No. ____
Date ____

映射又名算子。

集合是现代数学的基础.

集合　　定义

　　　　表示法

　　　　常用记法: $\mathbb{N}$　$\mathbb{Z}$　$\mathbb{Z}^+$　$\mathbb{R}$　$\mathbb{C}$

　　　　　　　　自然数　整数　正整数　实数　复数

映射　　定义: 在集合X中的任意一个x在Y中总对应着唯一一个y.

$\forall x \in X$, $\exists$ $y \in Y$

任意　　存在(exist)

(实)函数　　定义: 集合X, Y均为实数~~数~~集合的映射.

$\forall x \in X$, $\exists$唯一$y \in Y$, s.t. y与x对应.

(so that, 使得)

New: → 函数是一种对应关系. 例: $y = \sin x$ 中 sin 一函数

y, $\sin x$ 一函数值

New: → 函数是用来刻画一个过程的优秀工具。

表示法: 1.解析式　2.~~数~~图象

初等性质: ~~奇~~奇偶性:

$\forall x \in X$, 成立 $f(-x) = f(x)$ 偶.

$\forall x \in X$, 成立 $f(-x) = -f(x)$ 奇.

单调性:

$\forall x_1, x_2 \in X$, $x_1 < x_2$, 成立 $f(x_1) \le f(x_2)$　单调上升↗

(↗, ↘, 严格↗, 严格↘) ← 表示法.

有界性：

$\exists M>0,\ \forall x\in X,\ |f(x)|\le M$，$f$有界

无界性：

$\forall M,\ \exists x\in X,\ |f(x)|>M$，$f$无界

周期性：

$\forall x\in X\ \exists \underline{l>0}$, st $x+l\in X$，$f(x)=f(x+l)$

l是周期，l中最小的叫最小周期.

New※ → 周期函数左端可以不无限延长.

复合函数　记法：$f\circ g$，$f|g$

一般来说，$f\circ g\neq g\circ f$（交换律）

作业：$f\circ(g\circ h)=(f\circ g)\circ h$（结合律）

反函数　一一对应：

X定义域，$\forall x_1, x_2\in X$，$x_1\neq x_2$，$f(x_1)\neq f(x_2)$

或，如果 $f(x_1)=f(x_2)$，则 $x_1=x_2$.

有理数集是可列集.

数理逻辑：$A\Leftrightarrow B$：A,B互为充要条件

$A\Rightarrow B$：A是B的充分条件

$A\to B$：蕴含 "如果……，则……"

$\leftrightarrow$：等价

$A\vee B$：析取（或）

$A\wedge B$：合取（且）

第一章 实数.

一般地以无尽小数表示实数.

无尽小数:

形如 $\pm a_0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$ 这样的表示被称为无尽小数.

约定: 像 $\pm a_0.a_1a_2\cdots a_m0000\cdots$ 这样的无尽小数可以写成 $\pm a_0.a_1a_2\cdots a_m$, 并且称为有尽小数。

等同关系: E_1: $-0.0000\cdots = +0.0000\cdots$

E_2: $\pm b_0.b_1b_2\cdots b_p999\cdots = \pm b_0.b_1b_2\cdots(b_p+1)$ $(b_p\neq 9)$

(等同关系左边为非规范小数, 其它的称为规范小数.)

有尽小数在实数系中处处稠密, 同理, 无尽小数在实数系中处处稠密。(条件: 所有数均为规范小数).

上界: 设 $E\subset\mathbb{R}$, $E\neq\emptyset$,

如果 $\exists L\in\mathbb{R}$, st $x\leq L$, $\forall x\in E$

那么我们说集合E有上界.

下界: 略.

有界: 如果一个集合有上、下界, 则称其有界, 或称其为有界集。

上确界: 如果实数M是集合E的一个上界, 且是其最小的上界, 则称M为集合E的上确界。记为 $\sup E$. 数?

下确界: 略. 记为 $\inf E$.

确界原理: 对任意非空的$\mathbb{R}$的子集D而言, 若其有上界, 则一定有上确界。同理, 若其有下界, 则一定有下确界。

~~还是觉得这连续性的理论有问题~~

伯努力不等式: $(1+x)^n \geq 1+nx$; $\forall x\geq -1$ $(n\in\mathbb{N}_+)$

$\sin x < x < \tan x$ $(x\in(0,\frac{\pi}{2}))$

$|x| \geq |\sin x|$ $(x\in\mathbb{R})$

第二章 极限

实数序列：用自然数编号的一串实数 $\{x_n\}$，称为一个实数序列

(注：序列均有无限项，这一点与数列不同)

1.a 有界序列

定义1. 设 $\{x_n\}$ 是一个实数序列.

(1) 如果 $\exists M\in\mathbb{R}$, s.t. $x_n\le M$, $\forall n\in\mathbb{N}$

就说序列 $\{x_n\}$ 有上界，实数 M 是它的一个上界.

(2) (序列的下界) 略

(3) (序列有界) 略.

"序列有界"这事可以用符号表示为：

$(\exists K\in\mathbb{R})(\forall n\in\mathbb{N})(|x_n|\le K)$

"序列无界"的符号表示为：

$(\forall K\in\mathbb{R})(\exists n\in\mathbb{N})(|x_n|>K)$ (所有对陈述的否定均是把所有的判断否定)

(关键词：特殊值)

1.b 无穷小序列

定义2. 设 $\{x_n\}$ 是一个实数序列，如果对任意实数 $\varepsilon>0$，都存在自然数 N，使得只要 $n>N$，就有 $|x_n|<\varepsilon$，那么我们就称 $\{x_n\}$ 为无穷小序列.

符号表示：$(\forall\varepsilon>0)(\exists N\in\mathbb{N})(\forall n>N)(|x_n|<\varepsilon)$

调和级数：$x_n=\sum\frac{1}{n}$ 无界

$x_n=\sum\frac{1}{n^\alpha}$ $(\alpha>1)$ 有界

可以证明 $\{\frac{n^k}{a^n}\}$ $(|a|>1)$ 是无穷小序列.

引理：设 $\{\alpha_n\}$ 和 $\{\beta_n\}$ 是实数序列，并设存在 $N_0\in\mathbb{N}$，使得 $|\alpha_n|\le\beta_n$, $\forall n>N_0$，如果 $\{\beta_n\}$ 是无穷小序列，那么 $\{\alpha_n\}$ 也是无穷小序列. 即在 n 足够大时，$|\alpha_n|\le\beta_n$，$\{\beta_n\}$ 是~，则 $\{\alpha_n\}$ 也是~.

关键词：倒推、足够大.

No.

Date

1.c 有界序列与无穷小序列的性质.

引理 如果$\{\alpha_n\}$是无穷小序列，那么它也是有界序列

定理1 (1)两个有界序列的和与乘积都是有界序列. ~~[illegible]~~

(2)两个无穷小序列$\{\alpha_n\}$与$\{\beta_n\}$之和$\{\alpha_n+\beta_n\}$也是无穷小序列

(3)无穷小序列$\{\alpha_n\}$与有界序列$\{x_n\}$的乘积是无穷小序列

在引理的证明中，任意地定了一个界点$\varepsilon=1$，把整个序列分为a_N以后的项与$a_1\sim a_N$的部分，在前一部分中，所有项的绝对值小于界点；在后一部分中，因为只有有限项，故一定有最值，故序列有界。

在定理1(2)的证明中，用到了$\frac{\varepsilon}{2}$去凑出ε，但其在本质上，即在表示任意正数的用处上，是没有区别的，只是为了与定义相符。(其实也不必过分拘泥)

推论：(5)两个无穷小序列$\{\alpha_n\}$和$\{\beta_n\}$的乘积$\{\alpha_n\beta_n\}$也是无穷小序列.

(6)实数c与无穷小序列$\{\alpha_n\}$的乘积$\{c\alpha_n\}$也是无穷小序列

(7)有限个无穷小序列之和仍是无穷小序列，有限个无穷小序列的乘积也是无穷小序列.(应用数学归纳法)

推论(5)的证明很~~[illegible]~~ 简，也很巧妙。直接应用引理与定理1(3)

在证明引理和定理时，基本用的是定义，在证推论时，一般用定理和引理，这也是为什么叫推论的原因.

2. 收敛序列

2.a 收敛序列的定义

~~数~~极限：设$\{x_n\}$是实数序列，a是实数。如果对任意实数$\varepsilon>0$都存在自然数N使得只要$n>N$，就有

$$|x_n-a|<\varepsilon$$

那么我们就说序列$\{x_n\}$收敛，它以a为极限(或说序列$\{x_n\}$收敛于a)。

记为 $\lim x_n=a$ 或 $x_n\to a$，有时也写为

$$\lim_{n\to+\infty}x_n=a \quad 或 \quad x_n\to a\ (n\to+\infty)$$

No.
Date

不收敛的序列称为发散序列.（发散序列可能是有界序列，如 $a_n=(-1)^n$）

注记：(1) 我们用 $|x_n-a|$ 表示 x_n 逼近 a 的误差。依定义，只要我们取 n 充分大，就可以使逼近的误差任意的小.

(2) 符号表示：

$$(\forall \varepsilon>0)(\exists N\in\mathbb{N})(\forall n>N)(|x_n-a|<\varepsilon)$$

(3) 几何解释：

不论 a 点的邻域怎样的小，序列 $\{x_n\}$ 的某一项之后的所有各项都要进入这个邻域之中.

定理1 如果序列 $\{x_n\}$ 有极限，那么它的极限是唯一的.（反证法）

定理2（夹挤原理）设 $\{x_n\}\{y_n\}\{z_n\}$ 是实数序列，满足条件.

$$x_n\le y_n\le z_n,\ \forall n\in\mathbb{N}$$

如果 $\lim x_n=\lim z_n=a$

那么 $\{y_n\}$ 也是收敛序列，并且也有

$$\lim y_n=a.$$

定理3. 序列 $\{x_n\}$ 以 a 为极限 $\Longleftrightarrow$ $\{x_n-a\}$ 是无穷小序列 $\Leftrightarrow$ 存在无穷小序列 $\{\alpha_n\}$ 使得 $x_n=a+\alpha_n$，$n=1,2,\cdots$

关键词：中间量（证明[illegible]目标转[illegible]移）

2-b 收敛序列的性质.

定理4. 收敛序列 $\{x_n\}$ 是有界的.

定理5.(1) 设 $\lim x_n=a$，则 $\lim|x_n|=|a|$

(2) 设 $\lim x_n=a$，$\lim y_n=b$，则

$$\lim(x_n\pm y_n)=a\pm b.$$

(3) 设 $\lim x_n=a$，$\lim y_n=b$，则

$$\lim(x_ny_n)=ab$$

不要对不等式用乘法，更不要用除法！

No.

Date

证明：因为收敛数列是有界的，所以存在 $K \in \mathbb{R}$ 使得

$$|y_n| \le K, \quad n=1,2,\cdots$$

不妨设 $K>0$，又可取 $L \in \mathbb{R}$ 使得

$$L > |a|$$

于是
$$
\begin{aligned}
|x_n y_n - ab| &= |x_n y_n - a y_n + a y_n - ab| \\
&= |(x_n - a) y_n + a(y_n - b)| \\
&\le |y_n||x_n - a| + |a||y_n - b| \\
&\le K|x_n - a| + L|y_n - b|
\end{aligned}
$$
配凑，产生公因式.

对任意 $\varepsilon > 0$，存在 $N_1 \in \mathbb{N}$ 和 $N_2 \in \mathbb{N}$ 分别使得

当 $n > N_1$ 时，$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2K}$

当 $n > N_2$ 时，$|y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2L}$

令 $N = \max\{N_1, N_2\}$，则当 $n > N$ 时，就有

$$|x_n y_n - ab| \le K|x_n - a| + L|y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

(4) 设 $x_n \ne 0$ $(n=1,2,3,\cdots)$ $\lim x_n = a \ne 0$，则

$$\lim \frac{1}{x_n} = \frac{1}{a}.$$ （把分母化为定值，从而简化过程）

推论：(5) 设 $\lim x_n = a$，$c \in \mathbb{R}$，则

$$\lim (c x_n) = ca.$$

(6) 设 $x_n \ne 0$ $(n \in \mathbb{N})$，$\lim x_n = a \ne 0$，$\lim y_n = b$，则

$$\lim \frac{y_n}{x_n} = \frac{b}{a}.$$

注记：以下成立.（条件略去）

1. $\lim |x_n| = |\lim x_n|$ 绝对值函数连续.
2. $\lim (x_n \pm y_n) = \lim x_n \pm \lim y_n$
3. $\lim (x_n y_n) = \lim x_n \cdot \lim y_n$
4. $\lim \frac{1}{x_n} = \frac{1}{\lim x_n}$ 反比例函数连续.
5. $\lim (c x_n) = c \lim x_n$
6. $\lim \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim x_n}{\lim y_n}$

No.
Date

1. 有关极限的一些证明中常常用到绝对值不等式和加减辅助项的技巧。

如：
$$|(x_n+y_n)-(a+b)| \le |x_n-a|+|y_n-b|$$
$$|x_ny_n-ab| = |x_ny_n-ay_n+ay_n-ab|$$
$$\le |y_n||x_n-a|+|a||y_n-b|$$

2. 在讨论中引入无穷小序列可使复杂问题简单化。

2.6 收敛序列与不等式

定理6 如果 $\lim x_n < \lim y_n$，那么存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得 $n>N$ 时有
$$x_n < y_n$$

定理7 如果 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$ 都是收敛序列，且满足条件
$$x_n \le y_n, \quad \forall n > N_0$$
那么 $\lim x_n \le \lim y_n$ （依定理6反证）

注记：即使有 $x_n < y_n$，$\forall n \in \mathbb{N}$，也不能保证 $\lim x_n < \lim y_n$。

对充分大的 n，有 $n^k < k^n < n!$ （幂<指<阶）

求证：$\lim \sqrt[n]{a} = 1 \quad (a>1)$

证明：设 $a_n = \sqrt[n]{a} - 1$，则 $a = (1+a_n)^n > na_n$
$a_n < \frac{a}{n}$，又 $\lim \frac{a}{n} = 0$，
$\lim a_n = 0$，故 $\lim \sqrt[n]{a} = 1$

（思路：~~证极限~~ 证序列收敛 → 证序列无穷小 → 放大序列 → 证毕）

在放大 $\sqrt[n]{a}-1$ 的过程中，之所以引入函数 a_n 并在反表示的状态下放缩，就是因为对形如 $a^{\frac{1}{n}}$ 的式子的变形不方便，故利用其反函数形式 a^n，并予以缩小，使原式放大，得到放大结果。这种方法避免了直接放大过程中的麻烦。

证明极限的方法：1. 定义法. 2. 夹挤原理. 3. 拆出常数与无穷小序列.

大证明序列的极限值为某，先证此序列有极限！

若 $x_{n+1}=f(x_n)$，称为"动力系统"，$\{x_n\}$为轨道，$x=f(x)$为不动点。

习题笔记： $(1+\frac{1}{n})^n<e<(1+\frac{1}{n})^{n+1}$ $\Leftrightarrow$

$\frac{1}{n+1}<\ln(1+\frac{1}{n})<\frac{1}{n}$ $\Leftrightarrow$

$\ln(1+\frac{1}{n})=\ln(n+1)-\ln n$

$\frac{x}{x+1}<\ln(1+x)<x \quad (x>-1,\ x\neq 0)$

1、证明：$e=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}$

证：∵ $(1+\frac{1}{n})^n=1+1+C_n^2\cdot\frac{1}{n^2}+\cdots+C_n^k\frac{1}{n^k}+\cdots+\frac{1}{n^n}$

$=1+1+\frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n})+\cdots+\frac{1}{k!}(1-\frac{1}{n})\cdots(1-\frac{k-1}{n})+\cdots+\frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n})\cdots(1-\frac{n-1}{n})$

$<1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{k!}+\cdots+\frac{1}{n!}$

又 令 $a_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$，则 $a_{n+1}-a_n=\frac{1}{(n+1)!}>0$，$\{a_n\}$为单调递增序列，且

$a_n\le 1+1+\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\cdots+\frac{1}{(k-1)k}+\cdots+\frac{1}{(n-1)n}$

$=1+1+1-\frac{1}{n}<3$

∴ $\{a_n\}$有极限，不妨设为A.

∴ $e=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n\le\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}=A$

又对任意固定的k，有 $n\ge k$ 使得

$(1+\frac{1}{n})^n\ge 1+1+\frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n})+\cdots+\frac{1}{k!}(1-\frac{1}{n})\cdots(1-\frac{k-1}{n})$

∴ $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n\ge\lim_{n\to\infty}(1+1+\frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n})+\cdots+\frac{1}{k!}(1-\frac{1}{n})\cdots(1-\frac{k-1}{n}))$

∴ $e\ge 1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{k!}$

∴ $A=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\le e$

∴ $A=e$，即得证.

2. 求 $\lim \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$

解：~~原式~~ $\cancel{= \lim \frac{n+1}{n}\cdot\frac{\sqrt[n]{n!}}{n+1}}$

$$\frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{n+1}{n}\cdot\frac{\sqrt[n]{n!}}{n+1}$$

$$= \frac{n+1}{n}\cdot\sqrt[n]{\frac{n!}{(n+1)^n}}$$

$$= \frac{n+1}{n}\cdot\sqrt[n]{\frac{1}{2}\cdot\frac{2^2}{3^2}\cdot\frac{3^3}{4^3}\cdots\frac{n^n}{(n+1)^n}}$$

$$= \frac{n+1}{n}\cdot\sqrt[n]{\frac{1}{(1+1)^1}\cdot\frac{1}{(1+\frac{1}{2})^2}\cdots\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n}}$$

∵ $\lim\frac{n+1}{n} = 1$ $\lim\sqrt[n]{\frac{1}{(1+\frac{1}{1})^1(1+\frac{1}{2})^2\cdots(1+\frac{1}{n})^n}} = \frac{1}{e}$

∴ $\{\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}\}$ 极限存在，且 $\lim\frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}$.

3. 令 $x_1=1, x_2=\frac{1}{2}, x_n=\frac{1}{1+x_n}$，求 $\lim x_n$.

解：令 $x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$，则 x 满足 $x=\frac{1}{x+1}$

则 $|x_{n+1}-x| = \left|\frac{1}{1+x_n}-\frac{1}{1+x}\right|$

$$= \frac{|x-x_n|}{|(x_n+1)(x+1)|}$$

$$= \frac{|x_n-x|}{|(x_n+1)(x+1)|}$$

目标：得到一个压缩映射.
($|f(x)-f(y)| < \alpha|x-y|$ $(0<\alpha<1)$)
压缩映射是在迭代型的序列中证其收敛的一种手段，一般来说，为f(x)的不动点。

现证明 $\frac{1}{2}\le x_n\le 1$，1° 当 $n=1$ 时，结论成立

2° 假设当 $n=k$ $(k\in N)$ 时，结论成立，

则 $x_{k+1} = \frac{1}{1+x_k} \in [\frac{1}{2},\frac{2}{3}] \subset [\frac{1}{2},1]$

综合 ∴ $\frac{1}{2}\le x_n\le 1$

∴ $|x_{n+1}-x| < \frac{4}{9}|x_n-x|$

∴ $|x_n-x| < (\frac{4}{9})^{n-1}|x_1-x|$

又 $0\le|x_n-x|$，$\lim(\frac{4}{9})^{n-1}|x_1-x| = 0$

∴ $|x_n-x|$ 极限存在且为0，即 $\lim x_n = x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

No.
Date

1. $[a_{n+1}, b_{n+1}] = [a_{n+1}, b_{n+1}] \cap \cdots \cap [a_2, b_2] \cap [a_1, b_1]$
$= \bigcap_{k=1}^{n+1} [a_k, b_k]$

2. $\exists!$ $c = \bigcap_{k=1}^{\infty} [a_k, b_k]$
(唯一)

3. $\bigcap_{k=1}^{\infty} (0, \frac{1}{k}) = \phi$　$\bigcap_{n=1}^{\infty} (0-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) = \{0\}$.　(不要用开区间套闭区间套)

例：$x_1 = a$，$x_2 = b$，$x_n = \frac{x_{n-1} + x_{n-2}}{2}$ $(n \geq 3)$，求证 $\{x_n\}$ 收敛，求 $\lim x_n$

3-a 单调收敛原理

定义(1) 序列的递增（单调上升）；(2) 序列的递减（单调下降）；
(3) 单调序列.
(注记：严格递增（严格单调上升）；严格递增（严格单调下降）)

定理1、 递增序列 $\{x_n\}$ 收敛的充分必要条件是它有上界.
推论　递减序列 $\{x_n\}$ 收敛的充分必要条件是它有下界。
(注记：(1) $\lim x_n = \sup\{x_n\}$，$x_n \nearrow$
$\lim y_n = \inf\{y_n\}$，$y_n \searrow$
(2) 因为收敛性只与序列的尾部相关，故定理中条件可以减弱为"从某项起单调"

3-b 闭区间套原理与波尔查诺—维尔斯特拉斯定理

闭区间套：如果一列闭区间 $\{[a_n, b_n]\}$ 满足条件：(1) $[a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}]$ $\forall n \in N$；(2) $\lim (a_n - b_n) = 0$，那么我们说这列闭区间形成一个闭区间套。

定理2（闭区间套原理）：对于一个闭区间套 $\{[a_n, b_n]\}$，有：(1) $\lim a_n = \lim b_n = c$

No. ______
Date ______

(2) C是满足以下条件的唯一实数：$a_n \le C \le b_n$，$\forall n \in N$.

