lambda)$ ，它的左上角元素不为零，且次数比 $a_{11}(\lambda)$ 低。

定理 2：任意的 $s\times n$ lambda 矩阵都等价于矩阵 $diag(d_1(\lambda),\dots,d_r(\lambda),0,\dots,0)$ ，主对角元为首一多项式，且后一式能被前一式整除。

定义：行列式因子： $A(\lambda)$ 中全部 k 级子式的首项系数为 1 的最大公因式 $D_k(\lambda)$ 。其中 k 为不超过 $A(\lambda)$ 的秩 r 的正整数。

定理 3：等价的 lambda 矩阵具有相同的秩 r 与相同的行列式因子 $D_k(\lambda)$ 。

定理 4：lambda 矩阵的标准形是唯一的。

定义：不变因子：标准形的非零主对角元 $d_k(\lambda)$ 。其中 k 为 1 到 r 的整数。

定理 5：两个 lambda 矩阵等价 $\Leftrightarrow$ 他们有相同的行列式因子，或者相同的不变因子。

定理 6：lambda 矩阵可逆 $\Leftrightarrow$ 他可以表示成一些初等矩阵的乘积。

引理 1：如果有 n*n 数字矩阵 P_0,Q_0 ，使 $\lambda E-A=P_0(\lambda E-B)Q_0$ ，则 A 与 B 相似。

引理 2：对于任何不为零的 n*n 数字矩阵 A 和 lambda 矩阵 $U(\lambda),V(\lambda)$，一定存在 lambda 矩阵 $Q(\lambda),R(\lambda)$ 以及数字矩阵 $U_{0,}V_0$，使得 $U(\lambda)=(\lambda E-A)Q(\lambda)+U_0$，$V(\lambda)=R(\lambda)(\lambda E-A)+V_0$

定理 7: 设 A,B 是数域 P 上的两个 n*n 矩阵。A,B 相似 $\Leftrightarrow$ 特征矩阵 $\lambda E-A,\lambda E-B$ 等价。

定义：初等因子：把矩阵 A 的每个次数大于零的不变因子分解成互不相同的一次因式方幂的乘积，所有这些一次因式的方幂（重复的不合并）称为矩阵 A 的初等因子。

定理 8：两个同级复数矩阵相似 $\Leftrightarrow$ 他们有相同的初等因子

引理：设 $A(\lambda)=\begin{pmatrix} f_1(\lambda)g_1(\lambda) & 0 \\ 0 & f_2(\lambda)g_2(\lambda) \end{pmatrix}$ $B(\lambda)=\begin{pmatrix} f_2(\lambda)g_1(\lambda) & 0 \\ 0 & f_1(\lambda)g_2(\lambda) \end{pmatrix}$，如果 $(f_i(\lambda),g_j(\lambda))=1,i,j=1,2$，则 $A(\lambda),B(\lambda)$ 等价。

定理 9:（初等因子的求法）首先用初等变换化特征矩阵 $\lambda E-A$ 为对角形式，然后将主对角元分解成互不相同的一次因式方幂的乘积，则所有这些一次因式的方幂（重复的不合并）就是 A 的全部初等因子。
{定理 9 事实上给出了求 lambda 矩阵不变因子的快捷方法：对角化，初等因子按幂次排列。}

定理 12：复数矩阵 A 与对角矩阵相似 $\Leftrightarrow$ A 的初等因子全为一次的。

定理 13：复数矩阵 A 与对角矩阵相似 $\Leftrightarrow$ A 的不变因子无重根。