

《材料力学》

廖励争 : 6275 4624 (#419)

lizheng @ pku.edu.cn

ftp://ftp.mech.pku.edu.cn

user: lz-c

pass: (无)

助教 { 高桂云
李冰

20% - 30% - 50%

第一章 基本概念

1. 基本假设

连续介质假设 continuous medium

均匀性假设 homogeneous medium

复习《理论力学》第一章 (静力学) 作业: 外力与内力: 1.1, 1.2, 1.3

2. 静矩和形心 量纲: $[长度]^3$

3. 惯性矩与惯性积 量纲: $[长度]^4$

4. 惯性半径 $I = i^2 A$

1.2 外力

构件 外力 内力 假设 应力 变形
强度 刚度 稳定性

常见约束: 固定铰支、活动铰支

1.3 内力

1.4 截面法: 合力 P 、合力偶 M

内力: 力矢量、力偶矢量

1.5 应力 (stress):

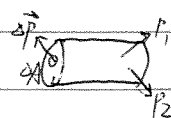
受力杆件某一截面上一点处的内力分布集度

$$\vec{\sigma} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta A}$$

正应力 (normal stress): σ , 垂直于截面的分量

切应力 (shear stress): τ , 平行于截面分量

量纲: $[力][长度]^{-2}$



$$\text{轴力: } N(x) = \iint_A \sigma_x dA$$

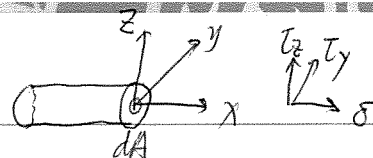
$$\text{剪力: } Q_y(x) = \iint_A \tau_{xy} dA$$

$$Q_z(x) = \iint_A \tau_{xz} dA$$

$$\text{扭矩: } M_x(x) = \iint_A (\tau_{zy} - \tau_{yz}) dA$$

$$\text{弯矩: } M_y(x) = \iint_A \sigma_x z dA ; M_z(x) = \iint_A -\sigma_x y dA$$

注: 应力的概念比内力有更深刻的意义.



均匀应力状态: 物体各点的应力状态相同.

纯拉伸 (简单拉伸) 状态

纯剪切状态: $\tau = \tau'$

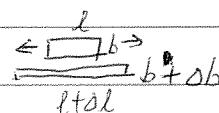
切应力互等定律:

过一点的两个相互垂直的截面上, 在该点垂直于截面交线的切应力分量相等.

15 变形和应变

正应变: (normal strain) $\epsilon = \frac{\Delta l}{l}$ (长度变化)

横向正应变: $\epsilon' = \frac{\Delta b}{b}$



切应变: (shear strain) 角度的改变量 (以变形) γ

$$\gamma = \frac{\Delta u}{c}$$



量纲: 无量纲.

注: 应力是纯静力学的, 应变是纯几何的.

1.7 材料性质, 应力-应变曲线

(名义应力) $\sigma = \frac{P}{A_0}$ (初始截面积), $\epsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$ (初始长度)

由 $\sigma - \epsilon$ 决定应力-应变曲线.

1) 弹性阶段 (elastic behavior)

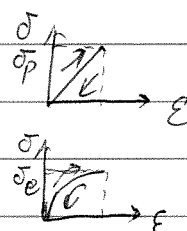
1° 线性弹性阶段 σ_p : 比例极限 proportional limit.

2° 非线性弹性阶段.

σ_e : 弹性极限.

2) 屈服阶段.

3)



塑性指标:

延伸率: percent elongation $\delta = \frac{L_k - L_0}{L_0} \times 100\%$

$\delta \geq 5\%$ — 韧性材料; $\delta < 5\%$ — 脆性材料

截面收缩率: $\psi = \frac{A_0 - A_1}{A_0} \times 100\%$

注: 屈服极限:

1.8 弹性介质, 胡克定律

线弹性介质: 简单拉伸

本构方程: $\epsilon = \frac{1}{E} \sigma$

弹性模量(杨氏模量) E : 表征材料抵抗弹性变形的能力
泊松比.

纯剪切.

本构方程: $\gamma = G \theta$

弹性切变模量 G

各向同性介质: $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$

作业: 应力 1.5, 变形应变 1.11, 材料性质 1.12, 胡克定律 1.24.