首先，C满足 $a_n \le C \le b_n$，$\forall n \in N$；若C'也满足这个条件，那么 $\lim a_n \le \lim C' \le \lim b_n$，故$C'=C$，即$C$为唯一的~.

（证明唯一性有两种思路：给定另一个满足条件的事物，(1) 以设定量与给定量不同为依据推导出矛盾；(2)依据原有条件推导出相等.

注：如果是"开区间套"，则C可能不在各区间中，如 $(0, \frac{1}{n})$.

定义：设$\{x_n\}$是实数序列，而 $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < n_{k+1} < \cdots$，则 $x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, \cdots\cdots, x_{n_k}, \cdots$ 也形成一个实数序列。我们称之为$\{x_n\}$的子序列（或部分序列）.

定理3：设序列$\{x_n\}$收敛于a，则它的任何子序列$\{x_n\}$也都收敛于同一极限a.

定理4：（Bolzano-Weierstrass定理）设$\{x_n\}$是有界序列，则它具有收敛的子序列.

证明：设 $a \le x_n \le b$，$\forall n \in N$，用中点 $\frac{a+b}{2}$ 把闭区间$[a,b]$分为两个子区间 $[a, \frac{a+b}{2}]$，$[\frac{a+b}{2}, b]$. 在这两个闭子区间中，至少有一个含有序列$\{x_n\}$的无穷多项，我们把这一闭子区间记为$[a_1, b_1]$. 这样下去，一般地，如已经求得闭区间$[a_k, b_k]$ 它含有$\{x_n\}$的无穷多项，那么它的两个闭子区间$[a_k, \frac{a_k+b_k}{2}]$，$[\frac{a_k+b_k}{2}, b_k]$中至少有一个含有序列$\{x_n\}$的无穷多项，记为$[a_{k+1}, b_{k+1}]$.

用上述方式，我们得到一串闭区间：

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \cdots \supset [a_k, b_k] \supset \cdots$$

其中第k个闭区间$[a_k, b_k]$的长度为 $(\frac{1}{2})^k (b-a)$，即 $\lim(a_n - b_n) = 0$.

利用闭区间套原理，存在一个实数c满足 $c \in [a_k, b_k]$ $\forall k \in N$. 顺次取 $x_{n_1}, x_{n_2}, \cdots x_{n_k}, \cdots$ 属于 $[a_1,b_1], [a_2,b_2], \cdots, [a_k, b_k], \cdots$（因为所有这些区间中均有无限项.

则 $x_{n_k} \in [a_k, b_k]$ $\forall k \in N$，有 $|x_{n_k} - c| \le b_k - a_k = \frac{b-a}{2^k}$，$\forall k \in N$

故 $\lim x_{n_k} = c$

定义：如果序列$\{x_n\}$满足条件：对任意 $\varepsilon > 0$，存在 $N \in N$ 使得当 $m, n > N$ 时，就有 $|x_m - x_n| < \varepsilon$，那么我们称之为基本序列（柯西序列）.

引理：基本序列有界。

No.
Date

定理5.(收敛原理)：序列$\{x_n\}$收敛$\Longleftrightarrow$序列$\{x_n\}$是基本序列

充分性：□.

必要性：(借数连接x_n, a)引用波尔查诺-魏尔斯特拉斯定理，$\{x_n\}$有收

找极限 敛子序列$\{x_{n_k}\}$，令$\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}=a$，

$\because$对任意$\varepsilon>0$，$\exists N\in N$，st. $\forall m,n>N$，$|x_m-x_n|<\frac{\varepsilon}{2}$

又$\exists N_1\in N$，st. $\forall k>N_1$ $|a-x_{n_k}|<\frac{\varepsilon}{2}$，取$k>\max\{N,N_1\}$，对任$n>N$

$|a-x_n|=|a-x_{n_k}+x_{n_k}-x_n|$

联合 $\le|a-x_{n_k}|+|x_{n_k}-x_n|$

$=\varepsilon$.

$\therefore \lim x_n=a$.

变形：对任意$\varepsilon>0$，$\exists N\in N$，st. $\forall n>N$和$p\in N$，$|x_{n+p}-x_n|<\varepsilon$，

则$\{x_n\}$是基本序列.

定义：给定一个由非负实数排成的无穷三角形表

t_{11},

t_{21} t_{22}

t_{31} t_{32} t_{33},

— — — — —

t_{n1} t_{n2} t_{n3} ---, t_{nn}

— — — —

如果这数表满足条件 (1) $\sum\limits_{k=1}^{n} t_{nk}=1$，$\forall n\in N$；(2)对任意给定k都有$\lim\limits_{n\to\infty} t_{nk}=0$.

那么我们就把这样的数表$\{t_{nk}\}$叫做托布利兹数表或托布利兹阵.

并把序列变换 $\beta_n=\sum\limits_{k=1}^{n} t_{nk}\alpha_k$，$n=1,2,\cdots$叫做托布利兹变换.

引理1：设$\{t_{nk}\}$是一个托布利兹数表，$\{\alpha_n\}$是任意一个无穷小序列，设$\beta_n=\sum\limits_{k=1}^{n} t_{nk}\alpha_k$，

则 $\lim \beta_n=0$.

引理2：设$\{t_{nk}\}$是个托布利兹数表，$\{u_n\}$是收敛于a的序列，$V_n=\sum\limits_{k=1}^{n} t_{nk}u_k$，则$\lim V_n=a$.

斯笃兹定理：设$\{x_n\}$，$\{y_n\}$是实数序列，$0<x_1<x_2<\cdots<x_n<x_{n+1}<\cdots$，且$\lim x_n=+\infty$.

如果存在有穷极限$\lim\frac{y_n-y_{n-1}}{x_n-x_{n-1}}=a$，那么也就一定有$\lim\frac{y_n}{x_n}=a$.

No.
Date

函数的极限：

定义I：设 $a, A\in\overline{R}$，并设函数 $f(x)$ 在 a 点的某个去心邻域 $\check{U}(a)$ 上有定义。如果
(序列式)
对于任何满足条件的 $x_n\to a$ 的序列 $\{x_n\}\subset\check{U}(a)$，相应的函数值序列 $\{f(x_n)\}$ 都以 A 为极限，则 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$.

定义II：设 $a, A\in R$，并设函数 $f(x)$ 在 a 点的某个去心邻域 $\check{U}(a,\eta)$ 上有定义。如
(ε-δ式)
果对任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得只要 $0<|x-a|<\delta$，就有 $|f(x)-A|<\varepsilon$
那么说 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$.
双任意小量 (ε,δ)，
双接近量 (a,A).

定理5：设 $a, A\in R$，并设函数 $f(x)$ 在 a 的某个去心邻域 $\check{U}(a,\eta)$ 上有定义，则关于极限 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$ 的两个定义 (I, II) 彼此等价

引理：设 $a, A\in R$，$\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$，则存在 $\eta>0$，使函数 f 在 $\check{U}(a,\eta)$ 上有界。

引理：设 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$，这里 $a, A\in R$，$A\neq 0$，则存在 $\eta>0$ 使得对于 $x\in\check{U}(a,\eta)$ 有 $|f(x)|>\frac{|A|}{2}$

函数极限的四则运算：

(1) $\lim\limits_{x\to a} f(x)\pm g(x)=\lim\limits_{x\to a} f(x)\pm\lim\limits_{x\to a} g(x)$

(3). $\lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot g(x)=\lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to a} g(x)$

(4) $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a} f(x)\Big/\lim\limits_{x\to a} g(x)$ $\quad(\lim\limits_{x\to a} g(x)\neq 0)$

定理7 (关于函数极限的收敛原理) 设函数 $f(x)$ 在 $\check{U}(a,\eta)$ 上有定义，则使得有穷极限 $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ 存在的充分必要条件是：
对任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，s.t. 只要 x 与 x' 满足 $0<|x-a|<\delta$，$0<|x'-a|<\delta$，就有 $|f(x)-f(x')|<\varepsilon$.

定义 II_3 对 $\forall M>0$，$\exists\,\delta>0$，$0<|x-a|<\delta$，$|f(x)|>M$，则
$\lim\limits_{x\to a}|f(x)|=\infty$ 　　绝对值！

左邻域 $U^-(a,\delta)$，去心左邻域 $\check{U}^-(a,\delta)$，$\sim U^+(a,\delta)$，$\sim\check{U}^+(a,\delta)$

左极限：$\forall \varepsilon>0$，$\exists \delta>0$ 当 $0<x_0-x<\delta$，$|f(x)-A|<\varepsilon$，~~[illegible]~~

则 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=A = f(x_0^-)$ 左极限！

定义 II_2：设函数 $f(x)$ 对于 $x>H$ 有定义，如果对任意 $\varepsilon>0$，$\exists \Delta>0$，使得 x 要 $x>\Delta$，就有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，那么

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=A.$$

例题：证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$.

$\because \left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]}<\left(1+\frac{1}{x}\right)^x<\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1}$

而 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]+1}\Big/\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)=e$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]}\cdot\left(1+\frac{1}{[x]}\right)=e$

$\therefore \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$

注意 $x\to-\infty$ 的情况！ $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim\limits_{y\to+\infty}\left(1-\frac{1}{y}\right)^{-y}=\lim\limits_{y\to+\infty}\left(\frac{y}{y-1}\right)^y$

$=\lim\limits_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y-1}\cdot\left(1+\frac{1}{y-1}\right)=e$

渐近线 $y=f(x)$，$y=kx+b$，$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(kx+b)=0$ 或 $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-(kx+b))=0$

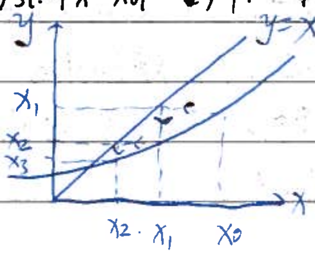
推导：$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(kx+b)]=0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x}-k\right)=0 \Rightarrow k=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(kx+b)]=0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-kx)=b.$

（把函数极限定义中的 A 代换为 $f(x_0)$，即 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$）

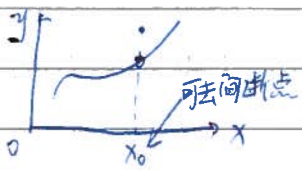
函数的连续性：$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，s.t. $x\in \mathring{U}(x_0,\delta)$ / $|x-x_0|<\delta$，$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$

不动点（迭代法）



若 $\{x_n\}$ 收敛，则 $\lim x_n = x^*$（不动点）

间断　可去间断点



No.
Date

连续函数集合 $C(a,b)$，$C[a,b]$ （在区间 (a,b) 或 $[a,b]$ 上连续的函数集）

习题课：两个重要极限 $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1 \dashrightarrow (\frac{0}{0}\text{型(或转型)的第一个结论}) \\ \lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e \dashrightarrow (1^{\infty}\text{型(或转型)的第一个结论}) \end{cases}$

函数的连续性：$\begin{cases} f(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}f(x) \\ f(x_0)=f(\lim\limits_{x\to x_0}x) \end{cases} \Rightarrow f(\lim\limits_{x\to x_0}x)=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$

结论：极限与函数运算可交换.

例1、求 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n^2})^n$，$\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{n^2}$

1° $(1+\frac{1}{n^2})^n=\left((1+\frac{1}{n^2})^{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}<e^{\frac{1}{n}}$　$\lim e^{\frac{1}{n}}=\underline{0}$?　$\therefore \lim(1+\frac{1}{n^2})^n=0$.

2° $(1+\frac{1}{n})^{n^2}\geq 1+n$　$\lim 1+n=+\infty$　$\therefore \lim(1+\frac{1}{n})^{n^2}=+\infty$

（关键：把双变n转化为一个n，用放缩的方法）.

$\longrightarrow$ 结论 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a$，$(a>0且a\neq 1)$（不出现三角函数的 $\frac{0}{0}$ 型极限）

（证明：$\because \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{x}{x}}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x}=1$

$\therefore \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(e^{\ln a})^x-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x\ln a}-1}{x\ln a}\ln a$

（换元收敛）令 $t=x\ln a$，

则原式 $=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{e^t-1}{t}\ln a=\ln a$.）

例2：求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n$ $(a>0, b>0)$

原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}-1\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}-1\right)^{\frac{1}{\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}-1}\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}-1\right)n}$

考虑 $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[n]{a}-1)n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{a}-1}{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a$

（令 $x=\frac{1}{n}$）

$\therefore$ 原式 $=\sqrt{ab}$

例3. 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\cos\frac{a}{x})^{x^2}$

原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+(\cos\frac{a}{x}-1)\right)^{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\cos\frac{a}{x}-1\right)^{\frac{1}{\cos\frac{a}{x}-1}(\cos\frac{a}{x}-1)x^2}$

又 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\cos\frac{a}{x}-1)x^2=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cos\frac{a}{x}-1}{(\frac{1}{x})^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-2\sin^2\frac{a}{2x}}{\frac{4}{a^2}(\frac{a}{2x})^2}=-\dfrac{a^2}{2}$

$\therefore$ 原式 $=e^{-\frac{a^2}{2}}$

No. ______

Date ______

例4. 已知 $f(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 上↗，$\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$，若 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$.

证明：$\lim f(x) = A$.

证明：1° 证明 $f(x_n) \le A$ 对 $\forall n$ 成立

假设上述命题不成立，则 $\exists n$，

st $f(x_n) > A$，

构造 $\{x_{n_k}\}$ 使得 $x_{n_1} = x_n$，

$x_{n_k} < x_{n_{k+1}}$，

则 $f(x_{n_k}) \le f(x_{n_{k+1}})$

$\therefore f(x_{n_k}) \ge f(x_n) > \dfrac{f(x_n)+A}{2}$ ①　放缩技巧

$\because \lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$

又对①式两边取极限有

$\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) \ge \dfrac{A+f(x_n)}{2} > A$

$\therefore A > A$，矛盾，即得证

2° 证明 $\forall x > a$，$f(x) \le A$

又对 $\forall x > a$，$\exists n$，st $x_n > x$

$\therefore f(x_n) \ge f(x)$

又 $f(x_n) \le A$

$\therefore f(x) \le f(A)$ $(\forall x > a)$

3° 证明 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists M$，st $\forall x > M$，

$|f(x) - A| < \varepsilon$

$\because f(x) \le A$

$\therefore |f(x) - A| = A - f(x)$

$\because \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$，

$\therefore \exists N$，st $n > N$，

$A - f(x_n) < \varepsilon$

令 $M = x_N$，则 $A - f(x) \le A - f(x_N) < \varepsilon$

$\therefore \square$.

第1°2°步都在为第3°步中的转化作铺垫。

N-L公式：

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

其中 $y = F(x)$ 是 $y = f(x)$ 的原函数，即 $f(x) = F'(x)$

习题课笔记：

例：求证 $\lim \sin n$ 不存在.

(反证法) 假设 $\lim \sin n$ 存在且为 A，

则 $\sin(n-1) = \sin n \cos 1 - \cos n \sin 1$

$\sin(n+1) = \sin n \cos 1 + \cos n \sin 1$

$\therefore \dfrac{\sin(n+1) - \sin(n-1)}{2} = \cos n \sin 1$，两取极限.

$\therefore \lim \cos n = 0$，$\therefore \lim \sin 2n = 0$，又 $\lim \sin 2n = \lim \sin n = A$

$\therefore$ 矛盾.

No. ____________

Date ____________

例2*. 求 $\lim n\cdot\sin(2\pi e\cdot n!)$

解：∵ $e = 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{\theta_n}{n\cdot n!}$ $(0<\theta_n<1)$

∴ $2\pi e\cdot n! = 2\pi\left(n!+n!+A_n^{n-2}+\cdots+A_n^n+\frac{\theta_n}{n}\right)$

∴ $\sin(2\pi e\cdot n!) = \sin 2\pi\frac{\theta_n}{n}$

∴ $n\cdot\sin\left(2\pi\frac{\theta_n}{n}\right) = \frac{\sin\left(2\pi\frac{\theta_n}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = \frac{\sin\left(2\pi\frac{\theta_n}{n}\right)}{\frac{2\pi\theta_n}{n}}2\pi\theta_n.$

又 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin(2\pi\theta_n/n)}{\frac{2\pi\theta_n}{n}}=1$，故若所求极限存在，则为 $\lim\limits_{n\to\infty}2\pi\theta_n$.

∵ $e=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{\theta_n}{n\cdot n!}$

$e=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots\cdots+\frac{1}{(n+1)!}+\frac{\theta_{n+1}}{(n+1)(n+1)!}$

∴ $\frac{\theta_n}{n\cdot n!}=\frac{1}{(n+1)!}+\frac{\theta_{n+1}}{(n+1)(n+1)!}$

∴ $\theta_n=\frac{n}{n+1}+\frac{n}{(n+1)^2}\theta_{n+1}$，可以看出当$n$很大时 $\theta_n\approx\frac{n}{n+1}$.

∴ θ_n 极限存在 且 $\lim\theta_n = 1$.

∴ 原式$=2\pi$.

例4. 求 $\lim\frac{\sum_{k=0}^{n}\ln C_n^k}{n^2}$

(Stolz定理解)

∵ $\frac{\sum_{k=0}^{n+1}\ln C_{n+1}^k-\sum_{k=0}^{n}\ln C_n^k}{(n+1)^2-n^2} = \frac{\ln\frac{C_{n+1}^1}{C_n^1}+\ln\frac{C_{n+1}^2}{C_n^2}+\cdots+\ln\frac{C_{n+1}^n}{C_n^n}}{2n+1}$

$\cancel{\ln\frac{(n+1)}{n}\frac{(n+1)}{n-1}\cdots\frac{n+1}{1}} = \frac{\ln(n+1)^n-\ln n!}{2n+1}$

又 $\frac{[\ln(n+1)^n-\ln n!]-[\ln n^{n-1}-\ln(n-1)!]}{(2n+1)-(2n-1)} = \frac{\ln(1+\frac{1}{n})^{n}\cdot\frac{1}{n}+\ln\frac{1}{n}}{2}$

$=\frac{1}{2}\ln(1+\frac{1}{n})^n+\cancel{\ }\ln\frac{1}{n}$

∴ $\lim\left(\frac{1}{2}\ln(1+\frac{1}{n})^n+\cancel{\ }\ln\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2}$

∴ $\lim\frac{\sum_{k=0}^{n}\ln C_n^k}{n^2}=\frac{1}{2}$

(用了两次stolz定理，照样递推，有创意!)

介值定理1：设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续。如果 $f(a)f(b)<0$，则必存在一点 $c\in(a,b)$，使得 $f(c)=0$.

(闭区间套法)证明：不妨设 $f(a)<0<f(b)$.

若 $f(\frac{a+b}{2})=0$，则可取 $c=\frac{a+b}{2}$.

若 $f(\frac{a+b}{2})\neq 0$，取 $f(a),f(b)$ 中与 $f(\frac{a+b}{2})$ 异号的一个，构成区间 $[a_1,b_1]$ 使得 $f(x)$ 在区间两端异号.

重复上面的讨论。一般地，假设已作出一串闭区间 $[a_1,b_1],\cdots,[a_k,b_k]$，满足条件：

$[a,b]\supset[a_1,b_1]\supset\cdots\supset[a_k,b_k]$,

$0<b_k-a_k=\frac{b-k}{2^k}$,

$f(a_k)<0<f(b_k)$,

我们再考查点 $\frac{a_k+b_k}{2}$，若 $f(\frac{a_k+b_k}{2})=0$，则可取 $c=\frac{a_k+b_k}{2}$. 取 $f(\frac{a_k+b_k}{2})\neq 0$，则记使 f 在两端异号的区间 $[a_{k+1},b_{k+1}]$.

按照上述程序做下去，可能出现两种情形：

1° 得到一个 $c=\frac{a_m+b_m}{2}$，使得 $f(c)=0$

2° 得到一个闭区间序列 $\{[a_n,b_n]\}$，它收缩到唯一的一点

$c=\lim a_n=\lim b_n$，$c\in[a,b]$.

因为 f 在 $[a,b]$ 上连续，所以 $f(c)=\lim f(a_n)=\lim f(b_n)$

$\because$ $f(a_n)<0<f(b_n)$

$\therefore$ $\lim f(a_n)\leq 0\leq \lim f(b_n)$

$\therefore$ $f(c)=0$ $\square$.

介值定理不仅在理论上很重要，而且还为我们提供了求方程的根的一种近似求法——对分区间法.

介值定理2：设函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 上连续。如果在这闭区间的两端点的函数值 $f(a)=\alpha$ 与 $f(b)=\beta$ 不等，那么这两点之间的函数值能够取得介于 α 与 β 之间的任意值 γ.

证明：构造函数 $g(x)=f(x)-r$，运用定理1.

