No.

Date

第一章 质点运动学

物理学中运动的方式：

机械运动：宏观物体空间位置随时间变化

电磁场的变化

分子热运动

质点：无变形，无旋转。

$$\frac{d}{dt}(\vec{A}+\vec{B}) = \frac{d}{dt}\vec{A} + \frac{d}{dt}\vec{B}$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{A}\cdot\vec{B}) = \frac{d\vec{A}}{dt}\cdot\vec{B} + \frac{d\vec{B}}{dt}\vec{A}$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{A}\times\vec{B}) = \frac{d\vec{A}}{dt}\times\vec{B} + \vec{A}\times\frac{d\vec{B}}{dt}$$ ✓懂了.

直线运动：

当$\Delta t \to 0$时，令$\Delta t = dt$，

$$dx = x(t+dt) - x(t)$$

$t_1 \sim t_2$，位移 $\Delta x = \sum_{t_1}^{t_2} dx = \int_{t_1}^{t_2} dx$

路程 $\Delta S = \sum_{t_1}^{t_2} |dx| = \int_{t_1}^{t_2} |dx|$

瞬时速度：$v = \frac{dx}{dt}$

加速度：$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$

运动形式：1. 匀速直线运动：
$$\begin{cases} a = 0 \\ v = 常量 \\ x = x_0 + vt \end{cases}$$

2. 匀加速～
$$\begin{cases} a = 常量 \\ v = v_0 + at \\ x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \end{cases}$$

No.

Date

把 $S(t)$ 表示"S，它是 t 的函数"这个含义，则 $S(t_0)$，$S(t_1)$，$S(t_0+\Delta t)$ 之类就是在 t_0，t_1，$t_0+\Delta t$ 时相应的 S 值.

导数运算定理的微商表示：（ms 微元本身是没有意义的，微商才有意义.）

① $$\frac{d}{dx}[u(x)\pm v(x)] = \frac{du}{dx}\pm\frac{dv}{dx}$$

② $$\frac{d}{dx}[u(x)v(x)] = v(x)\frac{du}{dx}+u(x)\frac{dv}{dx}$$

③ $$\frac{d}{dx}\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right] = \frac{v(x)\frac{du}{dx}-u(x)\frac{dv}{dx}}{[v(x)]^2}$$

④ $$\frac{d}{dx}u[v(x)] = \frac{du}{dv}\cdot\frac{dv}{dx}$$

一个函数 $y=f(x)$ 的导数 $f'(x)$ 乘以自变量的微分 dx，叫做这个函数的微分. 用 dy 或 $df(x)$ 表示.

即：$$dy \equiv df(x) \equiv f'(x)dx$$

不要以为数学表达式越精确越好，比方说 $\Delta l=\sqrt{l^2+a^2}-l$（$l$ 是常量），这是一个精确的公式，但没有一个鲜明的印象，无法了解 Δl 与 a 的变化关系。我们现在用二项式定理进行展开，只保留到最低级的非0项，则有

$$\Delta l = l\left[\sqrt{1+\left(\frac{a}{l}\right)^2}-1\right] = l\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{a}{l}\right)^2+\cdots-1\right] \approx \frac{1}{2}\left(\frac{a}{l}\right)^2 = \frac{a^2}{2l}$$

说明 Δl 是正比于 a 的平方增长的，属二级小量。这种用幂级数展开来分析的主要变化趋势的办法，在物理学里经常用到。

No.

Date

复数运算:

欧拉公式: $e^{\pm ix} = \cos x \pm i \sin x$ (用 Taylor 展开式解)

几个常用三角函数与复指数函数间的变换公式:

$$\cos\varphi = \frac{1}{2}(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi})$$

$$\sin\varphi = \frac{1}{2i}(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi})$$

$$\tan\varphi = -i\,\frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}$$

复数的表示法(极坐标(?)表示):

若复数 $\tilde{A}$ 的模为 A, 辐角为 φ, 则 $\tilde{A}$ 可表示为

$$\tilde{A} = Ae^{i\varphi}$$ (它的共轭复数 $\tilde{A}^* = Ae^{-i\varphi}$ (几何代数两方面理解)).

虚数单位的性质:

$$i = e^{i\frac{\pi}{2}} \qquad -i = e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

中项原则:

$$(\alpha \times \beta) \times \gamma = (\alpha \cdot \gamma)\beta - (\beta \cdot \gamma)\alpha$$

证明: (1) 若 $\alpha \times \beta = 0$, 即 $\alpha \parallel \beta$. 设 $\alpha = k\beta$.

则 左边 $= 0 \times \gamma = 0$

右边 $= (k\beta \cdot \gamma)\beta - (\beta \cdot \gamma)(k\beta) = 0$. □

(2) 若 $\alpha \cdot \beta = 0$, 即 $\alpha \perp \beta$. 取 α, β 的单位向量 α_0, β_0, 则 $\alpha_0, \beta_0, \alpha_0 \times \beta_0$ 构成空间直角坐标系(右手系).

现证 $(\alpha_0 \times \beta_0) \times \gamma = (\alpha_0 \cdot \gamma)\beta_0 - (\beta_0 \cdot \gamma)\alpha_0$.