1.9 弹塑性介质

1.10 黏弹性和蠕变

第二章 拉伸和压缩

杆: 横截面 + 轴线

等截面杆 变截面杆 直杆 曲杆

2-1 圣维南原理 (Saint-Venant's Principle)

在杆端作用力的方式, 仅对距杆端为横向尺寸的范围内有影响。

2-2 平截面假设

直杆受纵向拉伸或压缩载荷时, 原来的横截面在变形后仍保持为平面, 且彼此平行。

~~直杆受纵向~~

力的符号：外力、内力、应力。

均匀变形： $\Delta l = \frac{Nl}{EA}$, 刚度 $k = \frac{EA}{l}$

非均匀变形杆：

$$N(x) = N(0) - \int_0^x q(x) dx$$

(作业：1-25, 2-6, 2-8)

分析方程组：平衡： $\frac{dN}{dx} + q = 0$, $\sigma(x) = \frac{N(x)}{A(x)}$
几何： $\epsilon = \frac{du}{dx}$
本构： $\sigma = E\epsilon$

2-3 静不定问题。

(作业：2-13, 2-18, 9-1, 求A(两点相对位移。))

2-4 简单桁架 (节点位移) (内力)

小变形理论的适用性：

与结构尺寸相比为很小的变形。

注：1° 小变形情况下，静力平衡方程是对变形前系统建立的。

2° 用切线代替圆弧计算节点位移。

3° 叠加法成立。平衡、几何、物理方程均为线性方程，可作叠加。

2-5 强度和刚度计算。

强度：① 材料强度：(脆性材料, $\delta < 5\%$) 强度极限 σ_b } 破坏应力
(塑性材料, $\delta > 5\%$) 屈服极限 σ_s }

② 结构强度

许用应力 (allowable stress) $\sigma = \frac{\text{破坏应力}}{\text{安全系数}}$

(脆性材料) $[\sigma] = \frac{\sigma_b}{n_b}$; (塑性材料) $[\sigma] = \frac{\sigma_s}{n_s}$

强度条件：

$$-[\sigma]_{\text{压}} \leq \sigma \leq [\sigma]_{\text{拉}}$$

刚度：使结构产生单位变形所需外力值。

$$k = \frac{F}{\Delta}$$

刚度条件： $u_N \leq [u]$

u_N 为轴向最大位移或指定位置处的位移， $[u]$ 是许用位移。

2-6 弹性变形能

弹性体看作一个保守力学系统。

变形能(应变能)

$$U = V \int_0^{\epsilon} \sigma d\epsilon \quad (W = U = \int_0^{\Delta L} P d(\Delta L) = \int_0^{\epsilon} (\sigma A) (l d\epsilon))$$

应变比能

$$u = \frac{U}{V} = \int_0^{\epsilon} \sigma d\epsilon = \int_0^{\epsilon} f(\epsilon) d\epsilon$$

$$\text{对线弹性体, } U = \frac{1}{2} E \epsilon^2 \cdot V = \frac{E(AL)}{2} \left(\frac{\Delta L}{L}\right)^2 = \frac{N^2 L}{2EA}$$

弹性势能

(作业: 2-15, 2-14, 2-30)

勒让德变换:

定义: 若存在一个函数 $U(x_1, \dots, x_n)$ 使 $y_k = \frac{\partial U}{\partial x_k}$ 成立, 且称

$y_1, y_2, \dots, y_n$ 是有势的, $U(x_1, \dots, x_n)$ 就是势函数。

定理: 若 $U(x_1, \dots, x_n)$ 使 $y_k = \frac{\partial U}{\partial x_k}$ 成立, 则存在 $\Phi(y_1, \dots, y_n)$, 使

$$x_k = \frac{\partial \Phi}{\partial y_k} \text{ 成立。}$$

定义: 上述由 $y_k = \frac{\partial U}{\partial x_k}$ 推导 $x_k = \frac{\partial \Phi}{\partial y_k}$ 的过程, 称为勒让德变换

定理: 由 $y_k = \frac{\partial U}{\partial x_k}$ 解出 $x_1, \dots, x_n$,

$$\text{则 } \Phi = \Phi(y_1, \dots, y_n) \text{ 满足}$$

$$\Phi(y_1, \dots, y_n) = x_1 y_1 - U \text{ 为满足要求的 } \Phi。$$

余能(应变势能):