习题课笔记：

1、海涅(Heine)归结原理：

$\lim\limits_{x\to a} f(x)=A \iff \forall\{x_n\}$，若 $x_n\to a$ 且 $x_n\neq a$，$f(x_n)\to A\ (n\to\infty)$

$\iff \forall\{x_n\}\subseteq \mathring{U}(a,\delta)$，$x_n\to a$，且 $f(x_n)\to A\ (n\to\infty)$

推论：1. $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=A \iff \forall\{x_n\}$，$x_n>a$，$x_n\to a$，且 $f(x_n)\to A$

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A \iff \forall\{x_n\}$，$x_n\to+\infty$ 有 $f(x_n)\to A$

推广：f在x_0点连续：

① $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $|x-x_0|<\delta$ 时，$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$

② $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$

③ $f(x_0^+)=f(x_0^-)=f(x_0)$

※ ④ $x_n\to x_0 \Rightarrow f(x_n)\to f(x_0)$ $(\forall\{x_n\})$ (注意这里没有了对 $x_n\neq x_0$ 的限制

⑤ $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，st $f(U(x_0,\delta))\subset U(f(x_0),\varepsilon)$

2. 几组在 $x\to 0$ 时速度一致的函数：(等价)

稳证 ① $\sin x$，$\arcsin x$，$\tan x$，$\arctan x$，e^x-1，$\ln(1+x)$，x

② $\frac{1}{2}x^2$，$1-\cos x$

例：设f在$(0,+\infty)$上连续，$f(x^2)=f(x)$，$\forall x>0$，证明 $f(x)$ 为常函数。

∵ $f(x^2)=f(x)\ (x>0)$ ∴ $f(x)=f(x^{\frac{1}{2}})\ (x>0)$

∴ $f(x)=f(x^{\frac{1}{2}})=f(x^{2^{-2}})=\cdots=f(x^{2^{-n}})$

令 $f(x^{2^{-n}})=a_n$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty} f(x^{2^{-n}})$

∵ f在$(0,+\infty)$上连续，$x^{2^{-n}}>0$

No.
Date

$\therefore$ 原式 $= f(\lim\limits_{n\to\infty} x^{2^{-n}}) = f(1)$

又 $a_n = f(x)$ 恒成立

$\therefore f(x) = f(1)$，即 $f(x)$ 为常函数。

例：设 f 在 $[0,+\infty)$ 上连续，且 $0 \le f(x) \le x$，$(\forall x \ge 0)$，若 $a_1 > 0$，$a_{n+1} = f(a_n)$，求证：① $\lim a_n$ 存在 ② 设 $\lim a_n = t$，则 $f(t) = t$，③ 如果将条件改为 $0 \le f(x) < x$，$(\forall x > 0)$，则 $t = 0$.

证明：① $\because 0 \le a_{n+1} = f(a_n) \le a_n$ 恒成立

$\therefore \{a_n\}$ 单调递减有下界 0，故 $\lim a_n$ 存在.

② $\because f(\lim a_n) = f(t)$，又 f 在 $[0,+\infty)$ 上连续

$\therefore f(\lim a_n) = \lim f(a_n) = \lim a_{n+1} = t$

$\therefore f(t) = t$

③ $\because$ 当 $x > 0$ 时 $f(x) < x$，而 $f(t) = t$

$\therefore t \le 0$，又 0 是 $\{a_n\}$ 的下界 故 $t \ge 0$

$\therefore t = 0$。

例：设 $f(x)$ 在 (a,b) 上最多只可能有第一类间断点，且 $\forall x, y \in (a,b)$ $f(\frac{x+y}{2}) \le \frac{f(x)+f(y)}{2}$，求证 $f(x)$ 在 (a,b) 上连续.

证明：$\forall x \in (a,b)$，$\lim\limits_{y\to x^+} f(\frac{x+y}{2}) = f(x^+)$

而 $f(\frac{x+y}{2}) \le \frac{f(x)+f(y)}{2}$

$\therefore \lim\limits_{y\to x^+} f(\frac{x+y}{2}) \le \frac{f(x)+f(x^+)}{2}$

$\therefore f(x^+) \le \frac{f(x)+f(x^+)}{2}$，即 $f(x^+) \le f(x)$ ①

同理可得 $f(x^-) \le f(x)$ ②

$\because f(x) = f(\frac{(x+h)+(x-h)}{2}) \le \frac{f(x+h)+f(x-h)}{2}$

令 $h \to 0^+$ $\therefore x+h \to x^+$，$x-h \to x^-$

取极限 $f(x) \le \frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$ ③

由①②③，有 $f(x) = f(x^-) = f(x^+)$

No. ________

Date ________

$\therefore \forall x_0 \in (a,b)$，$f(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$，即 $f(x)$ 在 (a,b) 上连续。

说明：第一个条件说明 $\forall x \in (a,b)$，$f(x^+)$、$f(x^-)$ 存在，故在解题过程中可以使用这两个极限。

定理3：设函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则 f 在 $[a,b]$ 上有界。

反证法：假设 f 在 $[a,b]$ 上无界，~~则 $\exists x_0 \in [a,b]$，使得~~

则 f 至少在 $[a, \frac{a+b}{2}]$ 与 $[\frac{a+b}{2}, b]$ 中的一个上无界，设其为 $[a_1,b_1]$.

依此类推，假设 f 在 $[a_k,b_k]$ 上无界，则 f 至少在 $[a_k, \frac{a_k+b_k}{2}]$ 与 $[\frac{a_k+b_k}{2}, b_k]$ 有一个上无界，设为 $[a_{k+1}, b_{k+1}]$.

则 ① $a \le a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_k \le \cdots \le b_k \le \cdots \le b_2 \le b_1 \le b$

② $|b_k - a_k| = (\frac{1}{2})^k |b-a| \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} b_n - a_n = 0$

$\therefore$ 存在 $c \in [a,b]$，使得 $\lim b_n = \lim a_n = c$.

即当 $x \to c$ 时，$f(x)$ 无界。

① 若 $c \in (a,b)$，则 $\forall \varepsilon - |f(c)| > 0$，$\forall \delta > 0$，s.t. $\exists x_0 \in \mathring{U}(c,\delta)$，$|f(x_0)| > \varepsilon - |f(c)|$

~~这与 f 在 c 点处连续，即 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta > 0$ st. $\forall x \in U(c,\delta)$，$|f(x) - f(c)| < \varepsilon$~~

$\therefore |f(x_0)| + |f(c)| \ge |f(x_0) - f(c)| > \varepsilon$.

这与 f 在 c 点连续矛盾.

② 若 $c = a$ 或 b，可以类似的推出矛盾.

$\therefore f$ 在 $[a,b]$ 上有界.

定理4：设函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 连续，记

$$M = \sup_{x\in[a,b]} f(x), \quad m = \inf_{x\in[a,b]} f(x)$$

则存在 $x', x'' \in [a,b]$，使得

$$f(x') = M, \quad f(x'') = m.$$

证明：由定理3和，$-\infty < m \le M < +\infty$

由上确界的定义可知：对 $\forall n \in N$，$\exists x_n \in [a,b]$，st

$M - \frac{1}{n} < f(x_n) \le M$

No.
Date

从有界序列 $\{x_n\}\subset[a,b]$ 之中，可以选取收敛的子序列 $\{x_{n_k}\}$，设
$$x_{n_k}\to x'\in[a,b]$$
由函数 f 在 x' 处的连续性可得 $f(x_{n_k})\to f(x')$

又 $M-\frac{1}{n_k}<f(x_{n_k})\le M$，令 $k\to+\infty$ 得
$$f(x')=\lim f(x_{n_k})=M$$
$\therefore$ 存在 $x'\in[a,b]$，s.t. $f(x')=M$.

同理可证明关于最小值的部分.

定义：一致连续：设 E 是 $\mathbb{R}$ 的一个子集，函数 f 在 E 上有定义.
$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，s.t. $\forall x_1,x_2\in E$ 且 $|x_1-x_2|<\delta$，
$$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$$
则称 f 在 E 上一致连续（E 的两端可开可闭）

注：一致连续 $\Leftrightarrow$ $f'(E)$ 有界
不一致连续 $\Leftrightarrow$ $f'(E)$ 无界.

定理5（一致连续性定理）：
如果函数在闭区间 $I=[a,b]$ 上连续，那么它在 I 上是一致连续的。

证明：（反证法）假设函数 f 在闭区间 I 上连续而不一致连续，
那么至少存在一个 $\varepsilon>0$，对 $\forall\delta>0$，总有 $x',x''\in I$，有
$$|x'-x''|<\delta,\ |f(x')-f(x'')|\ge\varepsilon$$
取收敛序列

对这样的 ε，$\delta=\frac{1}{n}$，存在 $x_n',x_n''\in I$，有
$$|x_n'-x_n''|<\frac{1}{n},\ |f(x_n')-f(x_n'')|\ge\varepsilon$$
$\because$ $\{x_n'\}\subset I$ 是有界序列，它具有收敛的子序列 $\{x_{n_k}'\}$，$x_{n_k}'\to x_0\in I$

与开区间的本质区别

$\because$ $|x_0-x_{n_k}''|\le|x_0-x_{n_k}'|+|x_{n_k}'-x_{n_k}''|$
$$<|x_0-x_{n_k}'|+\frac{1}{n_k}$$
$\therefore$ $x_{n_k}''\to x_0$.

$\because$ 函数在 x_0 点连续
$$\therefore f(x_0)=\lim f(x_{n_k}')=\lim f(x_{n_k}'')$$
这与 $|f(x_{n_k}')-f(x_{n_k}'')|\ge\varepsilon$ 矛盾.

$\therefore$ 函数 f 在 I 上必须是一致连续的. □

No. ______

Date ______

引理　　区间 $\Longleftrightarrow$ 连通集合.

定理1　　如果函数 f 在区间 I 上连续，那么 $J=f(I)=\{f(x)\mid x\in I\}$ 也是一个区间.

定理2　　设函数 f 在区间 I 上单调，则 f 在 I 连续 $\Longleftrightarrow$ $f(I)$ 也是一个区间.

证明：（反证法）略

说明：　单调函数的间断点一定是第一类间断点。

定理3　　设函数 f 在区间 I 上严格单调且连续，则它的反函数 $g=f^{-1}$ 在区间 $J=f(I)$ 上严格单调且连续。

（指、对函数，初等函数连续性问题）

定理1　　对于 $a\in\mathbb{R}$，$a>0$，$p,q\in\mathbb{Q}$，有：

(1) $a^{p+q}=a^{p}\cdot a^{q}$

(2) $a>1$，$p<q\Rightarrow a^{p}<a^{q}$；$a<1, p<q\Rightarrow a^{p}>a^{q}$.

引理1　　设 $a\in\mathbb{R}$，$a>1$；$p,q\in\mathbb{Q}$，$|p-q|<1$，则 $|a^{p}-a^{q}|\le a^{q}(a-1)|p-q|$

（用于引理2的证明）

证明：———

$$a^{\frac{m}{n}}=(a^{m})^{\frac{1}{n}}=(a^{m}\cdot 1^{n-m})^{\frac{1}{n}}\le\frac{ma+n-m}{n}=\frac{m}{n}(a-1)+1$$

———

引理2　　设 $a\in\mathbb{R}$，$a>0$，$x\in\mathbb{R}$，则有：

（用于定义 a^{x}）

(1) 如果 $\{p_n\}\subset\mathbb{Q}$，$p_n\to x$，则 $\{a^{p_n}\}$ 收敛

(2) 如果 $\{p_n\}$，$\{q_n\}\subset\mathbb{Q}$，$p_n\to x$，$q_n\to x$，那么 $\lim a^{p_n}=\lim a^{q_n}$.

证明：1° $a>0$ 时，

(1) $\because$ 收敛序列 $\{p_n\}$ 有界，可设 $p_n\le M$，$\forall n\in\mathbb{N}$，$M\in\mathbb{N}$

又收敛序列 $\{p_n\}$ 是基本序列，对任意的 $\varepsilon\in(0,1)$，$\exists N\in\mathbb{N}$，st $m,n>N$ 时

$|p_m-p_n|<\varepsilon$

$\therefore |a^{p_m}-a^{p_n}|\le a^{M}(a-1)|p_m-p_n|\le a^{M}(a-1)\varepsilon$ （应用引理1）

$\therefore \{a^{p_n}\}$ 是基本序列，故 $\{a^{p_n}\}$ 收敛.

(2) $\because \lim(p_n-q_n)=0$，设 $n>N$ 时，$|p_n-q_n|<\varepsilon<1$

No.
Date

$\therefore$ 当 $n>N$ 时, 有 $|a^{p_n}-a^{q_n}| \le a^{q_n}(a-1)|p_n-q_n| \le a^M(a-1)\varepsilon$

$\therefore \lim (a^{p_n}-a^{q_n})=0$

$\therefore \lim a^{p_n} = \lim a^{q_n}$.

2° 当 $0<a\le 1$ 时, 结论由 1° 可知成立.

定义 设 $a\in\mathbb{R}$, $a>0$, x 是无理数. 我们定义

$$a^x = \lim a^{q_n} \quad (q_n \to x \text{ 且 } q_n\in\mathbb{Q})$$ 由引理2时, a^x 值存在且唯一.

定理2 对于 $a\in\mathbb{R}$, $a>0$ 和 $x,y\in\mathbb{R}$, 有:

(1) $a^{x+y}=a^x\cdot a^y$

(2) $a>1, x<y \Rightarrow a^x<a^y$; $a<1, x<y \Rightarrow a^x>a^y$

引理3 设 $a\in\mathbb{R}$, $a>1$, $x,y\in\mathbb{R}$, $|x-y|<1$, 则有 $|a^x-a^y|\le a^y(a-1)|x-y|$.

证明: (对引理1两边取极限)

定理3 设 $a\in\mathbb{R}$, $a>1$, 则指数函数 a^x 在 $\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)$ 上有定义, 严格递增且连续

证明: (前面的條纟中已经说明了有定义, 严格递增的问题, 现只说明连续性)

设 $x_0\in\mathbb{R}$, $\{x_n\}\subset\mathbb{R}$, $x_n\to x_0$.

对充分大的 n 有 $|x_n-x_0|<1$.

于是 $|a^{x_n}-a^{x_0}|\le a^{x_0}(a-1)|x_n-x_0|$

又 $\lim\limits_{n\to\infty} a^{x_0}(a-1)|x_n-x_0|=0$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} a^{x_n}-a^{x_0}=0$, 即 $\lim\limits_{n\to\infty} a^{x_n}=a^{x_0}$, 即 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

$\therefore$ 函数 a^x 在 x_0 点连续. □

推论 (对定理3的补充) 设 $a\in\mathbb{R}$, $0<a<1$. 则指数函数 a^x 在 $\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)$ 上有定义, 严格递减且连续.

引理4 设 $a\in\mathbb{R}$, $a>1$, 则: (1) $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x=+\infty$; (2) $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x=0$

证明: $\because a^n=(1+(a-1))^n\ge 1+n(a-1)$, $\forall n\in\mathbb{N}$

对 $\forall M>0$, $\exists \delta=\frac{M}{a-1}+1$, $\forall x>\delta$, 有 注意+1的作用.

$$a^x\ge a^{[x]}\ge 1+[x](a-1)>1+\frac{M}{a-1}(a-1)>M$$

$\therefore \lim\limits_{x\to+\infty} a^x = +\infty$

(2) $\because \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{a^x} = 0$

$\therefore \lim\limits_{x\to-\infty} a^x = 0$. □

定义： 对任意的 $y\in(0,+\infty)$，∃唯一的 $x\in(-\infty,+\infty)$，s.t. $a^x=y$.
我们把这样的 x 称为以 a 为底 y 的对数，记为 $x=\log_a y$.

定理4： 设 $a\in R$，$a>1$，则：
(1) 对数函数 $x=\log_a y$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上有定义，严格递增且连续；
(2) $\lim\limits_{y\to+\infty} \log_a y=+\infty$，$\lim\limits_{y\to0^+}\log_a y=-\infty$.

证明：(2) 对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\Delta=a^{\varepsilon}>0$，对 $\forall y>\Delta$，

$\log_a y > \log_a\Delta=\varepsilon$

$\therefore \lim\limits_{y\to+\infty}\log_a y=+\infty$

又 $\because \log_a y=-\log_a\frac{1}{y}$，$\lim\limits_{z\to+\infty}(-\log_a z)=-\infty$.

$\therefore \lim\limits_{y\to0^+}(-\log_a\frac{1}{y})=\lim\limits_{z\to+\infty}(-\log_a z)=-\infty$

$\therefore \lim\limits_{y\to0^+}\log_a y=-\infty$. □

定义： 基本初等函数：多项式函数，有理分式函数，三角函数，反三角函数，指数函数，对数函数、幂函数。它们在定义域内都是连续的。
初等函数： 基本初等函数经过有限次四则运算和复合而成的函数。

定理： 初等函数在定义域上连续。（因为连续函数进行一次四则运算或复合后仍然连续）.

（无穷大量、无穷小量的比较）

定义1： 设函数 $a(x)$ 在 a 点的某个去心邻域 $\mathring{U}(a)$ 上有定义。
如果 $\lim\limits_{x\to a} a(x)=0$，那么我们说 $a(x)$ 是 $x\to a$ 的无穷小量（本质是函数）

定义2　设函数 $A(x)$ 在 a 点的某个去心邻域 $\mathring{U}(a)$ 上有定义。

如果 $\lim\limits_{x\to a} A(x) = \infty$，那么我们说 $A(x)$ 是 $x\to a$ 时的无穷大量.

注意，不定符号.

定义3　设函数 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 在 a 点的某个去心邻域 $\mathring{U}(a)$ 上有定义，且在 $\mathring{U}(a)$ 上 $\varphi(x)\neq 0$。则有：

(1) 若 $\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}$ 是 $x\to a$ 时的有界变量，记 $\psi(x) = O(\varphi(x))$；

(2) 若 $\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}$ 是 $x\to a$ 时的无穷小量，记 $\psi(x) = o(\varphi(x))$；

(3) 若 $\lim\limits_{x\to a}\frac{\psi(x)}{\varphi(x)} = 1$，则记　$\psi(x) \sim \varphi(x)$

注：使用以上记法时，其后要附上相应 x 的极限过程.

如果 $\psi(x) = o(\varphi(x))$，我们说 $\psi(x)$ 是比 $\varphi(x)$ 更高阶的无穷小（或更低阶的无穷大）；

如果 $\psi(x) \sim (\varphi(x))$，我们说 $\psi(x)$ 是与 $\varphi(x)$ 等价的无穷小（或等价的无穷大）.

(4) 若 $\lim\limits_{x\to a}\frac{\psi(x)}{\varphi(x)} = A\neq 0$，则记　$\psi(x)\sim A\varphi(x)\ (x\to a)$，

称 $\psi(x)$ 与 $\varphi(x)$ 是同阶的无穷大(小)量。

性质：对函数 $y = x^m$ 指数越高，它就是越高阶的无穷大(小)量；

a^x 是 x^k $(a>1)$ 在 $x\to+\infty$ 时，更高阶的无穷大量；

x^k 是 $\log_a x$ $(a>0)$ 在 $x\to+\infty$ 时，更高阶的无穷大量。$\left(\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\log_a x}{x^k} = \lim\limits_{y\to+\infty}\frac{y}{(a^k)^y} = 0\right)$

例：证明：$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^\mu}{a^x} = 0$　$(a>1,\ \mu>0)$

证明：1° 已知 $\lim \frac{n^k}{a^n} = 0$

故 $\lim \frac{(n+1)^k}{a^n} = \lim \frac{n^k}{a^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^k = 0$　构造新极限，为放缩作准备.

对 $\forall \varepsilon>0$，$\exists N\in\mathbb{N}$，s.t. $\forall n>N$，有

$$0 < \frac{(n+1)^k}{a^n} < \varepsilon$$

令 $\Delta = N+1$，$\forall x>\Delta$ 有

$$0 < \frac{x^k}{a^x} \le \frac{([x]+1)^k}{a^{[x]}} < \varepsilon$$　放缩.

$\therefore \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^k}{a^x} = 0$　$(k\in\mathbb{N})$

2° 对一般的 $\mu>0$，令 $k\in\mathbb{N}$，$k\ge\mu$，当 $x\ge1$ 时，

No.
Date

$$0<\frac{x^{\mu}}{a^{x}}\le\frac{x^{k}}{a^{x}}$$ 夹挤原理

$$\therefore \lim_{x\to\infty}\frac{x^{\mu}}{a^{x}}=0$$

定理1　设$\psi(x)$与$\varphi(x)$在a点的某个去心邻域$\mathring{U}(a)$上有定义，$\varphi(x)\neq 0$.

则有 $\psi(x)\sim\varphi(x)\Longleftrightarrow\psi(x)=\varphi(x)+o(\varphi(x))$.

证明：$\lim\limits_{x\to a}\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}=1\Longleftrightarrow\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}-1\right)=0$

$\Longleftrightarrow \psi(x)-\varphi(x)=o(\varphi(x))$

定理2　设$\varphi(x)$是在a点的某一去心邻域上有定义且不等于0，则有：

(1) $o(\varphi(x))=O(\varphi(x))$

(2) $O(\varphi(x))+O(\varphi(x))=O(\varphi(x))$

(3) $o(\varphi(x))+o(\varphi(x))=o(\varphi(x))$

(4) $o(\varphi(x))\cdot O(1)=o(\varphi(x))$

$o(1)\cdot O(\varphi(x))=o(\varphi(x))$

附：无穷大量×无穷大量＝无穷大量；

无穷大量＋$O(1)$＝无穷大量。

定理3　对于极限过程$x\to 0$，有：

(1) $\sin x=x+o(x)$，$\tan x=x+o(x)$；

(2) $\cos x=1-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)$；

(3) $e^x=1+x+o(x)$；

(4) $\ln(1+x)=x+o(x)$；

(5) $(1+x)^{\mu}=1+\mu x+o(x)$。

定理4　如果$x\to a$时，$\psi(x)\sim\varphi(x)$，那么就有：

(1) $\lim\limits_{x\to a}\psi(x)f(x)=\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)f(x)$

(2) $\lim\limits_{x\to a}\frac{\psi(x)f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{\varphi(x)f(x)}{g(x)}$

(3) $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{\psi(x)g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)g(x)}$.

(用定理4) 例：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\beta x}{\sin\alpha x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\beta x}{\alpha x}=\frac{\beta}{\alpha}$；$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan(\tan x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{\frac{1}{2}x^2}=1$；$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln^2(1+x)}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{\frac{1}{2}x^2}=2$.