设 $(\alpha_0 \times \beta_0) \times \gamma = x\alpha_0 + y\beta_0$.

则 两边用 α_0 作内积, 有.

$$(\alpha_0 \times \beta_0, \gamma, \alpha_0) = x$$

即 $[\alpha_0 \times (\alpha_0 \times \beta_0)] \cdot \gamma = -\beta_0 \cdot \gamma = x$

同理 $\alpha_0 \cdot \gamma = y$ □.

(3) 若 $\alpha \times \beta$、$\alpha \cdot \beta$ 均不为0. 则把 β 在 α 上作正交投影, 有 $\beta = k\alpha + \alpha^{\perp}$

No.

Date

则 $(\alpha\times\beta)\times\gamma = (\alpha\times(k\alpha+\alpha^{\perp}))\times\gamma$

$= (\alpha\times\alpha^{\perp})\times\gamma$

由(2)有 上式 $= (\alpha\cdot\gamma)\alpha^{\perp} - (\alpha^{\perp}\cdot\gamma)\alpha$

又 $(\alpha\cdot\gamma)(k\alpha) - (k\alpha\cdot\gamma)\cdot\alpha = 0$.

$\therefore (\alpha\cdot\gamma)\beta - (\beta\cdot\gamma)\alpha = (\alpha\times\beta)\times\gamma$. □.

几个坐标系：

球坐标系：用 (r, θ, ϕ) 来表示点 p 在空间中位置.

其中 r 是原点到 p 的距离. ——— 球面

θ 是 p 的天顶角.(与正z轴间) ——— 圆锥面

ϕ 是 p 在 x-y 平面上投影与正x轴间的方位角. 半平面.

$(r\geq 0;\ 0\leq\theta<\pi;\ 0\leq\phi<2\pi)$

球坐标与直角坐标的坐标转换：

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \theta = \arctan\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z} \text{ 或 } \arccos\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ \phi = \arctan\frac{y}{x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\phi \\ y = r\sin\theta\sin\phi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

圆柱坐标系：极坐标系的延伸，在 ρ, ϕ 的基础上加上高度(即z轴坐标) z. 坐标表示：(ρ, ϕ, z)。

极坐标系的一个重要特点：

平面直角坐标中的任意一点，在极坐标系中都可以有无数种表达形式。

如点 (r, θ) 可以表示为 $(r, \theta\pm n\times 360^\circ)$ 或 $(-r, \theta\pm n\times 360^\circ+180^\circ)$，这里 n 是任意整数。

No.

Date

选择坐标系：

在做具体计算时，我们必须根据问题的特点选择适当的坐标系。

(1) 当加速度为常量时(如重力加速度)，宜选直角坐标系；

(2) 当加速度总指向空间一点时(有心力)，宜选极坐标系。

(3) 当质点轨迹已知时(如限定轨道上的运动)，宜选自然坐标系。即将加速度矢量 a 分解为切向分量 a_t 与法向分量 a_n.

$$\left(a_t = \frac{dv}{dt},\ a_n = \frac{v^2}{R}\right) \leftarrow$$ R可以是所谓的曲率半径ρ. 即 $\rho = \frac{v^2}{a}$

双对数坐标系：

两条正交坐标轴上刻度与原点的距离均与刻度值的对数成正比，这样的坐标系就叫双对数坐标系。

注：双对数坐标系的作用我还不太清楚，但至少有一个优点，就是便于研究两个量间的纯比例关系。譬如设 M, N 间的关系为

$$M = A_0 N^m$$ ，其中 A_0, m 是常数，则有关系

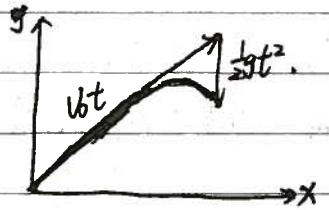
$$\lg M = m \lg N + \lg A_0$$

如果在双对数坐标系下 $M-N$ 的函数图像是直线的话，通过测出直线的斜率 m，即可了解它们的比例关系。

空间矢量在空间直角坐标系下可以被分解为三个双向标量。

抛体运动的一种视角：

$$y = v_0 t + \frac{1}{2} g t^2$$



No.

Date

角位移 $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$

角速度 $\vec{\omega}$: $|\vec{\omega}| = \frac{d\theta}{dt}$ ，方向依右手螺旋法则，旋转方向与手指弯曲方向一致.

角加速度 $\vec{\beta} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$ 线速度 $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{R}$ （$\vec{\theta}, \vec{\omega}, \vec{\beta}$ 的正方向均为右手系中的竖直向 $\vec{k}$）

曲线运动的加速度

切向：$a_\tau = \frac{d|\vec{v}|\vec{\tau}}{dt} = \frac{d|\vec{v}|}{dt}\vec{\tau}$ ，$\vec{\tau}$ 是沿轨道切向，即运动方向的单位矢量

法向：$a_n = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\frac{|\vec{v}_1|}{|\vec{\alpha}|}\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{\Delta t}$ ，令分母记为 $\Delta\vec{v}_2$ 有 $a_n = \frac{d\vec{v}_2}{dt}$

$$d\vec{v}_2 = d(\vec{v}_1 \cdot \alpha) = \vec{v}_1\, d\frac{\vec{v}_1 t}{\rho} = \frac{\vec{v}_1^2}{\rho} dt$$