由 $U(\epsilon)$ 作勒让德变换得到的 $\Phi(\sigma)$ 称为单位体积的余能(变形势)

2-8 冲击应力

(作业: 2-32, 2-35, 2-36)

大质量物体对杆件的拉伸冲击或压缩冲击的假设:

1° 大质量物体是刚体

2° 冲击后变形瞬时的发生在杆的所有截面, 且各截面变形相同。

$$\text{由 } W \cdot (H + \Delta l_{\max}) = \frac{EA}{2l} \Delta l_{\max}^2$$

$$\therefore \Delta l_{\max}^2 - 2\Delta l_{st} \Delta l_{\max} - 2H \Delta l_{st} = 0, \text{ 其中 } \Delta l_{st} = \frac{Wl}{EA}, \text{ 是重物 } W \text{ 在静力学条件下引起的变形.}$$

$$\text{解得 } \Delta l_{\max} = \Delta l_{st} + \sqrt{\Delta l_{st}^2 + 2H\Delta l_{st}} \\ = \Delta l_{st} + \sqrt{\Delta l_{st}^2 + \frac{v^2}{g}\Delta l_{st}}$$

其中 $v = \sqrt{2gH}$ 是重物在撞击杆件瞬间的速度

$$1^\circ \text{ 如果 } H \gg \Delta l_{st}, \Delta l_{\max} \approx \sqrt{2H\Delta l_{st}} = \sqrt{\frac{v^2}{g}\Delta l_{st}}$$

假设压缩量最大时, 应力分布均匀, 则最大应力

$$\sigma_{\max} = \frac{E(\Delta l_{\max})}{l} = \frac{E}{l} \left[\frac{v^2}{g}\Delta l_{st} \right]^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{Wv^2}{2g} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2E}{Al} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$2^\circ \text{ 若 } H=0, \text{ 则 } \Delta l_{\max} = 2\Delta l_{st}$$

$$\text{冲击系数: } K_d \equiv \frac{\Delta l_{\max}}{\Delta l_{st}}, \text{ 动态响应与静态响应之比.}$$

$$K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\Delta l_{st}}}$$

第三章 扭转 (Torsion)

平截面假定: 所有横截面像刚性平面一样绕杆的轴线转动, 半径保持直线, 横截面保持圆形.

$$\text{比扭转角 (单位长度的扭转角): } \theta \equiv \frac{d\varphi}{dx}$$

$$\text{切应变: } \gamma(p) = \frac{p d\varphi}{dx} = \theta p$$

$$\text{切应力: } \tau(p) = G\gamma(p) = G\theta p$$

$$\text{扭矩: } M_x = \int_A \tau(p) \cdot p dA = G\theta \int_A p^2 dA = G\theta I_p$$

$$\therefore \theta = \frac{M_x}{GI_p}, \tau(p) = \frac{M_x p}{I_p}$$

$$\text{极惯性矩: } I_p \equiv \int_A p^2 dA \quad (\text{圆面的极惯性矩: } I_p = \frac{\pi}{32} D^4)$$

$$\text{端面的相对扭转角: } \Delta\varphi = \frac{M_x l}{GI_p}$$

$$M_x = \frac{GI_p}{l} \Delta\varphi = k \Delta\varphi$$

$$\text{扭转刚度: } k \equiv \frac{GI_p}{l}$$

$$\text{应变能: } U = \frac{1}{2} T \Delta\varphi$$

(作业: 3.2, 3.5, 3.9)

分布外力偶矩 $m(x)$ 作用

$$\frac{dM_x}{dx} + m(x) = 0$$

$$\therefore M_x = M_x(0) - \int_0^x m(x) dx$$

$$\therefore \frac{d\varphi}{dx} = \frac{M_x}{GI_p}$$

$$\therefore \varphi = M_x(0) \int_0^x \frac{dx}{GI_p} - \int_0^x \left(\int_0^x \frac{m(x)}{GI_p} dx \right) dx$$

平截面假定的适用性.

$$\text{纵向相对伸长 } \varepsilon_x = \pm \gamma_p^2 = \pm \rho^2 \theta^2$$

$\therefore$ 当 $R\theta \ll 1$ 或 $\frac{\tau_{\max}}{G} \ll 1$ 时, 平截面假定成立.