No. ______

Date ______

习题课笔记：例1：证明 $x^3+px+q=0\ (p>0)$ 有且仅有一个实根.

证明：存在性：$\because f(x)=x^3+px+q\ (p>0)$ 严格递增且连续.

又 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$，$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$，

故 $\exists\, C_1>0$，$st.\ f(C_1)>0$，

$\exists\, C_2<0$，$st\ f(C_2)<0$.

在闭区间 $[C_1,C_2]$ 上，连续函数 $f(x)$ 必存在 x_0，$st\ f(x_0)=0$.

唯一性：$\because f(x)$ 严格递增，故值域上的任意一个 y 对应唯一的 x.

$\therefore f(x)$ 上最多有一个 x_0，使 $f(x_0)=0$.

综合. $\square$.

例2：$f\in(a,b)$，$x_1,x_2,\cdots,x_n\in(a,b)$，证明：

$\exists\,\xi\in(a,b)$，$st.\ f(\xi)=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i)$

证明：设 $a<\alpha\le x_i\le\beta<b\ (i=1,2,\cdots,n)$

且 $m=\min\limits_{[\alpha,\beta]} f(x)$，$M=\max\limits_{[\alpha,\beta]} f(x)$.

$\therefore m\le f(x_i)\le M$.

$\therefore m\le \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i)\le M$.

$\because f(x)$ 是 $[\alpha,\beta]$ 上的连续函数，

$\therefore f(x)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上可取遍 m,M 之间的所有值.

$\therefore \exists\,\xi\in[\alpha,\beta]\subset(a,b)$，$st.\ f(\xi)=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i)$

例3：设 $f(x)\in C(a,b)$，$x_n,y_n\in(a,b)\ (n=1,2,\cdots)$，且 $x_n\to b$，$y_n\to b$.

$f(x_n)\to A$，$f(y_n)\to B$，$A<B$.

证明：$\forall\,\eta\in(A,B)$，$\exists\, z_n\in(a,b)$；$z_n\to b$，且 $f(z_n)\equiv\eta\ (n=1,2,\cdots)$

证明：设 $0<\varepsilon<\min\{\eta-A,\ B-\eta\}$

$\because x_n\to b$，$f(x_n)\to A$，故对 ε，$\exists\, N_1\in\mathbb{N}$，当 $n>N_1$ 时，$|f(x_n)-A|<\varepsilon$

同理 $\exists N_2$，当 $n\ge N_2$ 时，$|f(y_n)-B|<\varepsilon$

$\therefore$ 当 $n\ge N=\max\{N_1,N_2\}$ 时，$f(x_n)<A+\varepsilon<\eta<B-\varepsilon<f(y_n)$

$\therefore$ 在以 x_n,y_n 为端点的闭区间上，存在 z_n，$st\ f(z_n)=\eta$，$\forall n\ge N$.

$\because 0\le|z_n-x_n|\le|y_n-x_n|$ $\therefore z_n\to b$，再令 $z_1=z_2=\cdots=z_{N-1}=z_N$ 就满足条件.

No. ____
Date ____

第四章 导数

(导数与微分)

定义 设函数 $f(x)$ 在 x_0 点邻近有定义，如果存在有穷极限

$\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$，那么说函数 $f(x)$ 在 x_0 点可导，且把上述极限值称为 $f(x)$ 在 x_0 点的导数，记为 $f'(x_0)$.

定理1 (导数的线性性质). 设 $f(x), g(x)$ 在 x 点可导，$c \in R$，则 $f+g$ 和 cf 也在 x 点可导，且

$$(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)$$
$$(cf(x))' = cf'(x)$$

定义 若 $f(x)$ 在 (a,b) 上每一点导数都存在，则说 f 在 (a,b) 可导；
若 $f(x)$ 在 (a,b) 上可导，在 a 点右导数存在，在 b 点左导数存在，则说 f 在 $[a,b]$ 上可导

定义 (单侧导数) 设函数 f 在 $(x-\eta, x]$ 有定义，如果存在有穷的左侧极限

$\lim\limits_{h \to 0^-} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$，那么我们说函数 f 在 x 点左侧可导，

且把上述左侧极限称为函数 f 在 x 点的左导数，记为 $f'_-(x)$

同理可以定义右导数，记为 $f'_+(x)$.

定理2 设 f 在 x 点邻近有定义，则 f 在 x 点可导 $\Longleftrightarrow$ 它在这点的两个单侧导数都存在且相等。

注：连续函数不一定可导，如 $f(x)=|x|$；连续函数不一定存在左右导数，如 $f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x} & (x\neq 0) \\ 0 & (x=0) \end{cases}$

定义 设函数 $f(x)$ 在 x 点邻近有定义，如果 $f(x+h)-f(x) = Ah + o(h)$，
其中 A 与 h 无关，那么我们就说函数 f 在 x 点可微.

定理3 函数 f 在 x 点可导 $\Longleftrightarrow$ 它在这点可微.

定理4 设函数 $f(x)$ 在 x_0 点可微(可导)，那么它在这点连续.

No.

Date

证明：∵ $f(x_0+h)-f(x_0)=Ah+o(h)$

∴ $f(x_0+h)=f(x_0)+Ah+o(h)$

∴ $\lim\limits_{h\to0}f(x_0+h)=\lim\limits_{h\to0}(f(x_0)+Ah+o(h))=f(x_0)$

∴ $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$ □.

注：记号“$:=$”读作“定义为”.

定义：设函数 $y=f(x)$ 在 x_0 点可微. 则记.

$$dx:=\Delta x$$

$dy:=f'(x_0)dx=f'(x_0)\cdot\Delta x$，并把 dy 叫做函数 $y=f(x)$ 在 x_0 点的微分。

注：(1) 微分 $dy=f'(x_0)\cdot dx$ 是切线函数的增量

(2) 微分 $dy=f'(x_0)\cdot dx$ 是增量 $\Delta y=f(x_0-\Delta x)-f(x_0)$ 的线性部分，dy 与 Δy 仅仅相差一个高阶的无穷小量 $o(\Delta x)$.

(3) $\dfrac{dy}{dx}=f'(x_0)$

(4) 可以认为 dx 是对 $y=x$ 的微分，$dy=1\cdot dx=dx$；而 $d^2y=0\cdot dx^2$，即 $d^2x=0$

(求导法则) 定理1 设函数 u 与 v 在 x_0 点可导，则以下各式在 $x=x_0$ 处成立：

(1) $(u(x)\pm v(x))'=u'(x)\pm v'(x)$

(2) $(u(x)\cdot v(x))'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$

(3) $\left(\dfrac{u(x)}{v(x)}\right)'=\dfrac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{(v(x))^2}$ $(v(x)\neq0)$

定理2 (链式法则) 设函数 $f(x)$ 在 x_0 点可导，函数 $g(y)$ 在 $y_0=f(x_0)$ 点可导，则复合函数 $\varphi(x)=g\circ f(x)$ 在 x_0 点也可导，且

$$\varphi'(x_0)=g'(f(x_0))\cdot f'(x_0)$$

证明：$\varphi(x)-\varphi(x_0)=g(f(x))-g(f(x_0))$

$=g'(f(x_0))(f(x)-f(x_0))+o(f(x)-f(x_0))$

$=g'(f(x_0))[f'(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0)]+o[f(x)-f(x_0)]$

$=g'(f(x_0))f'(x_0)(x-x_0)+g'(f(x_0))\,o(x-x_0)+o[f(x)-f(x_0)]$

$$= g'(f(x_0))\cdot f'(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0)\ .\ \square.$$

证明二：令 $\psi(y)=\begin{cases}\dfrac{g(y)-g(f(x_0))}{y-f(x_0)} & (y\neq f(x_0))\\ g'(f(x_0)) & (y=f(x_0))\end{cases}$ 构造函数.

显然这函数在 $f(x_0)$ 点连续. 这对后面的 $\lim\limits_{x\to x_0}\psi(f(x))$ 有意义.

claim： $\dfrac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{x-x_0}=\psi(f(x))\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ ①

∵ 1° 当 $f(x)\neq f(x_0)$ 时，显然成立.

2° 当 $f(x)=f(x_0)$ 时，

则 $\varphi(x)-\varphi(x_0)=0$，$f(x)-f(x_0)=0$，等式成立.

∴ ①式成立.

在①式中令 $x\to x_0$ 有.

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{x-x_0}=\psi(f(x_0))\cdot f'(x_0)=g'(f(x_0))\cdot f'(x_0)$$

∴ $\varphi'(x_0)=g'(f(x_0))\cdot f'(x_0)$. $\square$.

性质（一阶微分的形式不变性）：

不论 x 是自变量，还是 $x=\varphi(t)$ 是另一变量 t 的函数，函数 $f(x)$ 的微分表示式都具有相同的形式：

$$df(x)=f'(x)\,dx$$

证明：由定理2左右乘以 dx 得.

定理3　设函数 $y=\varphi(x)$ 在包含 x_0 点的开区间I上严格单调且连续. 如果函数在 x_0 点可导且导数 $\varphi'(x_0)\neq 0$，那么反函数 $x=\psi(y)$ 在 $y_0=\varphi(x_0)$ 处可导，且

$$\psi'(y_0)=\frac{1}{\varphi'(x_0)}=\frac{1}{\varphi'(\psi(y_0))}$$

No.

Date

初等函数导数表.

$f(x)$	$f'(x)$	备注
C	0	C是常数
x^m	mx^{m-1}	$m\in N$
x^{-m}	$-mx^{-m-1}$	$m\in N$, $x\neq 0$.
x^μ	$\mu x^{\mu-1}$	$\mu\in R$, $x>0$?
$\sin x$	$\cos x$	
$\cos x$	$-\sin x$	
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$
$\cot x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$x\neq k\pi$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\|x\|<1$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\|x\|<1$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$	
$\text{arccot}\, x$	$-\frac{1}{1+x^2}$	
e^x	e^x	
a^x	$a^x\ln a$	$a>0$, $a\neq 1$
$\ln\|x\|$	$\frac{1}{x}$	$x\neq 0$
$\log_a\|x\|$	$\frac{1}{x\ln a}$	$a>0$, $a\neq 1$, $x\neq 0$.
$\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$	
$\ln(x+\sqrt{x^2-a^2})$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}$	$\|x\|>\|a\|$

No. ______

Date ______

（参数式或隐式表示的函数求导）

一、① 一般地，设有参数表示式，

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t),\quad t\in J.$$

其中函数 φ 在区间 J 上严格单调且连续，函数 ψ 在区间 J 连续，我们可以把 t 表示为 x 的连续函数

$$t=\varphi^{-1}(x),\quad x\in I=\varphi(J)$$

于是 y 表示为 x 的连续函数

$$y=\psi(\varphi^{-1}(x)),\quad x\in I.$$

如果函数 φ 与 ψ 都在区间 J 的内点 t_0 处可导，且 $\varphi'(t_0)\neq 0$，那么由反函数与复合函数的求导法则可知函数 $\psi\circ\varphi^{-1}$ 在 $x_0=\varphi(t_0)$ 处可导，且有

$$\begin{aligned}(\psi\circ\varphi^{-1}(x))'(x_0)&=\psi'(\varphi^{-1}(x_0))(\varphi^{-1})'(x_0)\\&=\psi'(\varphi^{-1}(x_0))\frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(x_0))}\\&=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\end{aligned}$$

总结：对参数表示的函数 $x=\varphi(t),\ y=\psi(t)$，

可以按右式求导 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\quad(\varphi'(t)\neq 0)$

② 利用参数式表示的函数考查由极坐标方程给出的曲线 $r=r(\theta)$。

在平面直角坐标系上，极坐标函数可表示为：

$$\begin{cases}x=r(\theta)\cdot\cos\theta\\y=r(\theta)\cdot\sin\theta\end{cases}$$

在 $r(\theta)$ 可导与 $r(\theta)\cdot\cos\theta$ 可导的点处，有

$$\frac{dy}{dx}=\frac{r'(\theta)\cdot\sin\theta+r(\theta)\cos\theta}{r'(\theta)\cos\theta-r(\theta)\sin\theta}=\frac{\tan\theta+\frac{r(\theta)}{r'(\theta)}}{1-\tan\theta\cdot\frac{r(\theta)}{r'(\theta)}}$$

设 α 为切线与极轴（OX轴）的夹角，则 $\tan\alpha=\dfrac{\tan\theta+\frac{r(\theta)}{r'(\theta)}}{1-\tan\theta\cdot\frac{r(\theta)}{r'(\theta)}}$

$\therefore\ \dfrac{r(\theta)}{r'(\theta)}=\dfrac{\tan\alpha-\tan\theta}{1+\tan\alpha\tan\theta}=\tan(\alpha-\theta)=\tan\beta.$

β 即为切线与极径的夹角.

No. ______
Date ______

二、① 设 $D\subset\mathbb{R}$，$E\subset\mathbb{R}$．若按照方程 $F(x,y)=0$，对每一个 $x\in D$ 恰好有唯一的 $y\in E$ 与之对应，那么我们说，由条件 $F(x,y)=0$，$x\in D$，$y\in E$ 确定了一个隐函数。

② 对于隐函数存在且可导的情形，并不一定要先解出显式表示再求导，直接对隐函数所满足的方程求导往往更方便。

例 $x^2+y^2=1$ $(-1<x<1,\ y>0)$ 有 $2x+2yy'=0$，故 $y'=\frac{-x}{y}$

③ 对数求导法：

形如 $y=[u(x)]^{v(x)}$ $(u(x)>0)$ 的导数，两边取对数得

$$\ln y = v(x)\ln(u(x))$$ ，两边求导得

$$\frac{y'}{y}=v'(x)\ln(u(x))+v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}$$

$$\therefore\ y'=y\left(v'(x)\ln(u(x))+v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}\right)$$

三、高阶导数：约定 $f^{(0)}(x)=f(x)$，如果 $f^{(n-1)}(x)$ 对一切 $x\in I$ 都有定义，那么由对应关系 $x\mapsto f^{(n-1)}(x)$ 定义了函数 f 的 $n-1$ 阶导数 $f^{(n-1)}$，如果导函数 $f^{(n-1)}$ 在 x 点具有导数 $(f^{(n-1)})'(x)$，那么我们就把这导数称为是函数 f 在 x 点 n 阶导数，记为 $f^{(n)}(x)$ 或 $\frac{d^ny}{dx^n}$

例：① $y=x^\alpha$，$y^{(n)}=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$

② $y=e^{\beta x}$，$y^{(n)}=\beta^n e^{\beta x}$

③ $y=\ln(1+x)$，$y^{(n)}=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$

④ $y=\sin x$，$y^{(n)}=\sin(x+\frac{n}{2}\pi)$

⑤ $y=\cos x$，$y^{(n)}=\cos(x+\frac{n}{2}\pi)$

定理4（Leibnitz公式）乘积式高阶求导公式：函

$$(uv)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\,u^{(n-k)}v^{(k)}$$

复合函数的高阶导数：

$$h''(x)=(g'(f(x))f'(x))'=[g'(f(x))]'f'(x)+g'(f(x))[f'(x)]'$$

$$= g''(f(x))\cdot f'(x)\cdot f'(x) + g'(f(x))\cdot f''(x)$$

$$= g''(f(x))(f'(x))^2 + g'(f(x))\cdot f''(x).$$ 更高阶的导数也可用类似办法计算。

反函数的高阶导数：开区间I上，$y=F(x)$严格单调，至少二阶可导，且满足条件 $F'(x)\neq 0$.

则 $$G''(y) = \left(\frac{1}{F'(G(y))}\right)'$$

$$= -\frac{1}{[F'(G(y))]^2}\cdot F''(G(y))\cdot G'(y)$$

$$= -\frac{F''(G(y))}{(F'(G(y)))^3}$$

参数式函数的高阶导数：函数$\varphi(t)$与$\psi(t)$在开区间J上至少二阶可导，函数$\varphi(t)$在J上单格单调且$\varphi'(t)\neq 0$，则由参数式

$x=\varphi(t)$，$y=\psi(t)$，$t\in J$定义的函数

$y=f(x)=\psi(\varphi^{-1}(x))$，其二阶导数为.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \cancel{\frac{\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)'}{\varphi'(x)}} = \frac{\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)'}{\varphi'(t)} = \frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\psi'(t)\varphi''(t)}{(\varphi'(t))^3}$$

(无穷小增量公式与有限增量公式)

无穷小增量公式：$f(x_0+\Delta x) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot\Delta x + o(\Delta x)$.

应用：求函数近似值：$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\cdot\Delta x$.

定义(极值)：设函数f在区间I有定义，$x_0\in I^{\circ}$，如果$\exists x_0$的一个邻域$U(x_0,\delta)\subset I$

极值点是内点

st $\forall x\in U(x_0,\delta)$都有，

$f(x)\le f(x_0)$ $(f(x)\ge f(x_0))$ 极值点与导数无必然关系

那么我们说函数f在x_0点取得极大值(极小值) $f(x_0)$.

如果对$\forall x\in \check{U}(x_0,\delta)$都有

$f(x)<f(x_0)$ $(f(x)>f(x_0))$

那么我们就说函数f在x_0点取得严格的极大值(极小值).

定理1（费马定理）（极值的必要条件）.

设函数 f 在区间 I 有定义，在这区间的内点 x_0 处取得极值.
如果 f 在 x_0 点可导，那么必有 $f'(x_0)=0$.
（用反证法证明）.

定义：临界点：使 $f'(x_0)=0$ 的点 x_0 为函数 f 的临界点.

定理2（费马定理）

设函数 f 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 上可导。方程 $f'(x)=0$ 在 (a,b) 中只有有限个根 $x_1, x_2, \cdots, x_k$，那么函数 f 在区间 $[a,b]$ 上的最大值和最小值分别为 $M=\max\{f(a), f(x_1), \cdots, f(x_k), f(b)\}$.

$m=\min\{f(a), f(x_1), \cdots, f(x_k), f(b)\}$.

定理3（罗尔定理）

设函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 连续，在开区间 (a,b) 可导，且 $f(a)=f(b)$.
则存在 $c\in(a,b)$, st. $f'(c)=0$.

定理4（Lagrange 拉格朗日定理）（中值定理）（均值定理）

设函数 f 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 上可导，则至少存在一点 $c\in(a,b)$, st.

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

有限增量公式： $f(x)=f(x_0)+f'(\xi)(x-x_0)$ （ξ 在 x 与 x_0 之间）

$f(x_0+\Delta x)=f(x_0)+f'(x_0+\theta\Delta x)\Delta x$ （$\theta\in(0,1)$）（$\Delta x=x-x_0$）

在这些公式中，增量 Δx 不再限定为"无穷小量"，它可以是任何能使 $x=x_0+h=x_0+\Delta x\in I$ 的"有限量".

定理5：设函数 f 在区间 I 上连续，在 I^0 上可导，则

$f\equiv$ 常数 $\Longleftrightarrow f'(x)=0, \ \forall x\in I^0$

证明："$\Rightarrow$"显然.

"$\Leftarrow$" 对 $\forall x, x_0\in I$，有 $f(x)=f(x_0)+f'(\xi)\cdot(x-x_0)$ $\exists\,\xi$ 在 x 与 x_0 之间

No. ______
Date ______

$\therefore f(x)=f(x_0)$，即 $f\equiv$常数在I上成立

推论 设f与g在区间I上连续，在I^0可导，
如果 $g'(x)=f'(x)$，$\forall x\in I^0$
那么存在常数C，使得
$$g(x)=f(x)+C,\quad \forall x\in I$$

定理6 设函数f在区间I连续在I^0可导，则有
(1) f在I递增 $\Leftrightarrow$ $f'(x)\geq 0$，$\forall x\in I^0$
(2) f在I递减 $\Leftrightarrow$ $f'(x)\leq 0$，$\forall x\in I^0$

证明：(1) $\Rightarrow$ 对 $\forall x_0\in I^0$，有充分小的h
$$\text{st. } \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\geq 0$$
$$\therefore \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=f'(x_0)\geq 0$$
$\Leftarrow$ $\forall x_0, x\in I$，$\underset{x_0<x}{\exists}\ \xi\in I^0$，st. $f(x)=f(x_0)+f'(\xi)(x-x_0)\geq f(x_0)$
□.

定理7 设函数f在区间I连续在I^0可导，则有
(1) f在I上严格递增 $\Longleftrightarrow$ $f'(x)\geq 0$，$\forall x\in I^0$，且$f(x)$不在I的任何一个开子区间上恒等于0.
(2) f在I上严格递减 $\Longleftrightarrow$ $f'(x)\leq 0$，$\forall x\in I^0$，且$f(x)$不在I的任何一个开子区间上恒等于0.

证明：$\Rightarrow$ 显然
$\Leftarrow$ $\because f'(x)\geq 0$，$\forall x\in I^0$，由定理6知，
f在I上递增
假设f在I上不严格递增，则 $\exists x_1, x_2\in I$，$x_1<x_2$
st. $f(x_1)=f(x_2)$，又对 $\forall x\in(x_1,x_2)$，有 $f(x_1)\leq f(x)\leq f(x_2)$
$\therefore$ f在$[x_1,x_2]$上为常数.

由定理5知，$f'(x)\equiv 0$，$\forall x\in(x_1,x_2)\subseteq I^{\circ}$

这与条件矛盾. 即得证 □.

定理：f在$[a,b]$上可导，且$f'(a)f'(b)<0$，则$\exists\ \xi\in(a,b)$，st. $f'(\xi)=0$.