（α 为 $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ 夹角）→（几何关系）（ρ 为曲率圆半径）

$$\therefore a_n = \frac{d\vec{v}_2}{dt}\ (\text{移项}) = \frac{\vec{v}_1^2}{\rho} = \frac{|\vec{v}_1|^2}{\rho}\vec{n}$$

$$a_n = \frac{|\vec{v}_1|^2}{\rho}\vec{n}$$ （$\vec{n}$ 为法向单位矢量）

$$\therefore a = a_\tau + a_n = \frac{d|\vec{v}|}{dt}\vec{\tau} + \frac{|\vec{v}|^2}{\rho}\vec{n}$$

注：a_τ 与 β（角加速度的关系）

$$a_\tau = \frac{d|\vec{v}|}{dt} = \frac{d|\vec{\omega}|R}{dt} = R\beta$$

a_n 与 ω

$$a_n = \frac{|\vec{v}|^2}{R}\vec{n} = |\vec{\omega}|^2 R \cdot \vec{n}$$

$$\theta = \theta_0 + |\vec{\omega}_0| t + \frac{1}{2}\beta t^2$$

描写圆周运动只需一个角量 $\theta(t)$，就像直线运动只需 $x(t)$ 一样.

对一般曲线运动的讨论，基于在微小机制 (d) 下，对轨迹作圆弧化的处理. 了解了一般圆周运动，就了解了一般曲线运动.

我们用自然坐标系考虑质点在某一位置下的运动情况，但不考虑运动过程中的情况，因为自然坐标系的单位基 $\vec{\tau}, \vec{n}$ 与质点的位置和速度时刻相关，难以建立相对固定的坐标系，这个问题在极坐标系中得到了很好的解答.

相对运动：　绝对运动 = 相对运动 + 牵连运动
（参照系S'相对S的运动）.

神说，我给你一堆新符号，你就不认得力学是啥了，下面就让我们见识一下微积分时代下的力学：

位移：$\Delta x = \int_t^{t+\Delta t} dx$　　路程：$S = \int_t^{t+\Delta t} |dx|$

速度：$v = \frac{dx}{dt} = \dot{x}$　　加速度：$a = \frac{dv}{dt} = \dot{v} = \ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$

v与a的关系：由 $a = \frac{dv}{dt}$ 得　$dv = \cancel{a}\,a(t)dt$，积分有

$$\int_{v_0}^{v(t)} dv = \int_{t_0}^{t} a(t)dt$$　（左边以v为t的函数积分）.

$$\therefore v(t) = v_0 + \int_{t_0}^{t} a(t)dv$$

x与v的关系：由 $v = \frac{dx}{dt}$

$$\therefore x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(t)dt.$$

弹簧振子的简谐振动：

运动方程：$x = A\cos(\omega t + \phi_0)$

速度：$v = \dot{x} = -A\omega\sin(\omega t + \phi_0)$

加速度：$a = \ddot{x} = -A\omega^2\cos(\omega t + \phi_0) = -\omega^2 x.$

质点位矢 $\vec{r}$ 的分解式，$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$

或 $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$　（平面运动分解为两个直线运动 $x(t), y(t)$）

速度（向量式）：$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j}$

速率：$|v| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$

No.

Date

加速度(向量式)：$a = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\vec{i} + \frac{dv_y}{dt}\vec{j}$ (可以认为 V_x, V_y 无方向).

$a = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}$

法向：$|dv_\perp| = |v d\theta| = R\omega d\theta$ $\quad a_\perp = \frac{v^2}{R}$

平行：$dv_\parallel = d|v| = R d\omega$ $\quad a_\parallel = R\frac{d\omega}{dt} = R\beta$.

定义 $d\vec{\theta}$ (矢量化的无限小角位移) 方向为 $\vec{R}$ 与 $\vec{v}$ 右手系中另一个方向，

则 $\vec{\theta} = \theta \cdot \vec{k}$

$\underset{(\text{无穷小位移})}{d\vec{R}} = \underset{(\text{无穷小角位移})}{d\vec{\theta}} \times \underset{(\text{半径})}{\vec{R}}$

速度：$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{R}$

加速度 $\vec{a} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{R} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{R}}{dt}$

$= \beta \times \vec{R} + \vec{\omega} \times \vec{v}$

物体做曲线运动时，它的法向加速度仍然(也必须)与 v 垂直，因为 $a_\perp$ 是专门改变物体运动方向的，故类似天体运行时的"向心加速度"本质上为法向加速度，不一定指向中心。

求一曲线轨道某处的曲率半径时，可用一种已知位移与时间关系的运动(在同一轨迹上)，通过求此运动的 $v(t)$, $a(t)$，可以用 $a_\perp = \frac{v^2}{\rho}$ 得这点曲率半径，再应用于求各种固定轨上有特运动的法向加速度 $a_\perp$.

极坐标系与自然坐标系有很强的相似性，而极坐标系具有独有而不可替代的特性.

极坐标系分解：

应用：圆锥曲线轨迹上的运动及其它有心运动.