对非圆截面来说, 平截面假定不成立.

刚周边假设: 杆扭转时, 其横截面在 $y-z$ 平面上的投影作刚性转动.

自由扭转: 杆件扭转时, 所有截面翘曲程度相同, 轴向纤维不伸缩, 截面上没有正应力, 只有切应力.

约束扭转: 杆的截面上除了切应力, 还有正应力.

闭口薄壁截面直杆的扭转

假设: 在壁厚不大的情况下, 认为切应力沿厚度^{方向}的变化不是主要的, 切应力只与 s 有关.

剪力流定理: 切应力与壁厚的乘积为常数.

$$\tau h = \text{常数}$$

$$\text{扭矩: } dM_x = (\tau h) \cdot p ds = (\tau h) 2dA_m \quad (A_m \text{ 截面中线所围面积})$$

$$M_x = \tau h \cdot 2A_m$$

$$\text{切应力: } \tau = \frac{M_x}{2A_m h}$$

$$\text{切应变: } \gamma = \gamma' + \gamma'' = \theta \rho \cos \alpha + \frac{du}{ds}$$

其中 $\gamma' = \theta \rho \cos \alpha$ 是截面扭转产生的剪切, α 是截面点位置与周边切线的夹角.

$\gamma'' = \frac{du}{ds}$ 是截面各点沿母线移动时产生的剪切. $u(s)$ 是各点位移, 是弧长 s 的函数.

$$\text{比扭转角: } \oint \tau ds = G \oint \gamma ds = G \oint \gamma' ds = G \theta \oint \rho \cos \alpha ds = G \theta \oint \rho ds = G \theta \cdot 2A_m$$

$$\therefore \theta = \frac{1}{2GA_m} \oint \tau ds, \text{ 其中 } \oint \tau ds \text{ 称为切应力环流.}$$

$$\text{切应力环流: } \oint \tau ds$$

比扭转角: $\theta = \frac{M_x}{4GA_m^2} \oint \frac{ds}{h} = \frac{M_x}{GC}$

其中 $C \equiv \frac{4A_m^2}{\oint \frac{ds}{h}}$ 量纲: $[长度]^4$

开口薄壁截面直杆的扭转

比扭转角: $\theta = \frac{1}{2GA_m} \oint \tau ds = \frac{2\tau S_m}{2G(2S_m y)} = \frac{\tau}{2Gy}$ 其中 y 是点到截面中心线的距离。
 S_m 是截面中心线的长度

切应力: $\tau = 2G\theta y$

扭矩: $dM_x = \frac{4GA_m^2}{\oint \frac{ds}{h}} \theta = \frac{4G(2S_m y)^2}{2S_m} \theta dy = 8GS_m y^2 \theta dy$ ($y \in [0, \frac{h}{2}]$)

$M_x = \int_0^{\frac{h}{2}} dM_x = \frac{1}{3} GS_m h^3 \theta = C G \theta$

切应力: $\tau = \frac{2M_x y}{\frac{1}{3} S_m h^3} = \frac{2M_x y}{C}$

其中 $C \equiv \frac{1}{3} S_m h^3$

$\tau_{max} = \tau(\frac{h}{2}) = \frac{M_x h}{\frac{1}{3} S_m h^3} = \frac{M_x h}{C}$

比扭转角: $\theta = \frac{M_x}{GC}$

(作业: 3.11, 3.14, 3.19, 3.21)

(作业: 4.5, 4.8, 4.6)

直杆扭转的强度条件: $\tau_{max} = \frac{(M_x)_{max}}{W_p} \leq [\tau]$

其中 W_p : 抗扭截面系数

直杆扭转的刚度条件: $\theta_{max} = \frac{(M_x)_{max}}{GC} \leq [\theta]$

其中 C : 截面的几何刚度系数

轴的动力传递: 已知传动轴传递功率 $P = N_k (kW)$, 转速 n (转/分)