Darboux定理：$f(x)$在$[a,b]$上可导，且η是$f'(a),f'(b)$中间任意值，则$\exists\ x_0\in(a,b)$，

st. $f'(x_0)=\eta$.

定理8 (极值的第一充分条件)

设函数f在区间I有定义，在$U(x_0,\eta)\subset I$连续，在$\mathring{U}(x_0,\eta)$可导.

(1) 如果 $f'(x)(x-x_0)>0$，$\forall x\in\mathring{U}(x_0,\eta)$

那么函数f在x_0点取得严格的极小值。

(2) 如果 $f'(x)(x-x_0)<0$，$\forall x\in\mathring{U}(x_0,\eta)$

那么函数在x_0点取得严格的极大值。

注：不要求f在x_0点可导

定理9 (极值的第二充分条件)

设函数f在区间I有定义，在$x_0\in I^{\circ}$处二阶可导，并设$f'(x_0)=0$，则有

(1) 如果$f''(x_0)>0$，那么函数f在x_0点取得严格的极小值.

(2) 如果$f''(x_0)<0$，那么函数f在x_0点取得严格的极大值.

定理10：设函数f在区间I连续，在I°二阶可导，而x_0是f在I°中唯一的临界点，则有

(1) 如果$f''(x_0)>0$，则有$f(x_0)$是f在区间I上的最小值.

(2) 如果$f''(x_0)<0$，则有$f(x_0)$是f在区间I上的最大值.

(折射定律) 证明：假设费马定理是正确的，即任意两点间，光通过的路线是耗时最少的路线。

那么在两不同的均一介质内任取两点A_1,A_2，设它在界面上通过

的点为 P 点。我们已知光在均一同种介质中的传播路径是直线，那么光的完整路径为 A_1P-PA_2 这条折线。作 A_1O，A_2O' 垂直于界面，

设 $A_1O=h_1$，$OP=x$，$PO'=l-x$，$A_2O'=h_2$，光沿 A_1P 传播速度为 c_1，沿 PA_2 传播速度为 c_2.

则设 $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+h_1^2}}{c_1}+\dfrac{\sqrt{(l-x)^2+h_2^2}}{c_2}$ $(0<x<l)$

则 $f'(x)=\dfrac{x}{c_1\sqrt{x^2+h_1^2}}+\dfrac{x-l}{c_2\sqrt{(l-x)^2+h_2^2}}$

$f''(x)=\dfrac{h_1^2}{c_1(x^2+h_1^2)^{\frac{3}{2}}}+\dfrac{h_2^2}{c_2((l-x)^2+h_2^2)^{\frac{3}{2}}}>0.$

$\because f'(0)<0$，$f'(l)>0$，~~由定理知……~~

由介值定理知，$\exists\ \varepsilon\in(0,l)$，st. $f'(\varepsilon)=0$.

又 $f''(x)>0$，$\forall x\in(0,l)$，由定理9知，只有唯一的 x_0 使 $f'(x_0)=0$.

由定理10知，$f(x)$ 在 x_0 点取得最小值.

而 x_0 满足

$$\frac{x}{c_1\sqrt{x^2+h_1^2}}=\frac{l-x}{c_2\sqrt{(l-x)^2+h_2^2}}$$

即 $\dfrac{\sin\lambda}{c_1}=\dfrac{\sin\varphi}{c_2}$，即 $\dfrac{\sin\lambda}{\sin\varphi}=\dfrac{c_1}{c_2}$. $\square$

习题课笔记：

(数院考题) 设 $f(x)\in C[1,+\infty)$，$f(x)>0$，若对 $\forall a>0$，$f(x)=ax$ 在 $[1,+\infty)$ 上有解。① 证明：$\forall a>0$，有 $f(x)=ax$ 有无穷多解.

② 有无满足条件的严格递增函数？

例1. 设 $P(x)$ 是首项系数为1的多项式，M 是最大的实根. 求证 $P'(M)\geq 0$.

证明：设 $P(x)=x^n+c_{n-1}x^{n-1}+\cdots+c_2x^2+c_1x+c_0$ $(n\geq 1)$

则 $\lim\limits_{x\to+\infty}P(x)=+\infty$.

1° 证明 $\forall x>M$，$P(x)>0$

1) 若 $\exists x>M$，st $P(x)=0$，则与 M 是最大实根矛盾.

2) 若 $\exists x>M$，st $P(x)<0$，则 $\exists\ \xi$ 足够大 st $P(\xi)>0$.

而 $P(x)$ 在 $[x,\xi]$ 连续，故 $\exists\ x_0\in(x,\xi)$，st $P(x_0)=0$，矛盾.

2° 对 $\forall x>M$，则 $\frac{P(x)-P(M)}{x-M}>0$

∴ $\lim\limits_{x\to M}\frac{P(x)-P(M)}{x-M}\ge 0$，即 $P'_+(M)\ge 0$.

∵ $P(x)$ 在 R 上可导.

∴ $f'(M)\ge 0$.

例2. 求方程 $\frac{1}{x^2}+px+q=0$ ($p>0$) 有三个不同实根的条件.

解：设 ~~$f(x)=px+q$, ($p>0$), $g(x)=-\frac{1}{x^2}$~~，

则方程 $\frac{1}{x^2}+px+q=0$ 的解等同于 ~~$f(x)=g(x)$ 的解~~.

1° 当 $x<0$ 时，(令 $f(x)=\frac{1}{x^2}+px+q$)

$f'(x)=-\frac{2}{x^3}+p>0$，$f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上严格递增.

又 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$，$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=+\infty$.

故存在足够小的 $x_1<0$，st $f(x_1)<0$，存在足够大的 $x_2<0$，st $f(x_2)>0$.

由 $f(x)$ 在 $[x_1,x_2]$ 上连续，故 $\exists!\, x\in[x_1,x_2]$，st $f(x)=0$.

进而有 $\exists!\, x\in(-\infty,0)$，st $f(x)=0$.

2° 当 $x>0$ 时，

~~$f'_+(0)=-\infty$，$f'(+\infty)=p>0$.~~

~~由 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 连续，又 $f''(x)=\frac{6}{x^4}>0$，即 $f'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ ↑~~

x	$(0,\sqrt[3]{\frac{2}{p}})$	$\sqrt[3]{\frac{2}{p}}$	$(\sqrt[3]{\frac{2}{p}},+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↓	极小值	↑

$f''(x)=\frac{6}{x^4}>0$，∴ $x=(\frac{2}{p})^{\frac{1}{3}}$ 是 $(0,+\infty)$ 上使 $f'(x)=0$ 成立的唯一点.

∴ $f[(\frac{2}{p})^{\frac{1}{3}}]$ 是 f 在 $(0,+\infty)$ 的最小值.

又 $f(0^+)=+\infty$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

~~∴ 存在足够小的 $x_3<(\frac{2}{p})^{\frac{1}{3}}$，st. $f(x_3)>0$，~~

~~存在足够大的 $x_4>(\frac{2}{p})^{\frac{1}{3}}$，st. $f(x_4)>0$~~

∴ 当且仅当 $f[(\frac{2}{p})^{\frac{1}{3}}]<0$ 时，$f(x)=0$ 在 $(0,+\infty)$ 上有两实根.

即 $3+q(\frac{2}{p})^{\frac{2}{3}}<0$.

∴ —

No. ____________

Date ____________

例3：假设 f 在 $[-1,1]$ 上定义，$f'(0)$ 存在，求 $\lim\limits_{n\to\infty} f(\frac{1}{n^2})+\cdots+f(\frac{n}{n^2})-nf(0)$.

解：claim：$\forall \varepsilon>0$，$\exists N$，当 $n>N$ 时

$$\left|f(\tfrac{1}{n^2})+f(\tfrac{2}{n^2})+\cdots+f(\tfrac{n}{n^2})-nf(0)-\frac{f'(0)}{2}\right|<\varepsilon.$$

证：$\forall \varepsilon>0$，$\exists \delta>0$，当 $0<h<\delta$ 时，

$$-\varepsilon<\frac{f(h)-f(0)}{h}-f'(0)<\varepsilon.$$

$\therefore \exists N_1=\left[\frac{1}{\delta}\right]+1$，s.t. 当 $n\geq N_1$ 时

$$0<\frac{i}{n^2}\leq\frac{1}{n}<\delta \quad (i=1,2,\cdots,n)$$

$$\therefore\ -\varepsilon<\frac{f(\frac{i}{n^2})-f(0)}{\frac{i}{n^2}}-f'(0)<\varepsilon.$$

$$\therefore\ f'(0)-\varepsilon<\frac{f(\frac{i}{n^2})-f(0)}{\frac{i}{n^2}}<\varepsilon+f'(0)$$

$$\therefore\ \frac{i}{n^2}[f'(0)-\varepsilon]<f(\tfrac{i}{n^2})-f(0)<\frac{i}{n^2}[\varepsilon+f'(0)]$$

$$\therefore\ \frac{f'(0)}{2n}-\frac{n+1}{2n}\varepsilon<f(\tfrac{1}{n^2})+\cdots+f(\tfrac{n}{n^2})-nf(0)-\frac{1}{2}f'(0)<\frac{f'(0)}{2n}+\frac{n+1}{2n}\varepsilon.$$

取 N_2，当 $n\geq N_2$ 时，有 $\left|\frac{f'(0)}{2n}\right|<\frac{\varepsilon}{2}$.

取 $N=\max\{N_1,N_2\}$，

当 $n\geq N$ 时 $\quad \left|f(\frac{1}{n^2})+\cdots+f(\frac{n}{n^2})-nf(0)\right|<2\varepsilon$. 即得证.

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty} f(\tfrac{1}{n^2})+\cdots+f(\tfrac{n}{n^2})-nf(0)=\frac{1}{2}f'(0).$$

例4：若 f 在 $U(a,\delta)$ 上处处可导，则 $f'(x)$ 在 $U(a,\delta)$ 上无第一类间断点.

证明：~~若 $f'(a+)$ 存在，则 $f'(a)$ 存在，且 $f'(a)=f'(a+)$~~

当 $x\in \mathring{U}(a,\delta)$ 时，$f(x)-f(a)=f'(\xi_x)(x-a)$

又 $\lim\limits_{x\to a^+}\left[\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right]=f'_+(a)$

若 $\lim\limits_{x\to a} f'(x)$ 存在，则 $\lim\limits_{x\to a} f'(x)=\lim\limits_{x\to a} f'(\xi_x)$

$$\therefore\ \lim_{x\to a} f'(x)=f'(a)$$

柯西中值定理：

设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，在 (a,b) 可导，且满足条件

$g'(x)\neq 0,\ \forall x\in(a,b)$

则 $\exists\,\xi\in(a,b)$, st.

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

证明：令 $F(x)=(f(b)-f(a))\,g(x)-(g(b)-g(a))f(x)\quad (x\in(a,b))$

$\because F(a)=f(b)g(a)-g(b)f(a)$

$F(b)=f(b)g(a)-f(a)g(b)$

$\therefore F(a)=F(b)$，由罗尔中值定理

$\exists\,\xi\in(a,b)$, st. $F'(\xi)=0$.

$\therefore \exists\,\xi\in(a,b)$, st. $\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$. $\square$

不定式、不定型.

不定型：$\infty-\infty$ 不定型，$0\cdot\infty$ 不定型，$\frac{0}{0}$ 不定型，$\frac{\infty}{\infty}$ 不定型，1^∞ 不定型，0^0 不定型，∞^0 不定型。

不定式：不定型的极限式.

洛必达法则：(一定条件下，使不定式转化为定式的方法).

定理1：设 $a\in\bar{R}$ 或 $a=\infty$；$l\in\bar{R}$ 或 $l=\infty$，如果函数 f 和 g 在 a 点的去心邻域 $\mathring{U}(a)$ 上可导，$g'(x)\neq 0,\ \forall x\in\mathring{U}(a)$，且：

柯西中值定理的条件.

I_1：$\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$

II：$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=l$.

则 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=l$.

定理2：设 $a\in\bar{R}$ 或 $a=\infty$；$l=\bar{R}$ 或 $l=\infty$，如果函数 f 和 g 在 a 点的去心邻域 $\mathring{U}(a)$ 上可导，$g'(x)\neq 0,\ \forall x\in\mathring{U}(a)$，且：

I_2：$\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$;

No. ____

Date ____

II: $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=l$;

则有 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=l$.

证明:(定理一):①当 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=l=0$时

我们证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=0$.

对 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\Delta>0$, st $\forall z\in(\Delta,+\infty)$, 有

$$\left|\frac{f'(z)}{g'(z)}\right|<\frac{\varepsilon}{3}$$

对$\forall$取定的 $x\in(\Delta,+\infty)$, 有

$$\lim_{y\to+\infty}\frac{g(y)}{g(x)}=\lim_{y\to+\infty}\frac{f(y)}{g(x)}=0.$$

所以可取 $y\in(x,+\infty)$ 充分大, st.

$$\frac{1}{2}<1-\frac{g(y)}{g(x)}<\frac{3}{2}, \text{ 且 } \left|\frac{f(y)}{g(x)}\right|<\frac{\varepsilon}{2}$$

由柯西中值定理, $\exists\xi\in(x,y)$, st.

$$\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

即 $$\frac{\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{f(y)}{g(x)}}{1-\frac{g(y)}{g(x)}}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

即 $$\frac{f(x)}{g(x)}=\left(1-\frac{g(y)}{g(x)}\right)\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}+\frac{f(y)}{g(x)}$$

$$\therefore\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right|\le\left(1-\frac{g(y)}{g(x)}\right)\left|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\right|+\left|\frac{f(y)}{g(x)}\right|$$

$$\le\frac{3}{2}\cdot\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

$\therefore\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=0$. □

(仿此可证明 $x\to a-$, $x\to a+$ 或 $x\to-\infty$ 的情形,只需对 x,y 的范围修改即可.)

② 当 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=l=\infty$ 时,

我们来证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\infty$

对 $\forall E>0$, $\exists\Delta>0$, st. $\forall z\in(\Delta,+\infty)$,有

$$\left|\frac{f'(z)}{g'(z)}\right|>2E+1$$

对$\forall$取定 $x\in(\Delta,+\infty)$,有

$$\lim_{y\to+\infty}\frac{g(y)}{g(x)}=\lim_{y\to+\infty}\frac{f(y)}{g(x)}=0.$$

所以可取 $y\in(x,+\infty)$ 充分大, st.

$\frac{1}{2} < 1 - \frac{g(y)}{g(x)} < \frac{3}{2}$ 且

$\left|\frac{f(y)}{g(x)}\right| < \frac{1}{2}$

$\therefore \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \geq \left(1 - \frac{g(y)}{g(x)}\right)\left|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\right| - \left|\frac{f(y)}{g(x)}\right|$

$\geq \frac{1}{2}(2E+1) - \frac{1}{2} = E$

$\therefore \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$. □

(同此可以证明 $x \to -\infty$，a^-，a^+ 的情况)

洛必达的两个法则分别解决了 $\frac{0}{0}$，$\frac{\infty}{\infty}$ 的未定型，而对 $0\cdot\infty$ 型，我们可以使 $\lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$，化归；对 $\infty-\infty$ 型，我们可以使 $\lim_{x\to a} f(x)-g(x) = \lim_{x\to a} \frac{1}{\frac{1}{f(x)}} - \frac{1}{\frac{1}{g(x)}} = \lim_{x\to a} \frac{\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)g(x)}}$，为 $\frac{0}{0}$ 型；对 1^∞ 型，我们可以使 $\lim_{x\to a} [f(x)]^{g(x)} = \lim_{x\to a} e^{g(x)\ln f(x)} = e^{\lim_{x\to a} g(x)\ln f(x)}$，而 $\lim_{x\to a} g(x)\ln f(x)$ 是 $0\cdot\infty$ 型，(对 0^0 型，化为 $0\cdot\infty$ 型，对 ∞^0 型，化为 $0\cdot\infty$ 型。)

为了把其它形式的未定式化为 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型，要依实际情况灵活变换，注意化简，约分、分离出易求极限的因式。

习题课笔记：

例1：$f(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$，证明：

① n 为偶数时，$f(x)$ 在实轴上有最小值.

② n 为奇数时，$f(x)$ 有且仅有一个实根.

证明：分析：记当函数最高次幂为 n 时，函数为 $f_n(x)$，则有，

$f_n'(x) = f_{n-1}(x)$

① 当 n 为偶数时，$\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$，又 $f(x) \in C(-\infty, +\infty)$

$\therefore f(x)$ 在 R 上有最小值，设最小值点为 x_0.

又 $f(x)$ 在 R 上可导，故 $f'(x_0) = 0$.(明显 $x_0 \neq 0$)

$\therefore f(x_0) = \frac{x_0^n}{n!} + f'(x_0) = \frac{x_0^n}{n!}$

$\because n$ 为偶数，故 $f(x_0) > 0$. □

No.
Date

② 当n为奇数时，$f'(x)>0$ (由①可知)，$\forall x\in R$.

$\therefore f(x)$ 在 R 上严格递增

又 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \quad \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.

$\therefore \exists x_1<0$, st. $f(x_1)<0$; $\exists x_2>0$, st $f(x_2)>0$.

由 $f(x)$ 在 $[x_1,x_2]$ 上严格递增且连续.

$\therefore f(x)$ 在 $[x_1,x_2]$ 上有且仅有一个实根,

故易知 $f(x)$ 在 R 上有且仅有一个实根 □.

例2: $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, $f(0)=0$, 若 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(2x)-f(x)}{x}=m$.

证明 $f'(0)$ 存在, 并求 $f'(0)$

证明: $\because$ 对 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$, st. $\forall x\in\mathring{U}(0,\delta)$

$$m-\varepsilon<\frac{f(2x)-f(x)}{x}<m+\varepsilon$$

明显 $\frac{x}{2},\frac{x}{2^2},\cdots,\frac{x}{2^n}\in\mathring{U}(0,\delta)$

$$\therefore\quad m-\varepsilon<\frac{f(x)-f(\frac{x}{2})}{\frac{1}{2}x}<m+\varepsilon$$

$$m-\varepsilon<\frac{f(\frac{1}{2}x)-f(\frac{1}{4}x)}{\frac{1}{2^2}x}<m+\varepsilon$$

$$\cdots\cdots$$

$$m-\varepsilon<\frac{f(\frac{1}{2^{n-1}}x)-f(\frac{1}{2^n}x)}{\frac{1}{2^n}x}<m+\varepsilon$$

$$\therefore\ (\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2^2}+\cdots+\tfrac{1}{2^n})m-\varepsilon<\frac{f(x)-f(\frac{1}{2^n}x)}{x}<(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2^2}+\cdots+\tfrac{1}{2^n})m+\varepsilon\quad(*)$$

又 $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n})=1$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(x)-f(\frac{1}{2^n}x)}{x}=\frac{f(x)-f(0)}{x}$

$\therefore$ 对 $(*)$ 式取 $n\to\infty$, 有

$$m-\varepsilon\le\frac{f(x)-f(0)}{x}\le m+\varepsilon,\quad\forall x\in\mathring{U}(0,\delta)$$

$\therefore\ \lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=m$, 即 $f'(0)$ 存在且为 m.

例3: 设 $f(x)$ 可导, 求证 $f(x)$ 的两个零点之间一定有 $2008f(x)+f'(x)$ 的零点.

证明: 考虑构造函数 $g(x)$, st. $(g(x)\cdot f(x))'=(2008f(x)+f'(x))g(x)$

No.

Date

且 $g(x) \neq 0$ ，$\forall x \in R$.

故 $g'(x) = 2008\,g(x)$

∴ 令 $g(x) = e^{2008x}$

∴ $(g(x)f(x))' = (2008f(x) + f'(x))\,e^{2008x}$

设 $f(x)$ 的任两个零点 x_1, x_2.

则 $g(x_1)f(x_1) = 0$， $g(x_2)f(x_2) = 0$.

∵ $g(x)f(x)$ 在 R 上可导. 由罗尔中值定理.

∴ ∃ x_0 ，在 x_1, x_2 之间，s.t. $(g(x)\cdot f(x))' = 0$.

又 $e^{2008x} \neq 0$.

∴ $2008f(x) + f'(x) = 0$ □.

例4：$e^x = ax^2 + bx + c$ 至多有三个实根.

证明：若 $e^x = ax^2 + bx + c$ 有四个实根或更多，由 $y = e^x - ax^2 - bx - c$ 在R上可导.

则 $e^x = 2ax + b$ 至少有三个实根.

同理 $e^x = 2a$ 到有两个实根.

而 $y = e^x$ 是 R上的严格递增函数，故 $e^x = 2a$ 不可能有两个实根，矛盾 □.

例5：(1) 设 $f(x)$ 在实轴上定义，$f(f(x))$ 有且仅有两个不动点 a, b $(a \neq b)$.

证明只有以下两种情况：

① $f(a) = a$，　$f(b) = b$，

② $f(a) = b$，　$f(b) = a$.

(2) 不可能存在实轴上的可导函数 $f(x)$，s.t. $f(f(x)) = x^2 - 3x + 3$.

证明：(1) ∵ $f(f(a)) = a$，　$f(f(b)) = b$.

∴ $f[f(f(a))] = f(a)$，　$f[f(f(b))] = f(b)$.

∴ $f(a)$，$f(b)$ 也是 $f(f(x))$ 的不动点，依题意，只有以下情况.

① $f(a) = a$，$f(b) = b$，　② $f(a) = b$，$f(b) = a$.

③ $f(a) = a$，$f(b) = a$，　④ $f(a) = b$，$f(b) = b$.

对情况③，$f(f(b)) = f(a) = a$，与题意矛盾，舍去，

同理舍去情况④. □.