方向：$e_r \longrightarrow$ 径向

$e_\theta \longrightarrow$ 角向 (垂直于径向)

其它系中方向：自然坐标系：$\vec{\tau} \rightarrow$ 切向 (另有记 $\parallel$)

$\vec{n} \rightarrow$ 法向 (与切向垂直) (另有记 $\perp$)

直角坐标系：$\begin{cases} \vec{i} \\ \vec{j} \end{cases}$ (不用说了)

No.

Date

极坐标系中位矢 $\vec{r}$ 可表示成 $\vec{r} = r\vec{e}_r$ （$r, \vec{e}_r$ 均可为 t 的函数）.

有 $\boxed{d\vec{e}_r = d\theta \cdot \vec{e}_\theta}$, $\boxed{d\vec{e}_\theta = -d\theta \cdot \vec{e}_r}$ （"d"是差的极限）.

速度：$v = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt} r\vec{e}_r = \frac{dr}{dt}\vec{e}_r + r\frac{d\vec{e}_r}{dt}$.

$= \underset{(径向速度)}{V_r} + \underset{(横向速度)}{V_\theta}$.

注意有 r 这个角速度是横向速度

$\vec{V}_r = \frac{dr}{dt}\vec{e}_r$; $\vec{V}_\theta = r\frac{d\theta}{dt}\vec{e}_\theta$

加速度：$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dr}{dt}\vec{e}_r\right) + \frac{d}{dt}\left(r\frac{d\theta}{dt}\vec{e}_\theta\right)$

$= \left(\frac{d^2r}{dt^2}\vec{e}_r + \frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\vec{e}_\theta\right) + \left(\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\vec{e}_\theta + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\vec{e}_\theta - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\vec{e}_r\right)$

$= \left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]\vec{e}_r + \left(2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\right)\vec{e}_\theta$

其中 $\vec{a}_r = \left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]\vec{e}_r$ 为径向加速度.

$\vec{a}_\theta = \left(2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\right)\vec{e}_\theta$ 为横向加速度

注意：径向加速度 $\vec{a}_r$ 与横向加速度不过是对 $\vec{V}_r$, $\vec{V}_\theta$ 变化率整理而得到的，并不表示它们 $\vec{a}_\theta$ 有什么实际意义.

求轨道在极坐标系下的方程：

1° 若已知 $r = r(t)$, $\theta = \theta(t)$, 可消去 t 得 $r = (\theta)$.

2° 若质点的 V_r, V_θ 随位置 (r, θ) 的变化关系已知，

由 $\frac{dr}{d\theta} = \frac{rV_r}{V_\theta}$, 积分可得方程.

No.

Date

绳子的张力：绳子的张力就是力在绳上的传递过程。把绳子看成微小的"一份"一份"的物质组成的集合。当绳上某处受到外力作用时，由于每一"份"之间的相互作用（引力），从而导致绳上各位点均受到相应的力，完成力的传递。

弹性体的串并联：

串联 —— 各弹性体中弹力 F_i 相同且等于系统弹性力 F，各弹性体形变量 Δl_i 等于系统形变量 Δl.

并联 —— 各弹性体中弹性力 F_i 方向相同，它们的和等于系统弹性力 F，各弹性体形变量绝对值 $|\Delta l_i|$ 相同且等于系统形变量绝对值 $|\Delta l|$.
（如绷拉力的弹簧）

惯性力：惯性力是在非惯性系中引入的一种假想力，常用 $F_{虚}$ 表示。
惯性力的引入是为了在非惯性系中使用牛顿第二定律及其时空展开关系（I-P, W-E, M-L）。不满足牛顿第三定律，没有反作用力.
表观力 $:= F_{真} + F_{虚}$

1° 平移惯性力（CF_i）：参照系 S' 相对 S 平移，有加速度 a_0，在 S' 中的物体 m 受虚拟的平移惯性力，$F_{虚} = -ma_0$.
例：若地球没有自转，则相应的平移惯性力为 $-\frac{GMm}{r^2}$（r 为地日距离）
对地球表面上的物体，其受的 F_i 为一定值. —— 最终，地球上同一地点潮汐涨落两次.

2° 惯性离心力（F_c）：$\vec{F_c} = m\omega^2\vec{r}$

当 S' 相对于 S 既有变速平动，又有匀速转动时，可以合成，在惯性系下解决可能更方便.

3° 科里奥利力（F_{cor}）：$\vec{F_{cor}} = -2m\omega^2\vec{r'} = 2m\vec{v'} \times \vec{\omega}$
$(F' = F + F_c + F_{cor})$ $(ma' = 0 - ma' + 2ma')$

在匀速旋转参照系中，F_c 与 F_{cor} 总是同时存在的，从"F_c 与 F_{cor} 的一般推导"可看出。
（当且仅当物体相对此 S' 系运动时才有 F_{cor}）

功：(力在空间上的累积量) $dW = \vec{F} \cdot d\vec{l}$ (微分式)

$W = \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{l}$ (积分式)