则轴每分钟作功 $W = 1000 \times N_k \times 60 (J)$

又 $W = T \cdot \frac{\alpha}{\epsilon} = T \omega = 2\pi n T$

$\therefore T = \frac{60 \times 1000 N_k}{2\pi n} (N \cdot m)$

密圈螺旋弹簧计算: 假设 $D \gg d$, 簧杆的斜度 $\alpha < 5^\circ$

簧杆内的应力: (不计剪力 Q) $\tau'_{max} = \frac{M_x}{W_p} = \frac{P \cdot \frac{D}{2}}{\frac{\pi d^3}{16}} = \frac{8PD}{\pi d^3}$

(计剪力 Q) $\tau_{max} = \tau'_{max} + \tau_Q = \tau'_{max} + \frac{P}{4\pi d^3} = \frac{8PD}{\pi d^3} (1 + \frac{d}{2D})$

当 $D/d \geq 10$ 时, $d/2D \ll 1$

弹簧的变形：外力做功 $W = \frac{P\Delta}{2}$

$$\text{变形能: } U = \frac{1}{2} M \varphi = \frac{1}{2} \frac{M^2 l}{G I_p} = \frac{(PR)^2 \cdot 2\pi R \cdot n}{2 G I_p}$$

$$\text{故 } \Delta = \frac{PR^2 \cdot 2\pi R \cdot n}{G \cdot \frac{\pi d^4}{32}} = \frac{64 PR^3 n}{G d^4}$$

$$\text{刚度: } k = \frac{P}{\Delta} = \frac{G d^4}{64 R^3 n}$$

第四章 复杂应力状态

1. 平面应力状态

定义：在法线为 z 轴的截面上没有应力的微元体，处于平面应力状态。

记号：法线为 x 轴的截面上的应力分量 —— σ_x, τ_{xy}

法线为 y 轴的截面上的应力分量 —— σ_y, τ_{yx}

其中， σ_x, σ_y 在应力指向与截面外法向一致时为正，

τ_{xy}, τ_{yx} 第一个下标表示作用面法线方向的指向，第二个下标表示应力的指向。

斜截面上的应力： n 为斜截面的法线方向。

$$1^\circ \begin{bmatrix} X_n \\ Y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{bmatrix}$$

其中 X_n, Y_n 是斜截面应力在 Oxy 内的矢量分量。

$$2^\circ \begin{bmatrix} \sigma_n \\ \tau_{nt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_n \\ Y_n \end{bmatrix}$$

其中 σ_n, τ_{nt} 是斜截面应力在 Ont 内的矢量分量。

坐标变换公式：(平面应力张量变换公式)

$$1^\circ \begin{bmatrix} \sigma_n & \tau_{nt} \\ \tau_{nt} & \sigma_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

2° 标量表达式

$$\sigma_n = \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha + \tau_{xy} \sin 2\alpha$$

$$\sigma_t = \sigma_x \sin^2 \alpha + \sigma_y \cos^2 \alpha - \tau_{xy} \sin 2\alpha$$

$$\tau_{nt} = \tau_{tn} = (\sigma_y - \sigma_x) \sin \alpha \cos \alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha$$

主应力与主方向 (principle stress)

1° 主应力: 正应力的最大值和最小值称为主应力。

主平面: 发生主应力的截面称为主平面

主方向: 主平面的法向。

主坐标系: 以主方向为坐标轴的坐标系

主轴: 主坐标系的坐标轴。

2° 令 $\frac{d\sigma_n}{d\alpha} = 0$ 得, $-(\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\alpha + 2\tau_{xy} \cos 2\alpha = 0$, 即

$$\tan 2\alpha_p = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

$$\text{主应力大小 } \sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

注: 主平面上没有切应力; 两个主应力相互垂直。

$$\text{最大切应力: } \tau_{\max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\text{最大切应力面上的正应力 } \sigma = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$$

