Note：1、全微分

$$df \doteq \nabla f \cdot d\vec{l}$$

2、连续可微

$f(\vec{x})$ 在点 $\vec{x}_0$ 邻近各偏导数都存在，且它们作为 m元函数在 $\vec{x}_0$ 处连续，那么 $f(\vec{x})$ 在 $\vec{x}_0$ 处连续可微。

3、混合偏导数与求导顺序无关条件：

若 f 的所有 k 阶混合偏导数在 x_0 点连续（在 x_0 点邻域存在），则 f 的 k 阶混合偏导数在 x_0 点与求导顺序无关。

一元（数值）函数与向量值函数的比较

	一元（数值）函数	向量值函数
定义	$f: R \supset \Omega \to R$	$f: R^m \supset \Omega \to R^p$
连续性	$\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$	① 定义：$\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ ② 判别：$f^i(x)$ 作为多元函数连续
可微性	$f(x_0+h) - f(x_0) = Ah + o(\lVert h \rVert)$ $(A \in R)$ 记法：$df(x_0) = A\,dx$	$\lVert f(x_0+h) - f(x_0) - Ah \rVert = o(\lVert h \rVert)$ $(A \in R^{p \times m}$，是个线性映射$)$ 记法：$Df(x_0)\,dx = A\,dx$ 判别：$f^i(x)$ 作为多元函数在 x_0 可微
链式法则	$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$	$D(g \circ f)(x_0) = Dg(f(x_0)) \cdot Df(x_0)$
有限增量公式	$f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b-a)$ (*1) $(c \in (a,b))$	$\lVert f(b) - f(a) \rVert \le \lVert Df(c) \rVert \, \lVert b-a \rVert$ (*2) $(c \in (a,b))$
共同性质	① 可微 $\Rightarrow$ 连续 ② 微分算子 D 是线性的	

注：1、此条在多元函数中亦成立。

2、证明：令 $g(x) = [f(b) - f(a)] \cdot f(x)$，则 $g(b) - g(a) = \lVert f(b) - f(a) \rVert^2$

由多元函数有限增量公式，有 $g(b) - g(a) = Dg(c) \cdot (b-a)$

联立有，$\lVert f(b) - f(a) \rVert^2 = [f(b) - f(a)] \cdot Df(c) \cdot (b-a)$

由柯西不等式与范数性质 $\lVert f(b) - f(a) \rVert^2 \le \lVert f(b) - f(a) \rVert \cdot \lVert Df(c) \rVert \cdot \lVert b-a \rVert$. □

统一函数微分学的核心约定：

一、约定距离结构.

1. 欧氏范数（最常用范数）

$N(A) = \left(\sum_i A_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$，$N: R^x \to R$ $(x \in N_+)$

（A可以是线性映射）

2、范数的性质（norm）

① $N(A) \geq 0$，且 $N(A) = 0 \Leftrightarrow A = 0$

② $N(\lambda A) = |\lambda| N(A)$，其中 $\lambda \in R$

③ $N(A+B) \leq N(A) + N(B)$

④ $N(BA) \leq N(B) N(A)$

无论范数如何定义，都要满足以上性质.

二、约定邻域

$U(a, \eta) = \{x \mid N(x-a) < \eta\}$，称为 a 的 η 邻域.

三、约定点与点间开区间.

$(a, b) = \{x \mid x = a + t(b-a),\ t \in (0,1)\}$

四、约定收敛点列.

1. $\forall R \ni \varepsilon > 0$，$\exists N \in N$，st. $\forall n > N$，$N(x_n - a) < \varepsilon$

我们就说点列 $\{x_n\}$ 收敛于点 a.

2、柯西点列

$\forall R \ni \varepsilon > 0$，$\exists N \in N$，st $\forall n_1, n_2 > N$，$N(x_{n_1} - x_{n_2}) < \varepsilon$.

我们就说点列 $\{x_n\}$ 是柯西点列.

五、约定函数极限

$\forall R \ni \varepsilon > 0$，$\exists \eta > 0$，st. $\forall x$，$N(x - x_0) < \eta$，且 $x \neq x_0$，

$N(f(x) - A) < \varepsilon$

则称 $f(x)$ 在 x_0 点以 A 为极限.

向量值函数的偏微分

1. $F: R^{m+p} \supset \Omega \to R^q$，若 $\lim\limits_{\|h\| \to 0} \dfrac{\|F(x_0+h, y_0) - F(x_0, y_0) - Ah\|}{\|h\|} = 0$，

则称线性映射 A 为 F 在 (x_0, y_0) 处对 x_0 的偏微分，记为 $D_x F(x_0, y_0) = A$

2、性质：F 可微分 $\Rightarrow$ F 所有偏微分存在，且 $D_x F(x_0, y_0)$ 为 $DF(x_0, y_0)$ 的前x列。

正项级数的收敛

正项级数的收敛原理[*(1)]：正项级数收敛 $\Longleftrightarrow$ 它的部分和序列 $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$ 有上界.
(单调收敛原理)

判别法(大类)	内容		结论
比较判别法 (一般形式)	$\sum_{n=1}^{+\infty}b_n$ 收敛 $\sum_{n=1}^{+\infty}b_n$ 发散	$\exists c>0, n_0\in\mathbb{N}$, $a_n\le cb_n$, $a_n\ge cb_n$, $\forall n>n_0$	$\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ 收敛 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ 发散.
比较判别法 (极限形式)	$\sum_{n=1}^{+\infty}b_n$ 收敛 $\sum_{n=1}^{+\infty}b_n$ 发散	$\lim \frac{a_n}{b_n}=r$　$r<+\infty$ $r>0$	$\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ 收敛. $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ 发散.
比值判别法[(2)]	$\sum a_n$、$\sum b_n$ 均为严格正项级数, $\sum b_n$ 收敛 $\sum b_n$ 发散	$\exists n_0\in\mathbb{N}$, $\frac{a_{n+1}}{a_n}\le\frac{b_{n+1}}{b_n}$ $\frac{a_{n+1}}{a_n}\ge\frac{b_{n+1}}{b_n}$, $\forall n>n_0$	$\sum a_n$ 收敛 $\sum a_n$ 发散.