将动能定理推广到S'系

$dW = \vec{F}_{惯} \cdot d\vec{l}$

S系：功的分类：
- 保守性内力 $W_{内保}$
- 非保守性内力 $W_{内非保}$
- 外力 $W_{外}$

1° 依据功的定义，以上公式既适合于① 真实力在惯性系中作功；也适合于② 真实力在非惯性系作功，以及③ 惯性力在非惯性系中形式上的作功。

注：功只是人为定义的一个量，切不可对它抱有任何成见，不可以为在常见的参照系(如地面参照系)中力的作功才是真实的，唯一的。功不是我们以前想象的样子。

2° 不同的参照系间有相对运动，质点在不同参照系中就可有不同的位移，因此同一个力在不同参照系下作的功可以不同。

3° (受牛顿第三定律径向力约束)在任意参考系中，两质点间的一对作用力与反作用力作功之和相同。

应用：可以建立随质点B平动的参考系，以计算W。

万有引力功：$dW = \vec{F}_m \cdot d\vec{r} = G\frac{Mm}{r^3}\vec{r} \cdot d\vec{r} = G\frac{Mm}{r^3} r\, d\vec{r}_{//} = G\frac{Mm}{r^3} r\, dr = \frac{GMm}{r^2} dr$

把 $\vec{r}$, $d\vec{r}$ 均视为一般矢量，作内积，得到 $d\vec{r}_{//}$ 为 $d\vec{r}$ 在 $\vec{r}$ 的分量

$d\vec{r}$ 在 $\vec{r}$ 上的分量就是 $\vec{r}$ 长度的增量 dr.

功率：$P = \frac{dW}{dt} = \frac{\vec{F} d\vec{l}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$

No.

Date

质点动能定理：

$$dW = \vec{F}\cdot d\vec{l} = F_{\parallel}\cdot dl$$ （$F_{\parallel}$为$\vec{F}$沿质点运动方向的分量）

由牛二. $F_{\parallel} = ma_{\parallel} = m\frac{dv}{dt}$ （a沿位移方向的分量$a_{\parallel}$等于速率的变化率）

$\therefore dW = m\frac{dv}{dt}dl = m\frac{dl}{dt}dv = mv\,dv = d(\frac{1}{2}mv^2)$

在S系中定义 $E_k = \frac{1}{2}mv^2$，为质点动能 （为什么 $E_k=\frac{1}{2}mv^2$，就是因为它是推导中产生的一个量，为了以后方便好用，定义它为动能。动能并不真实存在）

则 $dW = dE_k$， $W = \Delta E_k$.

注：1° 推导过程使用微分式，是因为在微分条件下很多过程被简化，方便考虑而不致过于复杂。

2° 说物体具有多少动能，是针对某一参照系而言的，不能脱离参照系谈动能。物体在不同参照系中有不同动能.

3° 非惯性系中引入惯性力作功量，以下等式也成立.

$$dW_{惯} + dW = dE_k$$ （$W_{惯}$，W，E_k均为S'下的值）

原因：功的定义在各参照系中是普适的，而惯性力的引入使牛二在非惯性系下形式上成立，由推导过程即可得出上述结论。

质点系动能定理：

定义质点系中 $E_k = \sum_i E_{ki}$.

则 $W_{内} + W_{外} = \Delta E_k$.

注：1° 以上公式即为一系列质点动能定理的加和.

2° 上式把质点系中的功分为两部分：内力作功与外力作功.

3° 非惯性系中的推广：

$$W_{惯} + W_{内} + W_{外} = \Delta E_k.$$

No.

Date

保守力：

对力的保守性，非保守性的区分在三个方面进行：

1° 惯性系中的力，非惯性系中的非惯性力.

2° 非惯性系中的惯性力形式上的保守性与非保守性.

3° 作用力与反作用力

保守力：惯性系S中，若一个力对质点作的功只与其始末位置有关，而与路径无关，则称其为保守力. 相反可定义非保守力。(在非惯性系中，以及其它推广中均用此定义).

$$\int_{L_1}\vec{F}\cdot d\vec{l} = \int_{L_2}\vec{F}\cdot d\vec{l}$$

判别式：$\oint \vec{F}\cdot d\vec{l}=0$，即保守力 $\Longleftrightarrow$ 沿任一闭合路径作功为0.

举例与延伸：

惯性力：地面系中的重力，一端固定的直弹簧的弹性力，

S'中一端固定的直弹簧的弹性力.（注意端头是在S'中位置固定）

平动匀加速S'中的平移力，匀速转动S'中的惯性离心力。

注：一个真实力在某参照系中是保守力，在其它参照系中既可能是保守力，也可能是非保守力。

例① 重力 在地面系，地面附近相对地面系平动的惯性系与非惯性系中为保守力；在绕着水平固定转轴旋转的非惯性系（注意不是平动！）中是非保守力。

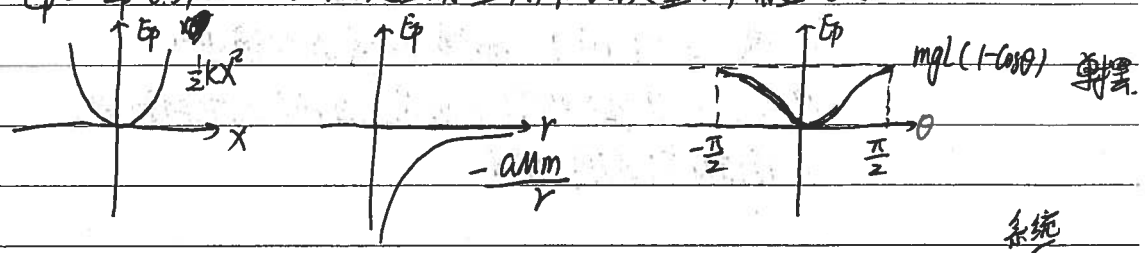
② 在S_1中一端固定的弹簧弹力是保守力，在相对S_1运动的参考系S_2中，弹力是非保守力.