(2) ∵ $x^2-3x+3=x$ 有且仅有两个实根 $x=3$，$x=1$.

由(1)中结论，有

① $f(3)=3$，$f(1)=1$.

若 $f(x)$ 可导.

则 $(f(f(x)))' = f'(f(x))\cdot f'(x)$

又 $(f(f(x)))' = 2x-3$

∴ $(f'(1))^2 = -1$，矛盾.

② $f(3)=1$，$f(1)=3$.

若 $f(x)$ 可导，则 $f'(1)\cdot f'(3) = 3$，$f'(3)\cdot f'(1) = -1$，矛盾.

综合，□.

例6：$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上三阶可导，$\exists\, d\in(a,b)$，s.t. $f(a)>f(d)$，$f(b)>f(d)$.

且 $f'(a)>0$，$f'(b)<0$. 证明 $f'''(x)$ 在 (a,b) 上必有零点.

证明：

∵ $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续在 (a,b) 上可导

$\frac{f(a)-f(d)}{a-d}<0$，由拉格朗日中值定理.

$\exists\, \xi_1\in(a,d)$，s.t. $f'(\xi_1)<0$.

同理 $\exists\, \xi_2\in(d,b)$，s.t. $f'(\xi_2)>0$.

∵ $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上三阶可导.

∴ $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，由介值定理

∴ $\exists\, \delta_1\in(a,\xi_1)$，s.t. $f'(\delta_1)=0$.

$\exists\, \delta_2\in(\xi_1,\xi_2)$，s.t. $f'(\delta_2)=0$

$\exists\, \delta_3\in(\xi_2,b)$，s.t. $f'(\delta_3)=0$

∴ $f'(x)$ 在 (a,b) 上有三个零点.

∴ $f'''(x)$ 在 (a,b) 上必有零点.

No.

Date

改题：将"f在[a,b]上二阶可导"改为"f在(a,b)上二阶可导"。(即不能用f'在[a,b]上连续)

证明：claim：f在(a,d)内部取到最大值，(f在[a,b]上连续)

若不然，则f(a)为最大值，

故 $\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\le 0$，即 $f'(a)\le 0$，与题设不符.

$\therefore\ \exists\,\xi_1\in(a,d)$, st. $f'(\xi_1)=0$.

同理 $\exists\,\xi_2\in(d,b)$, st. $f'(\xi_2)=0$.

又$\because$ $f(d)<f(a)$, $f(d)<f(b)$, $f\in C[a,b]$.

$\therefore$ f在(a,b)内部取到最小值.

$\therefore\ \exists\,\xi_3\in(a,b)$, 且 $\xi_3\ne\xi_1,\xi_2$, st. $f'(\xi_3)=0$.

$\therefore$ ——. □

高阶微分：

定义：$d(dy)=d(f'(x)\Delta x)=f''(x)\Delta x\cdot\Delta x=f''(x)\cdot dx^2$

记 $d^2y=d(dy)$，为 $y=f(x)$ 的二阶微分，有

$$f''(x)=\frac{d^2y}{dx^2}$$

性质：$d^n(u\pm v)=d^n u\pm d^n v$

$d^n(uv)=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\, d^{n-k}u\cdot d^k v$

注：$d^2y=a''(x)\cdot dx^2=(f''(u)(u')^2+f'(u)u'')dx^2=f''(u)du^2+f'(u)d^2u$

~~$d^2y=d(dy)=d(f'(u)du)=f''(u)du\,du+f'(u)d^2u$~~

$\therefore$ $d^2y\ne f''(u)du^2$ 在一般情况下均成立.

$\therefore$ 高阶微分一般不具有形式不变性

(相关条件：$d^2u=0$，即 $f''(x)=0$，即 u是x的线性函数).

泰勒公式(用n次多项式研究可导n次的函数)

(1) 带小o余项的泰勒公式：带小o余项的泰勒公式是无穷小增量公式的推广。

No.
Date

引理1 设$\varphi(x)$在$U(a,\eta)$上有定义，且在a点有n阶导数.
若 $\varphi(a)=\varphi'(a)=\cdots=\varphi^{(n)}(a)=0$.
则 $\varphi(x)=o((x-a)^n)$

证明：$\lim\limits_{x\to a}\frac{\varphi(x)}{(x-a)^n}\overset{n-1次}{\underset{洛必达}{=}}\lim\limits_{x\to a}\frac{\varphi^{(n-1)}(x)}{n!(x-a)}$

$=\lim\limits_{x\to a}\frac{\varphi^{(n-1)}(x)-\varphi^{(n-1)}(a)}{n!\ (x-a)}$

$=\frac{1}{n!}\varphi^{n}(a)=0$. □

引理2 设函数$f(x)$和$g(x)$在$U(a,\eta)$上有定义，在a点有n阶导数.
若 $f^{(k)}(a)=g^{(k)}(a)$，$k=0,1,\cdots,n$,
则 $f(x)=g(x)+o((x-a)^n)$

证明：令 $\varphi(x)=f(x)-g(x)$.
则$\varphi(x)$满足引理1条件，则 $\varphi(x)=o((x-a)^n)$
$\therefore f(x)=g(x)+o((x-a)^n)$. □

现构造多项式 $P(x)=A_0+A_1(x-a)+A_2(x-a)^2+\cdots+A_n(x-a)^n$ 满足引理2条件.
即 $A_0=P(a)=f(a)$
$A_1=P'(a)=f'(a)$
$2A_2=P''(a)=f''(a)$
$\cdots$
$n!A_n=P^{(n)}(a)=f^{(n)}(a)$
$\therefore P(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$

定理1 设函数f在$U(a,\eta)$上n阶可导，在a点有n阶导数，则
求极限
$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+o((x-a)^n)$
上式称为带小o余项的泰勒公式（带Peano余项的泰勒公式）
附：① 带小o余项的麦克劳林公式：$a=0$时的带小o余项的泰勒公式.
② n次泰勒多项式：$P(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$

No.

Date

一些常用的麦克劳林展式：

(1) $e^x = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n)$

(2) $\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+o(x^{2n})$

(3) $\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n+1})$

(4) $\ln(1+x) = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+o(x^n)$

(5) $(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n}\binom{\alpha}{k}x^k+o(x^n)$

(6) $\arctan x = x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+o(x^{2n+2})$

(7) $\arcsin x = x+\frac{x^3}{3\cdot 2}+\frac{3!!}{5\cdot 4!!}x^5+\cdots+\frac{(2n-1)!!}{(2n+1)\cdot(2n)!!}x^{2n+1}+o(x^{2n+2})$

引理4 设 $A\neq 0$，且 $\varphi(h)=Ah^n+o(h^n)$，则对充分小的 h，应有 $\varphi(h)$ 与 Ah^n 同号.

定理（极值的第三充分条件）

设函数 f 在 $U(x_0,\eta)$ 有定义，在 x_0 点可导 n 次，且

$f'(x_0)=\cdots=f^{(n-1)}(x_0)=0$，$f^{(n)}(x_0)\neq 0$

则：(1) 若 n 是偶数，

1° 当 $f^{(n)}(x_0)>0$ 时，f 在 x_0 点取得严格极小值.

2° 当 $f^{(n)}(x_0)<0$ 时，f 在 x_0 点取得严格极大值

(2) 若 n 为奇数，那么 x_0 不是 f 的极值.

证明：$f(x)=f(x_0)+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n)$. □

(2) 有限增量的泰勒公式

定理2（带拉格朗日余项的泰勒公式） 证区间的的不等式

设函数 f 在区间 I 上有直到 n 阶的连续导数，在 I° 有 $n+1$ 阶导数，$a,x\in I$，则 $f(x)=P_n(x)+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$，其中 $P_n(x)$ 为 n 次泰勒多项式。（ξ 在 x 与 a 之间）

证明：令 $F(t)=f(x)-[f(t)+\frac{f'(t)}{1!}(x-t)+\cdots+\frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n]$

$G(t)=(X-t)^{n+1}$

取 $t=X$，则 $F(t)=G(t)=0$

$$F'(t)=-\left[f'(t)+f''(t)(X-t)-f'(t)+\cdots+\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(X-t)^n-\frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(X-t)^{n-1}\right]$$

$$=-\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(X-t)^n$$

$G'(t)=-(n+1)(X-t)^n$

$\because \dfrac{F(X_0)}{G(X_0)}=\dfrac{F(X_0)-F(X)}{G(X_0)-G(X)}$，由柯西中值定理，

$\therefore \dfrac{F(X_0)-F(X)}{G(X_0)-G(X)}=\dfrac{F'(\xi)}{G'(\xi)}$ （ξ在X_0与X之间）

$$=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

$\therefore \dfrac{F(X_0)}{G(X_0)}=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$

$\therefore F(X_0)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(X_0-X)^{n+1}$，即 $f(x)=P_n(x)+\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(X-a)^{n+1}$. □

习题课笔记：

1. 函数f在(a,b)上可导，则导函数f'在(a,b)上无第一类间断点；
单调函数只可能有第一类间断点.

No.
Date

泰勒级数：设函数 f 在区间 I 可导任意多次，$a, x \in I$，则对 $\forall n \in N$，有

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + R_{n+1}(x)$$

若对取定的 x，当 $n \to +\infty$ 时，$R_{n+1}(x)$ 无穷小.

则 $$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

定义（凸函数） 设函数 f 在区间 I 有定义，如果对任意 $x_1, x_2 \in I$，$x_1 < x_2$，和任意 $a_1, a_2 \geq 0$，$a_1 + a_2 = 1$，有

$$f(a_1 x_1 + a_2 x_2) \leq a_1 f(x_1) + a_2 f(x_2),$$

那么我们说 f 在区间 I 是（下）凸的。

注：若对任意 $a_1, a_2 > 0$，$a_1 + a_2 = 1$，不等式严格，则称函数 f 在 I 严格凸.

定理1：以下五个命题相互等价：

(1) f 在区间 I 是（下）凸函数；

(2) 对 $\forall x_1, x_2 \in I$，$x_1 < x_2$，和对介于 x_1 与 x_2 间的任何 x，都有

$$f(x) \leq \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2).$$

(3) 对 $\forall x_1, x_2 \in I$，$x_1 < x_2$，和介于 x_1 与 x_2 间的任何 x，都有

$$\begin{vmatrix} 1 & x & f(x) \\ 1 & x_1 & f(x_1) \\ 1 & x_2 & f(x_2) \end{vmatrix} \geq 0.$$

(4) 对 $\forall x_1, x_2 \in I$，$x_1 < x_2$，和介于 x_1, x_2 间的任何 x，都有

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}$$

(5) $\forall x_1, x_2 \in I$，$x_1 < x_2$，和介于 x_1, x_2 之间的任何 x，都有

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}.$$

定理2（詹森 Jensen不等式）

设f是区间I上的凸函数，则对任何$x_1,\cdots,x_m\in I$，和$a_1,\cdots,a_m>0$，$a_1+\cdots+a_m=1$，都有

$$f(a_1x_1+\cdots+a_mx_m)\le a_1f(x_1)+\cdots+a_mf(x_m).$$

注：如果f严格凸，则原不等号严格.

定理3 设函数f在I区间连续，在I°区间可导，则f在区间I为凸函数（严格凸函数）的充要条件是f'在I°单调上升（严格单调上升）.

证明："⇐" 设$x_1,x_2\in I^\circ$，$x_1<x_2$，只要$x_1<x<x'<x_2$.

则 $$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}\le\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\le\frac{f(x_2)-f(x')}{x_2-x'}$$

让 $x\to x_1$，$x'\to x_2$，则
$$f'(x_1)\le\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\le f'(x_2).$$

$\therefore f'(x_1)\le f(x_2)$

"⇒" 对$\forall\, x_1,x,x_2\in I$，$x_1<x<x_2$，由拉格朗日中值定理

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}=f'(\xi_1)\qquad x_1<\xi_1<x.$$

$$\frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}=f'(\xi_2)\qquad x<\xi_2<x_2$$

$\because \xi_1<\xi_2$

$\therefore f'(\xi_1)\le f'(\xi_2)$

$$\therefore \frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}\le\frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}\ .\ \square$$

定理4 设f在I连续，在I°可导二次，则f在I为凸函数的充要条件是

$$f''(x)\ge 0,\ \forall\, x\in I^\circ$$

而f在I为严格凸函数的充要条件为

$f''(x)\ge 0,\ \forall\, x\in I^\circ$ 且 f''不在I°的任何开子区间上恒等于0.

No. ____
Date ____

定义(拐点) f在$U(x_0,\eta)$有定义，且在x_0的左右两侧有不同的凸凹性，则称x_0为f的一个拐点。

定理5(拐点的必要条件) 函数f在$U(x_0,\eta)$有定义，在x_0点有二阶导数，若x_0是f的一个拐点，则必有 $f''(x_0)=0$。

定理6(拐点的第一充分条件) 设f在$U(x_0,\eta)$有二阶导数，$f''(x_0)=0$。若$f''(x)$经过x_0时变号，则x_0点是函数f的拐点。

(方程的近似求解)(牛顿迭代法)

设函数f在区间$[a,b]$上二阶连续可微，且有
$$f(a)\cdot f(b)<0,\quad f'(x)\cdot f''(x)\neq 0\quad \forall x\in[a,b].$$
若 $x_0\in[a,b]$ s.t. $f(x_0)\cdot f''(x_0)>0$。
那么由迭代程序
$$x_n=x_{n-1}-\frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})},\quad n=1,2,\cdots$$
产生的数列$\{x_n\}$单调收敛于方程 $f(x)=0$ 在$[a,b]$中的唯一解c.

霍尔德 (Hölder 不等式)

设$a_i, b_i\geq 0$，$i=1,2,\cdots,n$. 且 $p,q>0$，$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.
则
$$\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\leq\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

特例： $p=q=2$时，Hölder不等式为柯西不等式.

证明： 1° 证明当$p,q>0$，$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$时，$x^{\frac{1}{p}}y^{\frac{1}{q}}\leq\frac{1}{p}x+\frac{1}{q}y$. $(x,y\geq 0)$
$$f\left(\tfrac{1}{p}x+\tfrac{1}{q}y\right)\leq\tfrac{1}{p}f(x)+\tfrac{1}{q}f(y)\quad(\text{设}f(x)=-\ln x).$$
$$\therefore -\ln\left(\tfrac{1}{p}x+\tfrac{1}{q}y\right)\leq-\tfrac{1}{p}\ln x-\tfrac{1}{q}\ln y=-\ln x^{\frac{1}{p}}y^{\frac{1}{q}}.$$
$$\therefore x^{\frac{1}{p}}y^{\frac{1}{q}}\leq\tfrac{1}{p}x+\tfrac{1}{q}y.$$

No.
Date

黎曼积分:

☆ 设函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 上有定义，$I\in\mathbb{R}$，若对 ~~[illegible]~~ $\forall\varepsilon>0$，$\exists\ \delta>0$，s.t. 只要 $\|P\|<\delta$，不论相应标志点组 ξ 怎样选择，总有

$$|\sigma(f,P,\xi)-I|<\varepsilon$$

这样我们就说 f 在区间 $[a,b]$ 可积.

只要求 $\|P\|$ 足够小，不管 P，ξ 怎样. 所以，说明某 f 可积时，不能要求 P，ξ 有什么特殊性.

注: P — 分割，$\|P\|$ — 分割的模，Δx_i — 闭子区间长度，ξ_i — 标志点.

分割后，原区间被分为一系列闭子区间.

$\sigma(f,P,\xi)=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$ （黎曼和）

积分的性质:

线性性质: $\sigma(\lambda f+\mu g,P,\xi)=\lambda\sigma(f,P,\xi)+\mu\sigma(g,P,\xi)$.

可加性 $\int_a^c f(x)dx=\int_a^b f(x)dx+\int_b^c f(x)dx$

单调性: $f\geq g$ $\int f>\int g$.

可积性定理: 1°

设 $a,b\in\mathbb{R}$，函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 有定义且有界，则以下三条件互相等价:

(1) 对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists[a,b]$ 的分割 P，使得

$$U(f,P)-L(f,P)<\varepsilon;$$

(2) 函数 f 在 $[a,b]$ 的达布下积分与达布上积分相等

$$\underline{I}=\overline{I}$$

(3) 函数 f 在 $[a,b]$ 可积.

可积性定理：2° 定义：$\Omega(f,P)=\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i$，其中 $\omega_i=M_i-m_i$（小区段的振幅）

设 $a,b\in\mathbb{R}$，函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 有定义，且有界，则以下三条件相互等价：

(1) 对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists[a,b]$ 的分割 P，使得

$$\Omega(f,P)<\varepsilon.$$

(2) $\lim\limits_{|P|\to0}\Omega(f,P)=0$

(3) f 在 $[a,b]$ 可积.

(可积函数类)

定理1：设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 可积，λ 是常数，则：

(1) $f(x)\pm g(x)$ 在 $[a,b]$ 可积；

(2) $\lambda f(x)$ 在 $[a,b]$ 可积；

(3) $|f(x)|$ 在 $[a,b]$ 可积；

(4) $f(x)g(x)$ 在 $[a,b]$ 可积；

(5) 如果 $\exists$ 常数 $d>0$, st. $|f(x)|\geq d$, $\forall x\in[a,b]$ 则 $\frac{1}{f(x)}$ 也在 $[a,b]$ 可积。

线性可积，绝对值可积，相乘可积，(一定条件下)除法可积.

定理2：在 $[a,b]$ 上可积的函数在 $[a,b]$ 的任一闭子区间上可积.

定理3：(单调必可积) 若函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 有定义且单调，则 f 在 $[a,b]$ 可积.
(注意是闭区间)

定理4：(连续必可积) 若函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 连续，则 f 在 $[a,b]$ 可积.
(注意是闭区间

定理5：设函数 f 在 $[a,b]$ 有界，且除去有限个间断点后，在其它各点连续，则 f 在 $[a,b]$ 可积。

No. ______

Date ______

定理6 设函数 g 与 f 都在 $[a,b]$ 定义；设除去在有限个点 $c_1,\cdots,c_k$ 外，g 与 f 函数值都相等。若 f 在 $[a,b]$ 可积，则 g 也在 $[a,b]$ 可积，且

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b g(x)\,dx.$$

（变上限函数）

定义：若 f 在 $[a,b]$ 可积，则对 $\forall x\in[a,b]$，定义

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)\,dt$$

为积分上限 x 的函数.

定理1：若函数 f 在 $[a,b]$ 可积，则函数 $\Phi(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ 在 $[a,b]$ 连续。

定理2：若函数 f 在 $[a,b]$ 可积，$x_0\in(a,b)$，且 f 在 x_0 点连续，则函数

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)\,dt \text{ 在 } x_0 \text{ 点可导，且}$$

$$\Phi'(x_0)=f(x_0).$$

定理3：设函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 连续，则

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)\,dt$$

就是 f 在 $[a,b]$ 上的一个原函数。即任何连续函数必有原函数.

（积分中值定理）.

第一中值定理：设函数 f 和 g 在 $[a,b]$ 可积，且满足 $m\le f(x)\le M$，$g(x)\ge 0$，$\forall x\in[a,b]$. 则

$$m\int_a^b g(x)\,dx\le\int_a^b f(x)g(x)\,dx\le M\int_a^b g(x)\,dx.$$

特别：若 f 连续，则 $\exists c\in[a,b]$，s.t. $\int_a^b f(x)g(x)\,dx=\underbrace{f(c)}_{c\text{在这里}}\int_a^b g(x)\,dx$

No. ______

Date ______

第二中值定理：

① 设函数 f 在 $[a,b]$ 单调下降且非负，函数 g 在 $[a,b]$ 可积，则 $\exists\, c\in[a,b]$，使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(a)\underbrace{\int_a^c g(x)\,dx}_{c\text{在这里}}$$

② $f\nearrow,\ \geq 0$；

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(b)\int_c^b g(x)\,dx$$

③ f 单调；

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(a)\int_a^c g(x)\,dx + f(b)\int_c^b g(x)\,dx.$$

$\mathbb{R}^m$ 的收敛点列与柯西点列：

$\{x_n\}$ 是 $\mathbb{R}^m$ 上收敛点列 $\xLeftrightarrow{①}$ $\forall\, 1\leq i\leq m$，$\{x_n^i\}$ 是收敛序列

$\Updownarrow$ 以前证过

$\{x_n\}$ 是 $\mathbb{R}^m$ 上柯西点列 $\xLeftrightarrow{②}$ $\forall\, 1\leq i\leq m$，$\{x_n^i\}$ 是柯西序列

从而，$\mathbb{R}^m$ 完备.（$\mathbb{R}^m$ 上收敛点列 $\Leftrightarrow$ 柯西点列）.

微分方程初步

1. 微分方程：含有未知函数的导数的方程.

阶数：微分方程所含未知函数的导数的最高阶数.

① 最简单的一阶微分方程 —— $\frac{dx}{dt}=f(t)$

$x=\int f(t)\,dt+C$，即x是$f(t)$的一个原函数.

最简单的n阶方程 —— $\frac{d^n x}{dt^n}=f(t)$

方程两边逐步积分，最终可得

$$x=\underbrace{\underbrace{\int\cdots\int}_{n\text{个}} f(t)\,dt\cdots dt}_{f(t)\,n\text{阶重积分}}+\underbrace{C_1\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}+\cdots+C_{n-1}t+C_n}_{\text{积分过程中产生的标准解析函数式(多项式)}}$$

注：一个n阶方程的通解含有n个任意常数.