常用判别法	依据	内容	结论
柯西根式判别法 (一般形式)	比较判别法 $b_n=r^n$	$\exists r<1, N\in\mathbb{N}$, $\sqrt[n]{a_n}<r$, $\forall n\ge N$ 对无穷多个 n, $\sqrt[n]{a_n}\ge 1$	$\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ 收敛. $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ 发散.
柯西根式判别法 (极限形式)	(同上)	$\lim\sqrt[n]{a_n}=q$,　$q<1$ $q>1$	$\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ 收敛 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ 发散.
柯西积分判别法		$f(x)\searrow$, $x\in[1,+\infty)$, $f(x)\ge 0$.	$\sum f(n)$ 与 $\int_1^{+\infty}f(x)dx$ 敛散性一致.
达朗贝尔判别法 (一般形式)	比值判别法 $b_n=r^n$	$\exists r<1, n_0\in\mathbb{N}$, $\frac{a_{n+1}}{a_n}\le r$ $\frac{a_{n+1}}{a_n}\ge 1$, $\forall n\ge n_0$	$\sum a_n$ 收敛 $\sum a_n$ 发散
达朗贝尔判别法 (极限形式)	(同上)	$\lim\frac{a_{n+1}}{a_n}=q$　$q<1$ $q>1$	$\sum a_n$ 收敛 $\sum a_n$ 发散

注：(1) 这里不考虑"广义收敛".
(2) 比值判别法的证明基于比较判别法

(续)

常用判别法	依据	内容		结论
拉阿贝判别法 (一般形式)	$\begin{cases}\text{比值判别法} \\ b_n = \frac{1}{n^p}\end{cases}$	$\exists q>1,\ n_0 \in N$	$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right) \geq q$, $\forall n > n_0$	$\sum a_n$ 收敛 (p-test)
			$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right) \leq 1$	$\sum a_n$ 发散.
拉阿贝判别法 (极限形式)	(同上)	$\lim n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right) = q$	$q>1$	$\sum a_n$ 收敛
			$q<1$	$\sum a_n$ 发散
高斯判别法		$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda + \frac{\mu}{n} + \frac{\nu}{n\ln n} + o\left(\frac{1}{n\ln n}\right)$	$\lambda>1$; $\lambda=1, \mu>1$; $\lambda=1, \mu=1, \nu>1$;	$\sum a_n$ 收敛
			$\lambda<1$; $\lambda=1, \mu<1$; $\lambda=\mu=1$, $\nu<1$	$\sum a_n$ 发散

Integration involving parameters

含参变元的常义积分

Thm: 如果 $f(t,x)$ 在 $D\times[a,b]$ 上一致连续，$(D\subset\mathbb{R})$

那么 $I(t)=\int_a^b f(t,x)\,dx$ 在 D 上连续、

Cor: 如果 $f(t,x)$ 在 $[\alpha,\beta]\times[a,b]$ 上连续，

那么 $J(t,u,v)=\int_u^v f(t,x)\,dx$ 在 $[\alpha,\beta]\times[a,b]\times[a,b]$ 上连续。

Thm: 如果 $f(t,x)$ 在 $[\alpha,\beta]\times[a,b]$ 上连续可微，

则 $I(t)=\int_a^b f(t,x)\,dx$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续可微，

且 $I'(t)=\int_a^b \frac{\partial f(t,x)}{\partial t}\,dx$

Cor: 如果 $f(t,x)$ 在 $[\alpha,\beta]\times[a,b]$ 上连续可微，

则 $J(t,u,v)=\int_u^v f(t,x)\,dx$ 在 $[\alpha,\beta]\times[a,b]\times[a,b]$ 上连续可微，

且

$$\begin{cases} \frac{\partial J}{\partial t}(t,u,v)=\int_u^v \frac{\partial f(t,x)}{\partial t}\,dx \\ \frac{\partial J}{\partial u}(t,u,v)=-f(t,u) \\ \frac{\partial J}{\partial v}(t,u,v)=f(t,v) \end{cases}$$

又如果 $\varphi(t),\psi(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续可微，

且 $a\le\varphi(t)\le b,\ a\le\psi(t)\le b,\ \forall t\in[\alpha,\beta]$

则 $K(t)=\int_{\varphi(t)}^{\psi(t)} f(t,x)\,dx$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续可微，

且 $K'(t)=\int_{\varphi(t)}^{\psi(t)} \frac{\partial f(t,x)}{\partial t}\,dx - f(t,\varphi(t))\varphi'(t)+f(t,\psi(t))\psi'(t)$

Thm: 如果 $f(t,x)$ 在 $[\alpha,\beta]\times[a,b]$ 上连续，

则 $\int_\alpha^\beta \left(\int_a^b f(t,x)\,dx\right) dt = \int_a^b \left(\int_\alpha^\beta f(t,x)\,dt\right) dx$