两质点相有一对作用力和反作用力，若在其中一个质点的参考系中，另一个质点所受的力是保守力，那么在此参考系中乃至所有其它参考系中，这对作用力与反作用力作功之和仅与这两质点间的初始相对位置和终止相对位置有关，而与其间路径无关。于是可在所有参考系中称这对力为保守性的作用力与反作用力.

No.

Date

势能函数：　通常情况下，势能 E_p 仅由某个空间参量 ξ 确定，即 E_p 是 ξ 的一元函数，$E_p = E_p(\xi)$。ξ 可以是坐标量 x，径矢模量 r，角量 θ 等。



势能：　任一参考系中，将两质点 P_1, P_2 间一对保守性作用力 F_1 和反作用力 F_2 对应的系统势能 E_p 定义为 P_1, P_2 间相对位置确立的力学量，F_1, F_2 作功之和为 E_p 减少量

机械能定理：　$\because W_{内保} = -\Delta E_p$　（E_p 为质点系的内势能）

$(W_{内保} + W_{内非保}) + W_{外} = \Delta E_k$　（质点系动能定理）

$\therefore W_{内非保} + W_{外} = \Delta(E_k + E_p)$

即质点系所有非保守内力作功与所有外力作功之和等于质点系机械能增量

注：1° 质点系机械能 := 质点系动能 + 质点系内势能

2° 在非惯性系中

$W_{惯非保} + W_{内非保} + W_{外} = \Delta E$，

其中 $\Delta E = E_k + E_p + E_{p惯}$

机械能守恒定律：

质点系在某惯性系中若恒有 $dW_{内非保} = 0$，$dW_{外} = 0$，则机械能 E 为恒量

1° 保守系：每一对内部非保守力作功恒为零的质点系

2° 不受外力的保守系在各惯性系中机械能都守恒。受外力作用的保守系，在某惯性系中若恒有 $dW_{外} = 0$，则机械能守恒

3° 在非惯性系中不考虑机械能守恒问题

No.

Date

解三次方程（求方程 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ 在 $\mathbb{C}$ 上的三个根）

1 卡尔丹诺法

1.1 除以首项系数 a $(a\neq 0)$

$$x^3+b'x^2+c'x+d'=0$$

其中 $b'=\frac{b}{a}$, $c'=\frac{c}{a}$, $d'=\frac{d}{a}$

1.2 代换未知项 $x=z-\frac{b'}{3}$，消去二次项

$$z^3+pz+q=0$$

其中 $p=c'-\frac{b'^2}{3}$, $q=\frac{2b'^3}{27}-\frac{b'c'}{3}+d'$

1.3 令 $z=u+v$，有

$$(u^3+v^3+q)+(u+v)(3uv+p)=0$$

因为多了一个自变量，故可以增加一个限制条件：$3uv+p=0$. 有：

$$u^3+v^3+q=0$$

1.4 令 $U=u^3$, $V=v^3$，有方程组

$$\begin{cases} U+V=-q \\ UV=-\frac{p^3}{27} \end{cases}$$

则 U,V 是方程 $x^2+qx-\frac{p^3}{27}=0$ 的根，不难求解.

1.5 解出 $\mathbb{C}$ 上符合 $uv=-\frac{p}{3}$ 的 u_0, v_0（由 u,v 是 U,V 的立方根）

由 $z=u_0+v_0$, $x=z-\frac{b'}{3}$ 解出一个 x.

因为 $u_0, \omega u_0, \omega^2 u_0$; $v_0, \omega v_0, \omega^2 v_0$ 分别是 U,V 的立方根，满足 $uv=-\frac{p}{3}$ 所有 (u,v) 是

(u_0,v_0), $(\omega u_0, \omega^2 v_0)$, $(\omega^2 u_0, \omega v_0)$

同理得到原三次方程的所有三个复数根.

No.

Date

质心

$$\vec{r}_c := \frac{\sum_i \vec{r}_i \cdot m_i}{M}$$

一般物体(形状不规则,质量不均匀)的质心位置:

$$\vec{r}_c = \frac{\int \vec{r} \cdot \rho(x,y,z)\, d\tau}{\int \rho(x,y,z)\, d\tau}$$

质心速度 $\vec{V}_c = \frac{d\vec{r}_c}{dt} = \frac{\sum m_i \vec{V}_i}{M}$ (总动量/总质量)

(质心的提出,是由质点系总动量为0的点提出的) → 质心动量 $\boxed{\vec{P}_c = M\vec{V}_c = \vec{P}}$ (质心定义的核心)

质心运动定理 $\vec{F}_{合外} = \frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d\vec{P}_c}{dt} = M\frac{d\vec{V}_c}{dt} = M\vec{a}_c$,即质心加速度由合外力决定与内力无关.