② 一阶线性微分方程 —— $\frac{dx}{dt}+a(t)x=b(t)$

用函数 $e^{\int a(t)dt}$ 乘在方程两边，有

$$\frac{d}{dt}\left(e^{\int a(t)dt}x\right)=e^{\int a(t)dt}\cdot b(t)$$

于是 $e^{\int a(t)dt}\cdot x=\int e^{\int a(t)dt}\cdot b(t)\,dt+C$

故 $x=e^{-\int a(t)\cdot dt}\left(\int e^{\int a(t)dt}\cdot b(t)\,dt+C\right)$.

③ 变量分离型方程 —— $\frac{dx}{dt}=f(t)g(x)$ $(g(x)\neq 0)$

有 $\frac{dx}{g(x)}=f(t)\,dt$ （分离变量），方程有解时，等式恒成立.

对两边求不定积分有 $\int\frac{dx}{g(x)}=\int f(t)\,dt+C$.

注：通过引入新的未知函数或新的自变量，可以把某些微分方程化为变量分离型方程.

R^m上的外点，内点，边界点：（$E\subset R^m$）

内点  ∃$\varepsilon>0$，使 $U(a,\varepsilon)\subset E$ （不是去心邻域）

外点  ∃$\varepsilon>0$，使 $U(a,\varepsilon)\cap E=\varnothing$.

边界点  ∀$\varepsilon>0$，$U(a,\varepsilon)\cap E\neq\varnothing$

$U(a,\varepsilon)\cap E^c\neq\varnothing$ （E^c为E的补集）

定义：$\partial E :=$ E的所有边界点的集合.

开集：$E=E^0$，则E为开集（E^0为E的内点集合）.

例：R^m，$\varnothing$

性质：1° 开集没有边界（边界点$\notin$开集）.

2° 有限开集的交为开集.

任意开集的并为开集.

聚点：内点是聚点，

边界点 $\begin{cases}\text{聚点} \\ \text{孤立点：} \exists\varepsilon>0,\ \overset{\circ}{U}(a,\varepsilon)\cap E=\varnothing.\end{cases}$

E的闭包：$\bar{E} := E\cup$ E的聚点 $\Longleftrightarrow$ $E\cup$ E的边界

闭集：$E=\bar{E}$，则E为闭集.

例：R^m，$\varnothing$.

性质：

No.

Date

习题：1. $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛，$xf(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 单调下降.

证：(1) $xf(x)\ge 0 \quad (x\ge a)$

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x)\ln x = 0$

(1) 若 $\exists x_0>0$，st. $x_0f(x_0)<0$. 则 $\forall x>x_0\ge 0$.

$xf(x)\le x_0f(x_0)<0$

$\therefore f(x)\le \frac{x_0f(x_0)}{x}<0$

$\therefore \int_a^{+\infty}f(x)dx$ 不收敛.

(2) $\forall \varepsilon>0$, $\exists M>0$, st. $\forall x\ge M^2$, $\sqrt{x}\ge M$.

有 $\left|\int_{\sqrt{x}}^{x} f(t)dt\right|<\varepsilon$.

而又 $\int_{\sqrt{x}}^{x} f(t)dt = \int_{\sqrt{x}}^{x} \frac{tf(t)}{t}dt \ge xf(x)\int_{\sqrt{x}}^{x}\frac{1}{t}dt$.

$= \frac{1}{2}xf(x)\ln x$.

2. $f\in C[0,+\infty)$, $f(+\infty)$ 存在.

证：$\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx = (f(0)-f(+\infty))\ln\frac{b}{a}$

1° 注意 $x\to 0$ 时，$\because f(0)\in R$，$\frac{1}{x}\to+\infty$，原函数在 $x=0$ 处有瑕点.

不能只作无穷积分，要考虑瑕积分

2° 当你以为 $\int_B^A \frac{f(ax)}{ax}d(ax)$ 与 $\int_B^A\frac{f(x)}{x}dx$ 差不多时，你忽略了

定积分特有的积分上下限，这与不定积分是区别开的.

3、$f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 一致连续，$\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 收敛.

证 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

$\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$, st $\forall |x'-x|<\delta$

$|f(x')-f(x)|<\varepsilon$.

且 $\exists M>0$, 当 $x_1, x_2\ge M$ 时, $\left|\int_{x_1}^{x_2}f(x)\right|<\varepsilon$

∴ $\left|\int_x^{x+\frac{\delta}{2}} f(x)\,dx\right| < \delta\varepsilon.$

$\left|\int_x^{x+\frac{\delta}{2}} f(x)\,dx\right| = \left|\frac{\delta}{2}f(x) - \frac{\delta}{2}(f(x)-f(\xi))\right|$

$\geq \left|\frac{\delta}{2}f(x)\right| - \frac{\delta}{2}\varepsilon.$

∴ $|f(x)| \le 3\delta$

10.1.5 (充分性). 现证 $\lim_{x\to+\infty} xf(x)$存在.

∵ $xf(x) = x\int_x^{+\infty} -f'(t)\,dt \quad (f(+\infty)=0)$

$\le \int_x^{+\infty} t(-f'(t))\,dt$

$= -\int_x^{+\infty} tf'(t)\,dt \to 0 \quad (x\to+\infty)$

∴ $\lim_{x\to+\infty} xf(x)=0.$

∵ $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = xf(x)\Big|_a^{+\infty} - \int_a^{+\infty} xf'(x)\,dx$

∴ $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ 收敛. □

$\int_1^{+\infty}\frac{x}{1+x^6\sin^2 x}\,dx$ 收敛

15.5.10 (柯西!) ∵ $\forall\varepsilon>0, \exists M>0$, st. $\forall x_1,x_2>M$, $y_1,y_2<-M$, st.

$|(f(x_1)+g(y_1))-(f(x_2)+g(y_2))|<\varepsilon.$

令 $y_1=y_2=-M-1<M.$

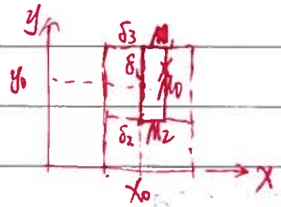
∴ $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon.$

同理 $|g(y_1)-g(y_2)|<\varepsilon.$ □

一导二 时 不知道 结论里的两个极限值, 用柯西好.

(反过来二导一就无所谓)

15.2



凸区域：

区域 Ω 中任意两点 a,b，

$a=(a_1,\cdots,a_m)$

$b=(b_1,\cdots,b_m)$，令 $h=b-a=(h_1,\cdots,h_m)$

若 $(a,b)=\{a+th \mid t\in[0,1]\}$，即$a,b$连线段集合，是 Ω 的子集

则 Ω 为凸区域。

习题：判别收敛性 $\int_1^{+\infty}\sin\left(\frac{\sin x}{x}\right)dx$

解：该题用直接积分，柯西判别，比较判别，Diriclet 或Abel 判别均不可行.

考虑到 $x\to+\infty$ 时，$\frac{\sin x}{x}\to 0$. 用泰勒公式作.

$$\sin\left(\frac{\sin x}{x}\right)=\frac{\sin x}{x}-\frac{1}{3!}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3+o\left(\left(\frac{\sin x}{x}\right)^4\right)$$

故有 $\sin\left(\frac{\sin x}{x}\right)=\frac{\sin x}{x}+\left[\sin\left(\frac{\sin x}{x}\right)-\frac{\sin x}{x}\right]$

1° $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x}$ 收敛（条件）

2° $\because \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\left|\sin\left(\frac{\sin x}{x}\right)-\frac{\sin x}{x}\right|}{\left|\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3\right|}=\frac{1}{6}$ （比较判别）.

又 ~~$\int_1^{+\infty}\left|\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3\right|dx \le \int_1^{+\infty}\left|\frac{1}{x^3}\right|dx$~~

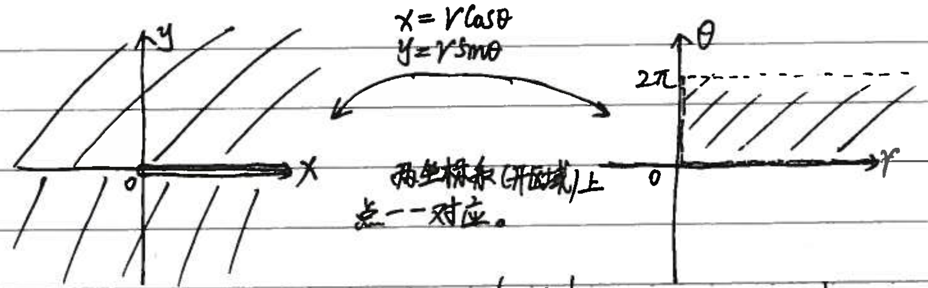
$\left|\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3\right|\le\left|\frac{1}{x^3}\right|$

$\because \int_1^{+\infty}\left|\frac{1}{x^3}\right|dx$ 收敛.

$\therefore \int_1^{+\infty}\left|\sin\left(\frac{\sin x}{x}\right)-\frac{\sin x}{x}\right|dx$ 收敛.

综合：$\int_1^{+\infty}\sin\left(\frac{\sin x}{x}\right)dx$ 条件收敛.

坐标变换：（直角坐标系 ⟷ 极坐标系）



$R^2-\{(x,0)\mid x\ge 0\}$　　　$\{(r,\theta)\mid 0<\theta<2\pi,\ r>0\}$

No.

Date

线性映射：

若 $y=Ax$ ， $x\in R^n$ ，$y\in R^m$.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$ ，则称从x到y的映射为线性映射.

线性映射模

$$\|A\| := \sup_{\forall x\in R^n} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

注：1° ∵ $\frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \|A\frac{x}{\|x\|}\|$ → 单位向量.

∴ $\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|$

2° $\|A\| = \left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}}$

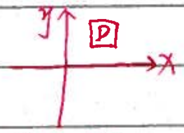
$$D(f\cdot g) = D(f^T\cdot g) = f^T Dg + g^T Df \quad ?$$

No. ______

Date ______

隐函数求导：

① 单个方程 $F(x,y)=0$, $F\in C'(D)$



由 $F(x,y(x))=0$

$$\frac{dF}{dx}=F_x'+F_y'\cdot\frac{dy}{dx}=0$$

（注：F_x', F_y' 等表示 F 对第1、第2个变元的偏导）

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=-\frac{F_x'}{F_y'}\quad (F_y'\neq 0)$$

② $F(x,y,z)=0$, $z=z(x,y)$

$$\frac{\partial F}{\partial x}=F_x'+F_z'\cdot\frac{\partial z(x,y)}{\partial x}\qquad \therefore\ \frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x'}{F_z'}\quad (F_z'\neq 0)$$

③ 高阶导数 $F\in C^2(D)$

$$\frac{d^2F}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(F_x'+F_z'\frac{\partial z}{\partial x}\right)=F_{xx}''+F_{xz}''\frac{\partial z}{\partial x}+\left(F_{zx}''+F_{zz}''\frac{\partial z}{\partial x}\right)\frac{\partial z}{\partial x}+F_z'\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}.$$

（对一个变元的 $\frac{d}{dx}$，形式上可以是对单变元函数的导，也可以是对多变元函数中 x 的偏导）

④ 复合函数 $F(xy, y+z, xz)$

$z=z(x,y)$

$$\text{则}\ \frac{\partial F}{\partial x}=F_1'\cdot y+F_2'\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+F_3'\left(z+x\cdot\frac{\partial z}{\partial x}\right)$$

$$\therefore\ \frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_1'y+F_3'\cdot z}{xF_3'+F_2'}$$

⑤ 方程组 $\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$ 固定 x 有 $\begin{pmatrix}y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y(x)\\z(x)\end{pmatrix}$，求 $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$

有 $\begin{cases}F_x'+F_y'\frac{dy}{dx}+F_z'\frac{dz}{dx}=0\\G_x'+G_y'\frac{dy}{dx}+G_z'\frac{dz}{dx}=0\end{cases}$

解线性方程组 $\frac{dy}{dx}=-\frac{|\quad|}{|\quad|}$, $\frac{dz}{dx}=-\frac{|\quad|}{|\quad|}$,

No. ______

Date ______

$$\begin{cases} F^1(x^1,\cdots,x^m,y^1,\cdots,y^p)=0 \\ \cdots\cdots \\ F^p(x^1,\cdots,x^m,y^1,\cdots,y^p)=0\end{cases} \to \begin{pmatrix} y^1\\ \vdots \\ y^p\end{pmatrix} = \begin{cases} y^1(x^1,\cdots,x^m)\\ \cdots\cdots \\ y^p(x^1,\cdots,x^m)\end{cases}$$

对第i个方程，对x^k求偏导，有

$$\frac{\partial F^i}{\partial x^k}+\sum_{j=1}^{p} \frac{\partial F^i}{\partial y^j}\cdot\frac{\partial y^j}{\partial x^k}=0$$

$$\therefore \begin{pmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial x^k}\\ \cdots \\ \frac{\partial F^p}{\partial x^k}\end{pmatrix} + \left(\frac{\partial F^i}{\partial y^j}\right)_{p\times p} \begin{pmatrix} \frac{\partial y^1}{\partial x^k}\\ \vdots \\ \frac{\partial y^p}{\partial x^k}\end{pmatrix}_p = 0$$

$$\therefore \begin{pmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial x^k}\\ \cdots \\ \frac{\partial F^p}{\partial x^k}\end{pmatrix} = -\left(\frac{\partial F^i}{\partial y^j}\right)_{p\times p} \begin{pmatrix} \frac{\partial y^1}{\partial x^k}\\ \vdots \\ \frac{\partial y^p}{\partial x^k}\end{pmatrix}_p$$

极限过程要求点∈定义域/{趋近点}，如

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y}$，其中有 $(x,y) \in \{R^2\} - \{(x,y) \mid y=-x^2\} - \{(0,0)\}$

已知 $f'(x)\, y\, g(y) = x f(x) g'(y)$ ，$\forall x,y \in R$.

则

$$\frac{g'(y)}{y\cdot g(y)} = \frac{f'(x)}{x f(x)} \quad \forall x,y \in R$$

$$\therefore \frac{g'(y)}{y\cdot g(y)} = \frac{f'(x)}{x f(x)} = C_1$$

$$\therefore (\ln|f(x)|)' = C_1 x$$

$$\therefore \ln|f(x)| = C_2 + \int C_1 x$$

$$= C_2 + \frac{1}{2} C_1 x^2$$

$$\therefore |f(x)| = C_3 \cdot e^{\frac{1}{2}C_1 x^2}$$

No. ______
Date ______

$\therefore\ f(x) = C_4 \cdot e^{\frac{1}{2}C_1 x^2}$ （$\because f(x)$ 可微）

同理 $g(y) = C_5 \cdot e^{\frac{1}{2}C_1 y^2}$

$\therefore\ F(x,y) = f(x)g(y) = C_6 \cdot e^{\frac{1}{2}C_1(x^2+y^2)}$

解方程： $y' + P(x)y + Q(x) = 0$ （P、Q已知）

多个方程解隐函数：

若 $F^i(x^1, \cdots, x^m, y^1, \cdots y^p) = 0$ $(i=1,\cdots,p)$

D: $|x^i - x_0^i| < a$ $|y^j - y_0^j| < b$ $(i=1,\cdots,m;\ j=1,\cdots,p)$

① $F^i \in C^1(D)$

② $F^i(x_0^1, \cdots x_0^m, y_0^1, \cdots, y_0^p) = 0$ $(i=1,\cdots,p)$

③ $\left.\dfrac{\partial(F_1,\cdots,F_p)}{\partial(y^1,\cdots,y^p)}\right|_{(x_0^1,\cdots x_0^m, y_0^1,\cdots y_0^p)} \neq 0$

则在 D': $|x^i - x_0^i| < \alpha < a$ ， $|y^j - y_0^j| < \beta < b$ 中

$\exists$ 唯一隐函数

$y^i = f^i(x_1, \cdots, x_m)$ $(i=1,\cdots,p)$

s.t. $F^i(x_1,\cdots,x_m, f^1(x_1,\cdots,x_m), \cdots, f^p(x_1,\cdots,x_m)) \equiv 0$

即有 $\vec{y} = f(\vec{x})$, s.t. $F(\vec{x}, f(\vec{x})) \equiv 0$

且其 Jacobi 矩阵为

$$\begin{pmatrix} dy^1 \\ \vdots \\ dy^p \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial y^1} & \cdots & \frac{\partial F^1}{\partial y^p} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F^p}{\partial y^1} & \cdots & \frac{\partial F^p}{\partial y^p} \end{pmatrix}_{p\times p}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial F^1}{\partial x^n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F^p}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial F^p}{\partial x^n} \end{pmatrix}_{p\times n} \begin{pmatrix} dx^1 \\ \vdots \\ dx^n \end{pmatrix}_{n\times 1}$$

No.
Date

已知 $G \in R^m$

则 $H=\{f(x) \mid x\in G\}\in R^n$，称H为G在f作用下的像集，

记 $H=f(G)$

G称为H的原像集，记 $G=f^{-1}(H)$.（不要求 $f^{-1}(x)$ 存在）

局部同胚

若 $a\in G$，$\exists U$ 开集 $\subset G$，$a\in U$，

$b=f(a)\in H$，$\exists V$ 开集 $\subset H$，

s.t. f在U上是从U到V的同胚. 则f在a点局部同胚.

定理：若 $\begin{cases} \vec{y}=f(\vec{x})\in C^1(D), & y^i=f^i(x^1,\cdots,x^n) \\ \vec{y}_0=f(\vec{x}_0) & x_0\in D \\ \det(Df(x_0))\neq 0 \end{cases}$

则 ① $\exists x$ 的一个邻域U，st f在U中单一.

② $f(U)=V$，V是开集，

③ $f^{-1}\in C^1(V)$，$x=f^{-1}(y)$.

推论：$f:\Omega^{\in R^m}\to R^m$，且 $\det(Df(x))\neq 0$，$\forall x\in D$

则 $\forall G$ 开集 $\subset\Omega$，$f(G)$是开集。

定理：若 $f: G\to R^m \in C^r(G)$

(1) f单一. $(\forall x_1,x_2\in G,\ x_1\neq x_2 \Rightarrow f(x_1)\neq f(x_2))$

(2) $\det(Df(x))\neq 0$，$\forall x\in G$. $(\Rightarrow f, f^{-1}$ 局部 $C^r)$

则 f是G到f(G)的 C^r 微分同胚.

No. ______

Date ______

习题：Ω是凸区域，$\Omega\subset\mathbb{R}^n$，$f\in C^1(\Omega,\mathbb{R}^n)$. Df正定，证明f单射.

保证 $x_1\to x_2$连线有定义

~~构造 $g(x)=(x_2-x_1$~~

假设 $\exists x_1,x_2$，$x_1\neq x_2$，$f(x_1)=f(x_2)$.

则构造 $g(x)=(x_2-x_1)\cdot(f(x)-f(x_1))$

$G(t)=g(x_1+t(x_2-x_1))\quad(0\le t\le 1)$

则 $G(t)\in C^1[0,1]$，$\because G(0)=G(1)$

条件给强了点，不过不影响

$\therefore G'(\theta)=0\quad(\theta\in(0,1))$

即 $(x_2-x_1)\cdot Df(x_1+\theta(x_2-x_1))\cdot(x_2-x_1)=0$

与Df正定矛盾. $\square$

注：当题中出现高阶混合偏导数时，一般认为它们相同（与偏导顺序无关）.

已知 $u\cdot u''_{xy}=u'_x\cdot u'_y$，则 $u(x,y)=f(x)\cdot g(y)$

梯度 ∇ (nabla)

1. 标量值函数的梯度是一个向量值函数。
2. 标量值函数在某一点的梯度指向函数增长最快的方向，它的大小为这个最大的变化率。(参见4.)
3. 最专业一点的说，从欧氏空间 R^n 到 R 的函数的梯度是在 R^n 某一点最佳的线性近似。
4. 方向导数 $f'_{\vec{e}} = \nabla f \cdot \vec{e} = \|\nabla f\| \cdot \cos\langle \nabla f \cdot \vec{e} \rangle$

   易知当 $\vec{e}$ 与 ∇f 方向相同时，$f'_{\vec{e}}$ 最大

拉普拉斯算子 (Δ (或 ∇^2))

1. 拉普拉斯算子定义为n维欧氏空间中，梯度 (∇f) 的散度 (∇).
2. 在二阶可微的实函数里，拉普拉斯算子定义为

   $$\Delta f = \nabla^2 f = \nabla \cdot \nabla f$$

3. $$\Delta f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$$
4. 拉普拉斯算子是函数 Hess 矩阵的迹：

   $$\Delta f = tr(H(f))$$

No.
Date

习题：1. 设 $f\in C^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$，且在 $\mathbb{R}^n$ 上 $\det Df(x)\neq 0$，
又当 $|x|\to+\infty$ 时，$|f(x)|\to+\infty$。证明 $f(\mathbb{R}^n)=\mathbb{R}^n$.

以后把 $|x|$ 统统视为 x 的模.

现证明 $\forall \xi\in\mathbb{R}^n$，$\exists x_0\in\mathbb{R}^n$，s.t. $f(x_0)=\xi$.

构造函数 $\varphi(x)=|f(x)-\xi|^2$

则 $|x|\to+\infty$，$\varphi(x)\to+\infty$ （在 $\mathbb{R}^n$ 上存在以原点为中心的一个"闭球"，s.t. 在球外任一点 $\varphi>M$，而在"闭球"中，由于 $\varphi(x)$ 连续，知 $\varphi(x)$ 有最小值）

$\therefore \min\varphi(x)=\varphi(x_0)$ 存在.

而 $\because \nabla\varphi(x_0)=2(f(x_0)-\xi)\cdot Df(x_0)=0$

这是个向量，只有这样组织式子，才有 $Df(x_0)$ 产生.