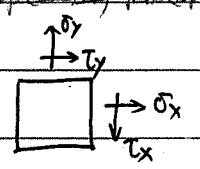
应力圆

把每个斜截面上的正应力分量 σ_n 和切应力分量 τ_{nt} 看作 σ - τ 平面上的一个点。

记法: 切应力方向是截面外法线方向顺时针转 90° 后的方向时取正值, 相反取负。

切应力分量用一个下标表示。

$$\text{则 } \tau_x = -\tau_{xy}, \tau_y = \tau_{yx}$$



$$\text{由 } \sigma_n = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\alpha - \tau_x \sin 2\alpha$$

$$\tau_n = \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\alpha + \tau_x \cos 2\alpha$$

$$\tan 2\alpha_p = \frac{-\tau_x}{\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)}$$

$$\text{得 } \begin{cases} \sigma_n - \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) = \sqrt{\frac{1}{4}(\sigma_x - \sigma_y)^2 + \tau_x^2} \cos(2\alpha - 2\alpha_p) \\ \tau_n = \sqrt{\frac{1}{4}(\sigma_x - \sigma_y)^2 + \tau_x^2} \sin(2\alpha - 2\alpha_p) \end{cases}$$

应力圆 (莫尔圆): 在以 σ 为横轴, 以 τ 为纵轴的 σ - τ 平面上, 以 $(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}, 0)$ 为中心, 以 $\sqrt{(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2})^2 + \tau_x^2}$ 为半径的圆。

2. 空间应力状态

任意截面上的应力：截面方向 $\vec{n} = (n_x, n_y, n_z)$

$$1^\circ \begin{bmatrix} X_n \\ Y_n \\ Z_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix}$$

以上为截面应力在 $Oxyz$ 坐标系下的分量

$$2^\circ \begin{bmatrix} \sigma_n \\ \tau_{nt} \\ \tau_{nr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_x & n_y & n_z \\ t_x & t_y & t_z \\ r_x & r_y & r_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_n \\ Y_n \\ Z_n \end{bmatrix}$$

以上为截面在 $O-ntr$ 坐标系下的分量

应力状态坐标变换公式：

$$\begin{bmatrix} \sigma_n & \tau_{nt} & \tau_{nr} \\ \tau_{nt} & \sigma_t & \tau_{tr} \\ \tau_{nr} & \tau_{tr} & \sigma_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_x & n_y & n_z \\ t_x & t_y & t_z \\ r_x & r_y & r_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x & t_x & r_x \\ n_y & t_y & r_y \\ n_z & t_z & r_z \end{bmatrix}$$

上式可简写为 $\Sigma' = A \Sigma A^T$,

其中 Σ 、 Σ' 分别为这一点在坐标系 $Oxyz$ 和坐标系 $O-ntr$ 内的应力状态。

主应力和主方向：

1° 若 $\vec{n}$ 为法线的截面是主平面， $\sigma_n = \sigma$ ，则

$$\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} = \sigma \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix}$$

$$\text{故} \begin{pmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} = 0$$

$$2^\circ \text{ 由} \begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma \end{vmatrix} = 0$$

和 $n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1$ ，可解出一个 $\vec{n}$ 和 σ ，进而在垂直于 $\vec{n}$ 的

平面上, 由平面应力状态分析可以求得 $\vec{t}, \vec{r}$, 代入方程可解出余下 σ .

3° 当特征方程有二重根时, 有两个主应力相等, 与第三个方向垂直的任意两个垂直方向都是主方向;

当特征方程有三重根时, $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$, 为静水应力, 任意三个相互垂直的方向都是主方向。

4° 约定主应力的编号次序为: $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$

5° 主坐标系内法向为 $\vec{n}$ 的截面上, 应力矢量 $\vec{p}_n$ 为

$$\vec{p}_n = \sigma_1 n_1 \vec{e}_1 + \sigma_2 n_2 \vec{e}_2 + \sigma_3 n_3 \vec{e}_3$$

$$\text{正应力 } \sigma = \vec{p}_n \cdot \vec{n} = \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2$$

$$\text{切应力 } \tau = \sqrt{p_n^2 - \sigma^2} = \left[\sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2 - (\sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

极值切应力:

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_3)$$

$$\text{此时 } n_1 = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}, n_3 = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}, n_2 = 0.$$

(作业: 4.10, 4.14, 4.16)

(作业: 4.20, 4.21 (-23MPa), 4.22)

(问题课: 2.9, 3.7)

3. 空间应变状态

广义胡克定律: $\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)]$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)]$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)]$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy}, \gamma_{yz} = \frac{1}{G} \tau_{yz}, \gamma_{zx} = \frac{1}{G} \tau_{zx}$$

体应变: $e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{3(1-2\nu)}{E} p \quad (0 \leq \nu \leq \frac{1}{2})$

体积模量 $k = \frac{E}{3(1-2\nu)}$, 则 $e = \frac{1}{k} p$, 其中 $p = \sigma_{\text{球应力}}$.