质心动能方程 $dW_{合外} = dE_{k_c}$ (合外力作功等于质心动能变化率)

$\left(E_{k_c} = \frac{|\vec{P}_c|^2}{2M} = \frac{|\vec{P}|^2}{2M} = E_k\right)$

S与S'系间的转换(克尼希定理、资用能)

$E_k = E_k^{CM} + \frac{1}{2}MV_c^2$,即质点系的总动能等于它们相对于质心系的动能 E_k^{CM},加上整体随质心平动的动能 $E_c = \frac{1}{2}MV_c^2$ (V_c为质心在所选参照系中速度). 在无外力作用下,

资用能:上式中的 E_k^{CM}. 质点系在某参考系中可以利用(转化)的能量即为资用能. □.

$E_k = \frac{1}{2}\sum_i m_i \vec{V}_i^2 = \frac{1}{2}\sum_i m_i (\vec{V}_i' + \vec{V})^2 = E_k' + \frac{1}{2}M\vec{V}^2 + \sum_i m_i \vec{V}_i' \cdot \vec{V}$

$\because \sum_i m_i \vec{V}_i' = 0$. $\therefore E_k = E_k' + \frac{1}{2}M\vec{V}^2 = E_k^{CM} + \frac{1}{2}M\vec{V}_c^2$

碰撞

完全弹性碰撞
$$\begin{cases} V_1 = \dfrac{(m_1-m_2)V_{10} + 2m_2V_{20}}{m_1+m_2} \\ V_2 = \dfrac{(m_2-m_1)V_{20} + 2m_1V_{10}}{m_1+m_2} \end{cases}$$
(1,2互反)

其中 $V_1 = \frac{(m_1V_{10}+m_2V_{20}) + m_2(V_{20}-V_{10})}{m_1+m_2} = \frac{P_{总} + P_{21}}{m_1+m_2}$

非弹性碰撞:

恢复系数 $e = \frac{V_2 - V_1}{V_{10} - V_{20}}$ ($0 < e < 1$)

(V_1, V_2 大小前后相反)

No.

Date

$$\begin{cases} V_1 = V_{10} - (1+e)\dfrac{m_2(V_{10}-V_{20})}{m_1+m_2} \\ V_2 = V_{20} - (1+e)\dfrac{m_1(V_{20}-V_{10})}{m_1+m_2} \end{cases}$$ (用定义推导)

$$V_1 - V_2 = -e(V_{10}-V_{20}).$$

角动量

面积速度：$K = \frac{1}{2}|\vec{r}\times\vec{v}|$

角动量(动量矩)：$\vec{L} = \vec{r}\times\vec{p}$　　$K = \frac{|\vec{L}|}{2m} = \frac{L}{2m}$　(L为$|\vec{L}|$)

力矩：$\vec{M} = \vec{r}\times\vec{F}$　　$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$

质点角动量定理：

若$\vec{M}\equiv 0$，则$\vec{L}$守恒；

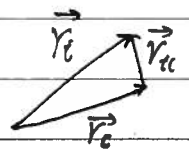
若$\vec{M}_x\equiv 0$，则$\vec{L}_x$守恒。

注：仅受有心力作用的质点，以力心为参考点，它的角动量必为守恒量。

注：角动量$\vec{L}$等物理量中含有$\vec{r}$，即与大小参考点的位置相关。

系统内力力矩不改变系统角动量。

质心系角动量定理：($\infty = 1+\infty'$)



$\because \vec{r_i} = \vec{r_c} + \vec{r_{ic}}$，$\vec{v_i} = \vec{v_c} + \vec{v_{ic}}$

又 $\sum m_i\vec{r_{ic}} = 0$　　$\sum m_i\vec{v_{ic}} = 0$

$$\begin{aligned} \therefore \vec{L} &= \sum \vec{r_i}\times m_i\vec{v_i} \\ &= \vec{r_c}\times\sum m_i(\vec{v_c}+\vec{v_{ic}}) + \sum\vec{r_{ic}}\times m_i(\vec{v_c}+\vec{v_{ic}}) \\ &= \vec{r_c}\times\sum m_i\vec{v_c} + \sum\vec{r_{ic}}\times m_i v + \sum\vec{r_{ic}}\times m_i\vec{v_{ic}} \\ &= \vec{L_c} + \vec{L_{rc}} \end{aligned}$$

其中$\vec{L_c}$为质心角动量，$\vec{L_{rc}}$为质点系相对于质心的角动量.