而 $Df(x_0)$ 可逆.

$\therefore f(x_0)=\xi$. □

2. 设 $u(x,y)$ 在 $x^2+y^2\leq 1$ 上连续，在 $x^2+y^2<1$ 上满足 $\Delta u=u$
且在 $x^2+y^2=1$ 上，$u(x,y)>0$.

证明：(1) 当 $x^2+y^2\leq 1$ 时，$u(x,y)\geq 0$

(2) 当 $x^2+y^2\leq 1$ 时，$u(x,y)>0$.

(2) 构造函数 $\tilde{u}=u(x,y)-\varepsilon f(x,y)$，其 f 是满足 $\Delta f=f$ 的函数

取 $f=e^x+e^y$，

再取 $\varepsilon=\frac{1}{2}\cdot\frac{\min u(x,y)}{\max f(x,y)}$，$(x^2+y^2=1)$

构造函数，利用已证结论！

则 $\tilde{u}(x,y)$ 满足条件：

1° 在 $x^2+y^2\leq 1$ 上连续，

2° 在 $x^2+y^2<1$ 上有，$\Delta\tilde{u}=\tilde{u}$.

3° 在 $x^2+y^2=1$ 上，$\tilde{u}(x,y)>0$

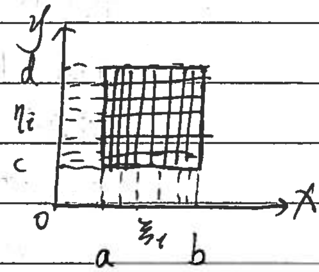
由第(1)问结论，有 $\tilde{u}(x,y)\geq 0$.

$\therefore u(x,y)\geq\varepsilon f(x,y)>0$，在 $x^2+y^2\leq 1$ 上恒成立.

重积分 (方企勤)

对 $z=f(x,y)$.

$$V=\lim_{\Delta\sigma_i\to 0}\sum_i f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$$
(面积)



1. 定义 $\sigma(f,P,\xi)=\sum_{i=1,j=1}^{n,m} f(\xi_{ij})\sigma(Q_{ij})$

取 $\xi_{ij}\in Q_{ij}$.

$|P|\to 0$. 其中 $|P|=\max_{i,j}\{|\Delta x^i|,|\Delta y^j|\}$, $(|P|\neq \max\{Q_{ij}\})$

2. 在 R^n 上, $f(x_1,\cdots,x_n)$; 区域 $\left\{(x_1,\cdots,x_n)\,\middle|\,\begin{matrix}a_1\le x_1\le b_1\\ \cdots\\ a_n\le x_n\le b_n\end{matrix}\right\}$

2.2 P: $a_i\le x_i\le b_i$, $\underbrace{a_i=x_i^0<x_i^1<\cdots<x_i^{m_i}}_{m_i\text{块}}=b_i$.

P 分为 $\prod_{i=1}^{n} m_i$ 块.

2.3 小方块 $Q_{j_1j_2\cdots j_n}=\left\{(x_1,\cdots,x_n)\,\middle|\,\begin{matrix}x_1^{j_1-1}\le x_1\le x_1^{j_1}\\ \cdots\\ x_n^{j_n-1}\le x_n\le x_n^{j_n}\end{matrix}\right\}$

令 $J=(j_1,\cdots,j_n)$

则 $V(Q_J)=\prod_{i=1}^{n}(x_i^{j_i}-x_i^{j_i-1})$

2.4 $|P|\to 0$, 其中 $|P|=\max_{i,j}(x_i^{j_i}-x_i^{j_i-1})$

则 $\sigma(f,P,\xi)=\sum_J f(\xi_J)V(Q_J)$

2.5 $\lim_{|P|\to 0}\sum_J f(\xi_J)\cdot V(Q_J)\overset{记}{=}\int_Q f\,dx_1\cdots dx_n$

$\overset{记}{=}\int_Q f(x_1,\cdots,x_n)\,d(x_1,\cdots,x_n)$

$\overset{记}{=}\underbrace{\int\cdots\int_Q}_{n个} f(x_1,\cdots,x_n)\,dx_1dx_2\cdots dx_n.$

3. 重积分的性质.

可积函数一定有界.

积分具有线性性质

积分单调性.

积分中值定理.(介值性)

可积性条件.

可积函数类(线性,乘除,绝对值;闭集上连续

4. 重积分计算

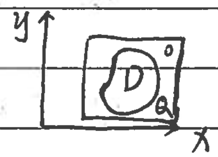
对二元函数 $f(x,y)$, $x\in(a,b)$, $y\in(c,d)$

$$\iint_Q f(x,y)\,dxdy = \int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)dx = \int_a^b I(x)\,dx$$
$$= \int_a^b dx\int_c^d f(x,y)\,dy$$

累次极限: ① $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A$, $\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)=\varphi(x)$ $\Rightarrow$ $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)$ $=\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)=A$

推论:若两个累次极限存在且不等,则重极限不存在.

5. Jordan 可测集上的积分.



1° 对函数 $f(x,y)$, $(x,y)\in D$, 在 Q 上延拓为

$$\tilde{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & (x,y)\in D \\ 0 & (x,y)\in Q/D \end{cases}$$

依据积分的可加性,有 $\int_Q \tilde{f}\,dxdy = \int_D f\,dxdy$.

2° 可积性: Ω = 内部 + $\underbrace{\text{边界}}_{\substack{\max|f|\times\text{边} \\ \text{界上方块面积}\to 0}}$ + $\underbrace{\text{外部}}_{0}$

习题：1、症勤 P_{300}.

2、$A^{n\times n}$ 正定，$B^{n\times n}$ 半正定，则 $A*B$ 半正定. 其中 $(A*B)_{ij}=a_{ij}\cdot b_{ij}$.

必 3. f 在 x_0 极小 $(f\in C^2)$ $\Rightarrow$ (必要条件) $\begin{cases} \nabla f(x_0)=0 \\ \mathrm{Hess}f(x_0) \text{ 半正定}. \end{cases}$

4. $\left.\begin{array}{l} A^{n\times n} \text{ 正定} \\ H^{n\times n} \text{ 半正定} \end{array}\right\} \Rightarrow$ $A*H$ 有 n 个非负特征值.

5. 矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 正定，$u\in C^2(\Omega)\cap C(\bar{\Omega})$，$\Omega$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中有界开区域.

有 $x_0\in\Omega$, s.t. $u(x_0)=\min\limits_{x\in\bar{\Omega}} u(x)$.

证明：$\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}\Big|_{x=x_0}\geq 0$.

(引入)特征函数. $\chi_{(A)}(x) = \begin{cases} 1 & (x\in A) \\ 0 & (x\notin A) \end{cases}$

则 包含边界的方块体积之和 $= U(\chi_{\partial D}(x),P) - L(\chi_{\partial D}(x),P)$

当 $\lim\limits_{|P|\to 0} U = \lim\limits_{|P|\to 0} L$ 时，区域D的边界不影响函数f的可积性.

记 $m(D) = \lim\limits_{|P|\to 0} U = \lim\limits_{|P|\to 0} L$，称 $m(D)$ 为D的Jordan测度，

且称D是一个Jordan可测集.

3° 非Jordan可测集

[0,1]中有理数集.

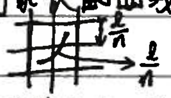
? Peano曲线为边界的二维几何图形.

注：低维下的(非)Jordan可测集，在高维上可测.

4° 一些性质：① A, B Jordan可测，则 $A\cap B$, $A\cup B$, $A-B$ 也是Jordan可测

且(类似的[illegible])：$m(A\cup B) = m(A)+m(B)-m(A\cap B)$

② 可求长的曲线围成的区域是Jordan可测集.



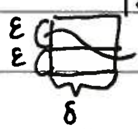
$S_{\partial D} = (4n)\times(\frac{\ell}{n})^2 = 4\frac{\ell^2}{n} \to 0.$ □

③ 连续函数是函数空间上的零集.

即(一种情况)：$y=f(x)$，$x\in[a,b]$，$f\in C^0$，则f是 $\mathbb{R}^2$ 上的零集.

∵ f一致连续，则 $\forall \varepsilon>0, \exists \Delta$，当 $|x'-x''|<\Delta$ 时，

$|f(x')-f(x'')| < \varepsilon$.



则 $S_{\partial D} = (2\varepsilon)\times(\delta)\times(\frac{b-a}{\delta}) = 2\varepsilon(b-a) \to 0.$ □

5° Jordan可测集上的积分.

对 $f(x)$，$x\in D$，D是Jordan可测集.

若 $\tilde{f}$ 在Ω可积，则f在D可积.

6° 定理：D是闭Jordan可测集，$f\in C(D)$，

则f在D上重积分存在.

g有界.

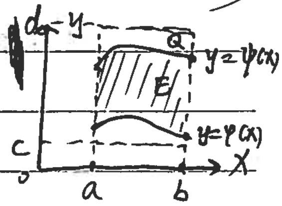
7° 定理：函数f, g，$x\in D$，D是Jordan可测集，且f, g只在D的一个零子集上函数值不同

则 f在D可积 ⇒ g在D可积且 $\int_D f\,dx = \int_D g\,dx$.

No.
Date

6. Jordan 可测集上积分的计算.

1° 二元函数.



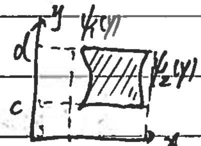
① $\varphi,\psi\in C[a,b]$, $E=\{(x,y)\mid \varphi(x)\le y\le \psi(x),\ a\le x\le b\}$

则 E 是 Jordan 可测集。对二元函数 $z=f(x,y)$,

则 $\int_E f(x,y)=\int_Q \tilde{f}(x,y)$

$$=\int_a^b dx\int_c^d \tilde{f}(x,y)\,dy$$

$$=\int_a^b dx\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy.$$

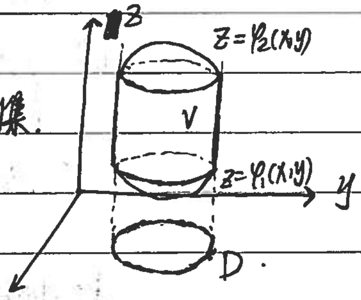


② 对右图所示的情况

$$\int_E f(x,y)=\int_c^d dy\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx$$

注：做题时，首先判断是①、②类中的哪一种，如果都可以，则要特别注意哪种作法方便。

2° 三元函数.



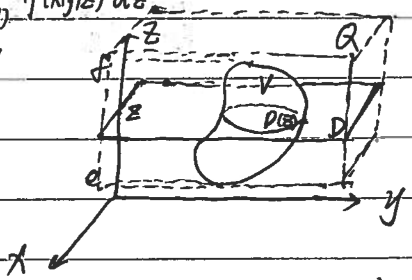
① $\varphi_1,\varphi_2\in C(\bar{D})$, D是 x-y 平面上的Jordan可测集.

$V=\{(x,y,z)\mid \varphi_1(x,y)\le z\le \varphi_2(x,y),\ (x,y)\in D\}$

则 V是 $\mathbb{R}^3$ 上的 Jordan 可测集.

则 $\iiint_V f(x,y,z)\,dxdydz=\iiint_Q \tilde{f}(x,y,z)\,dxdydz$

$$=\iint_D dxdy\int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz.$$



② $V=\{(x,y,z)\mid e\le z\le f,\ (x,y)\in D(z)\}$

$\iiint_V g\,dxdydz=\iiint_Q \tilde{g}\,dxdydz$

$$=\int_e^f dz\iint_D \tilde{g}\,dxdy$$

$$=\int_e^f dz\iint_{D(z)} g\,dxdy.$$

注：做题时，要判断①②两种方法哪个更方便.(如当 g 与 x,y 无关时,用②方便得多).
做重积分时把图画出来会方便很多.

重积分的变量替换

多元函数 $\varphi: \Omega \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$，$\varphi \in C^1(\Omega)$

对 $E \subset \Omega$，E 是 Jordan 可测集.

若：(1) $\det D\varphi(t) \neq 0$，$\forall t \in E^\circ$.

(2) $\varphi(t)$ 是一一对应的，$\forall t \in E^\circ$.

则：$\displaystyle\int_{\varphi(E)} f(x)dx = \int_E f(x(t)) \left|\det D\varphi\right| dt.$

用新坐标表示的小方块的面积.

典型替换

① $\begin{cases} u = x+y \\ v = x-y \end{cases}$ (直线系)；

$\left(|\det \varphi(x,y)| = \frac{1}{2} \right)$

② $\begin{cases} u = \frac{y^2}{x} \\ v = \frac{x^2}{y} \end{cases}$ (曲线系).

$\left(|\det D\varphi(x,y)| = \frac{1}{3} \right)$

③ $\begin{cases} u = xy & (曲线) \\ v = \frac{y}{x} & (直线). \end{cases}$

$\left(|\det \varphi(x,y)| = \left|\frac{1}{2v}\right| \right)$

④ $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ (极坐标变换).

$\left(|\det \varphi(x,y)| = r \right)$

("椭圆坐标") 对极坐标的拓展，适合于积分域为椭圆类的积分。

$\begin{cases} x = ar\cos\theta \\ y = br\sin\theta \end{cases}$ ~~(0≤r≤1) (a,b>0)~~

$\left(\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right| = abr \right)$

三重积分变量替换

典型替换：①

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$ （柱坐标）

$$\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)}\right| = r$$

②

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\cos\theta \\ y = r\cos\varphi\sin\theta \\ z = r\sin\varphi \end{cases}$$

（球坐标）
$(0\le\theta\le 2\pi,\ -\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\frac{\pi}{2})$.

（φ为天顶角的余角）

$$\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)}\right| = r^2\cos\varphi.$$

（"椭球坐标"）

$$\begin{cases} x = a\,r\cos\varphi\cos\theta \\ y = b\,r\cos\varphi\sin\theta \\ z = c\sin\varphi. \end{cases}$$

$$\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)}\right| = abc\,r^2\cos\varphi.$$

对待积分的两种视角.

1. 计算视角（求原函数视角）.

这是我们对待积分最初的认识，强调被积函数，轻视积分域，无视微分部分

2. 定义视角（积分微元-积分域视角）

随着积分类型的增多，一种新的视角逐渐突显它的重要性。

它强调积分作为和的极限这一定义，将积分分为头部的积分域（也有积分的重数、是否闭路积分）和后面的积分微元（标志点处被积值，积分域微元）。这种视角便于理解积分的实际意义（如第二型曲线积分）。

No.

Date

第一型曲线积分 (scalar)

$$\int_L f(P)\,ds = \int_\alpha^\beta f(\vec{P}(t))\cdot\|\vec{P}'(t)\|\,dt$$

L：可求长曲线，$P(t)$ 连续可微（分段连续可微）

f：连续.

第一型曲面积分

$$\iint_S f(Q)\,d\sigma = \iint_D f(\vec{Q}(u,v))\cdot\|\vec{Q}_u\times\vec{Q}_v\|\,du\,dv$$

其中 $\|\vec{Q}_u\times\vec{Q}_v\| = \sqrt{A^2+B^2+C^2} = \sqrt{EG-F^2}$；D为参数区域.

S：简单正则曲面（分片简单正则曲面）.

f：连续

（特别的，对显式表示的曲面 $z=z(x,y)$，$(x,y)\in D$，

$A=-\frac{\partial z}{\partial x}$，$B=-\frac{\partial z}{\partial y}$，$C=1$，

$\therefore \|\vec{Q}_x\times\vec{Q}_y\| = \sqrt{(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial y})^2+1}$ ）

第二型曲线积分 (vector)

$$\int_\gamma P\,dx = \int_\alpha^\beta P(\vec{r}(t))\cdot x'(t)\,dt$$

$$\int_\gamma P\,dx+Q\,dy+R\,dz = \int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_\alpha^\beta \vec{F}(\vec{r}(t))\cdot\vec{r}'(t)\,dt$$

γ：连续可微有向曲线（上述计算式假定 γ 以 t 增加的方向为正方向，否则取反）

$\vec{F}$、P：连续

（特别的，如果有向曲线 γ 的始端与终端相连接，那么我们说 γ 是一条闭有向曲线，相应的积分号写作

$$\oint_\gamma P\,dx \quad , \quad \oint_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}$$ ）

No. ______
Date ______

第二型曲面积分

$$\iint_S f(M)\cos\alpha(M)\,d\sigma = \iint_{+S} f(x,y,z)\,dy\wedge dz = \pm\iint_D fA\,du\,dv$$

其中，$\cos\alpha(M)\,d\sigma$ 是微小有向曲面块 S_i 在 OYZ坐标平面上的投影的有向面积。此积分叫作函数f沿曲面S的正侧对yz坐标的曲面积分.

$$\iint_S \vec{f}\cdot\vec{n}\,d\sigma = \iint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,d\sigma$$

$$= \iint_{+S} P\,dy\wedge dz + Q\,dz\wedge dx + R\,dx\wedge dy = \pm\iint_D (PA+QB+RC)\,du\,dv$$

$\iint_S \vec{F}\cdot d\vec{\sigma} = \pm\iint_D \vec{F}\cdot(\vec{Q}_u\times\vec{Q}_v)\,du\,dv$

(方向不变，大小不变)

$$= \iint_{+S} P\,dydz + Q\,dzdx + R\,dxdy = \pm\iint_D \begin{vmatrix} P & Q & R \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} du\,dv.$$

$\vec{F}\cdot(\vec{Q}_u\times\vec{Q}_v)\,du\,dv$

S：R^3中可定向的正则曲面，S的正侧记为+S或S^+.

S的正法线单位向量 $\vec{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$

f：连续

(特别的，对可定向的闭曲面，常写成 $\oiint_S \vec{f}\cdot\vec{n}\,d\sigma$)

$A = \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}$，$B = \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}$，$Z = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ 换方向，正负号要判断好.

定理：任何正则简单曲面都可定向.

格林公式：$\oint_C \vec{a}\cdot d\vec{l} = \iint_D \mathrm{rot}\,\vec{a}\cdot d\vec{s}$ (场$\vec{a}$沿C的旋转量等于D各面元上涡旋量的和)

Ω：R^2上由有限条连续可微曲线围成的闭区域.

P,Q：Ω上连续可微.

$$\oint_{\partial\Omega} P\,dx + Q\,dy = \iint_\Omega \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} dx\,dy$$

$(dx,dy) = \vec{\tau}_{(x,y)}\,dl = d\vec{l}$ 可与stokes公式统一起来.

高斯公式：Ω：R^3上可分别拆分为A.B.C类区域的闭区域.

$\oiint_{\partial\Omega} \vec{a}\cdot d\vec{s} = \iiint_\Omega \mathrm{div}\,\vec{a}\,dv$. P,Q,R：Ω上连续可微.

散度

$$\oiint_{\partial\Omega} P\,dydz + Q\,dzdx + R\,dxdy = \iiint_\Omega \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz = \iiint_\Omega \underbrace{\nabla\cdot\vec{F}}_{散度}\,\underbrace{dv}_{体积微元}$$

(场$\vec{a}$在面上的流量等于在Ω各体积元上散度的和)

若微分 $w = Pdx + Qdy + Rdz$.

① 若 $dw=0$，则称 w 为闭微分

② 若 $\exists U$, st. $du = w$，则称 w 为恰当微分.

依线积分与路径无关的4个等价条件.

(3) ⇒ (4) 可表述为"恰当微分总是闭的" ($\because d^2u=0$)

当区域单连通时，(4) ⇒ (3)，"此条件下，闭微分是恰当的".

在 Gauss 公式对 Ω 的假定下，若在 Ω 内某些点(或某一区域上)有 $\mathrm{div}\vec{F}(M)\neq 0$ 或 $\mathrm{div}\vec{F}(M)$ 不存在，而在其它点上恒有 $\mathrm{div}\vec{F}(M)=0$，则 $\vec{F}$ 穿出包围这些点(或区域)的任一封闭曲面的流量都相等

在 Green 公式条件下，若 D 上某些点(或区域)有 $\mathrm{rot}\vec{a}\neq 0$ 或不存在，而在其它点上恒有 $\mathrm{rot}\vec{a}=0$，则沿包围这些点(或区域)的任一封闭曲线的旋转量(环流)都相等，即为一常数。

No. ______

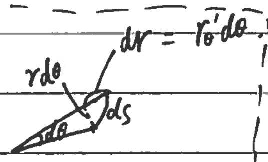
Date ______

变形格林公式：

$$\oint_C \vec{a}\cdot\vec{n}\,dl = \iint_D \mathrm{div}\,\vec{a}\,ds.$$ （$\vec{n}$为 dl 的外法向单位向量）

用极坐标表示的曲线弧长

$$ds = \sqrt{r^2 + r_\theta'^2}\,d\theta$$



$ds = \sqrt{(rd\theta)^2 + (r_\theta' d\theta)^2}$

泊松公式：

$$\oiint_S f(ax+by+cz)\,dS = 2\pi\int_{-1}^{1} f(\sqrt{a^2+b^2+c^2}\,u)\,du.$$

其中 $S:\ x^2+y^2+z^2=1.$

证明：① 旋转坐标架： $\oiint_{S'} f(\sqrt{a^2+b^2+c^2}\,u)\,dS$ ，$S': u^2+v^2+w^2=1.$

② 极坐标变换
$$\begin{cases} u=u & (u\in[-1,1]). \\ v=\sqrt{1-u^2}\cos\theta & (\theta\in[0,2\pi]) \\ w=\sqrt{1-u^2}\sin\theta \end{cases}$$

有 $dS=$ [redacted] $du\,d\theta$ （重要!） $\square$.