应变状态坐标变换公式: $E' = AEA^T$

其中 $E = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \frac{1}{2}\gamma_{zx} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{zy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{pmatrix}$ 是点在 $Oxyz$ 坐标系下的应变张量。

ε' 是点在 $O'ntr$ 坐标系下的应变张量;

A 是 $Oxyz$ 到 $O'ntr$ 坐标系的坐标变换矩阵。

平面应变状态: 只有 $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ 的材料微元处于平面应变状态。

4. 弹性变形能

$$\text{应变比能 } u = \frac{1}{2} (\sigma_1 \varepsilon_1 + \sigma_2 \varepsilon_2 + \sigma_3 \varepsilon_3) \\ = \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1)]$$

$$G \text{ 与 } E, \nu \text{ 间关系: } G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

(对纯剪切状态, $\tau_{xy} = \tau$, 则 $\sigma_1 = \tau, \sigma_2 = -\tau$,

$$\text{应变比能 } u = \frac{1+\nu}{E} \tau^2$$

$$\text{又剪切应变能 } u = \frac{1}{2} \tau \varepsilon = \frac{1}{2G} \tau^2$$

$$\text{故 } G = \frac{E}{2(1+\nu)}.$$

应力状态: 球应力状态: 只有体积改变, 没有形状改变。

$$\text{体积改变比能 } u_v = \frac{3(1-2\nu)}{2E} p^2 = \frac{1}{2k} p^2$$

偏应力状态: 偏应力 $\sigma'_1 = \sigma_1 - p, \sigma'_2 = \sigma_2 - p, \sigma'_3 = \sigma_3 - p$ 。

只有形状改变, 没有体积改变 ($\varepsilon' = 0$)。

$$\text{形状改变比能 } u_s = \frac{1+\nu}{6E} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] \\ = \frac{3\tau_0^2}{4G}$$

$$\text{其中 } \tau_0 = \frac{1}{3} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]^{\frac{1}{2}}$$

先加载球应力和偏应力 (或偏应力和球应力) 时, 弹性比能的中间项 $u_{12} = 0$, 故

$$u = u_v + u_s = \frac{p^2}{2k} + \frac{3\tau_0^2}{4G}$$

第五强度理论: (脆断) 第一类强度理论: ① 最大拉应力理论 $\sigma_1 \leq [\sigma] = \frac{\sigma_b}{n_b} \quad (\sigma_1 > 0)$

② 最大伸长应变理论 $\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3) \leq [\sigma] = \frac{\sigma_b}{n_b}$

(屈服) 第二类强度理论: ③ 最大切应力理论 (Tresca) $\sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma] = \frac{\sigma_y}{n_y}$

④ 最大形状改变比能理论 (Mises) $\sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} \leq [\sigma] = \frac{\sigma_y}{n_y}$

注: 对于①②, 在 $\sigma_1 + \sigma_2 > 0$ 时, 理论①更适用; 在 $\sigma_1 + \sigma_2 < 0$ 时, 理论②更适用。(此为平面应力状态)

对于③④, 理论③总是比理论④偏于安全, 而理论④更符合试验资料。

莫尔强度理论：①破坏条件： $\tau = f(\sigma)$

②极限曲线 $\tau = f(\sigma)$ 是各破坏条件应力状态的莫尔主圆的包络线。

用拉伸、压缩和纯剪切的破坏应力，便可足够精确地作出一段极限曲线，

可用一条与拉伸、压缩莫尔主圆相切的直线代替 $\tau = f(\sigma)$ ，且是偏于安全的。

③强度条件： $\sigma_1 - \frac{[\sigma]_t}{[\sigma]_c} \sigma_3 \leq [\sigma]_t$

其中 $[\sigma]_t$ 为许用拉应力， $[\sigma]_c$ 为许用压应力。

注：以上公式通常只适用于平面应力状态。（即 $\sigma_z = 0, i=1,2,3$ ）