No

Date

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d(\vec{L_c}+\vec{L_{rc}})}{dt} = \sum(\vec{r_c}+\vec{r_{ic}})\times\vec{F_{i外}} \quad (\vec{F_{i外}}\text{为每小份物体受的合外力})$$

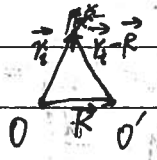
$$= \vec{r_c}\times\vec{F_{合外}} + \sum\vec{r_{ic}}\times\vec{F_{i外}}$$

($\vec{F_{合外}}$为所有小份物体受合外力的合力)

合力为0的外力矩：

当质点系受外力$\vec{F_i}$之和为0时，外力$\vec{F_i}$相对任一参考点力矩之和相同.

proof：



两个参考点O, O'，如图. 则质点系相对O'的外力矩为

$$M'_{外} = \sum_i(\vec{r_i}-\vec{R})\times\vec{F_i}$$

$$= \sum_i\vec{r_i}\times\vec{F_i} - \vec{R}\times\sum_i\vec{F_i}$$

由$\sum_i\vec{F_i}=0$，有$M'_{外} = \sum_i\vec{r_i}\times\vec{F_i} = M_{外}$. □.

特例：力偶相对任一参考点力矩相同.

对称球外引力相对球心力矩之和为0；（无论施力物体是否为质点）.

对称球外引力相对任一参考点Q的力矩之和，等于球体质量集中于球心所受外引力相对Q点的力矩。

No.

Date

开普勒运动

1. 隆格-楞次矢量 (Runge-Lenz vector)

1.1. $\vec{B} := \vec{v}\times\vec{L} - GMm\hat{r} = 常量.$

推导: $\frac{d}{dt}(\vec{v}\times\vec{L}) = \frac{d\vec{v}}{dt}\times\vec{L}$ (开普勒运动,仅受有心力作用,角动量不变).

$$= m\frac{d\vec{v}}{dt}\times(\vec{r}\times\vec{v})$$

$$= -\frac{GMm}{r^3}\vec{r}\times(\vec{r}\times\vec{v})$$

$$= -\frac{GMm}{r^3}[\vec{r}(\vec{r}\cdot\vec{v})-\vec{v}(\vec{r}\cdot\vec{r})]$$

$$= -\frac{GMm}{r^3}[\vec{r}\,r\cdot v_r-\vec{v}r^2]$$

$$= -GMm\left[\frac{\vec{r}}{r^2}\frac{dr}{dt}-\frac{1}{r}\frac{d\vec{r}}{dt}\right]$$ ($\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}$, 位矢的变化率)

$$= GMm\left[\vec{r}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{1}{r}\frac{d\vec{r}}{dt}\right]$$

$$= GMm\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right)$$

$\therefore \frac{d}{dt}(\vec{v}\times\vec{L}-GMm\hat{r})=0$, 即 $\vec{v}\times\vec{L}-GMm\hat{r}=常量$ □.

1.2. 由 $\vec{B}$ 得到开普勒运动轨道.

$$\vec{r}\cdot\vec{B} = \vec{r}\cdot(\vec{v}\times\vec{L}) - GMmr$$

$$= \vec{L}\cdot(\vec{r}\times\vec{v}) - GMmr$$

$$= \frac{L^2}{m} - GMmr$$ (L变为标量)

令 $\vec{r}\cdot\vec{B} = rB\cos\theta$, 由上式得

$$r = \frac{p}{1+\varepsilon\cos\theta}, 其中\ p=\frac{L^2}{GMm^2},\quad \varepsilon=\frac{B}{GMm}$$

$\varepsilon=0$, 圆; $0<\varepsilon<1$, 椭圆; $\varepsilon=1$, 抛物线; $\varepsilon>1$, 双曲线

1.3 $\vec{B}$ 的几何意义.

$\vec{B}$ 的方向沿通过偏点的对称轴,指向离力心较近的拱点,

$\vec{B}$ 的大小正比于轨道离心率。(特别的,对圆轨道,$\vec{B}=0$).

2. 有效势能曲线

2.1 总能量 $E = \frac{m}{2}(v_r^2+v_\theta^2)+U(r)$

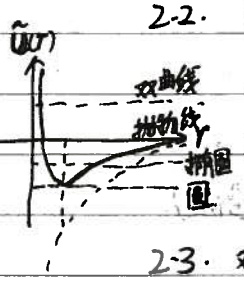
$$= \frac{m}{2}v_r^2+\frac{L^2}{2mr^2}+U(r)$$

$$= \frac{mv_r^2}{2}+\tilde{U}(r) = 常量$$

其中 $U(r) = -\frac{GMm}{r}$, 为引力势能; $\tilde{U}(r) := U(r)+\frac{L^2}{2mr^2}$, 称为有效势能。其中 $\frac{L^2}{2mr^2}$ 称为"离心势能"。

No.

Date



2.2. 拱点：代表总能量为E的水平线与有效势能曲线的交点，叫做拱点。

在拱点处 r取极值，那里径向速度 $v_r=0$，只有角向速度 $r\dot{\theta}$.

$E>0$，双曲线；$E=0$，抛物线；$E<0$ 有两个拱点时，椭圆；$E<0$ 有一个拱点时，圆.

2.3. 对椭圆(及圆)的讨论.

拱点处 $E=\tilde{U}(r)=-\frac{GMm}{r}+\frac{L^2}{2mr^2}$

得 $r^2+\frac{GMm}{E}r-\frac{L^2}{2mE}=0$

根为 $r_\pm=\frac{1}{2}\left[-\frac{GMm}{E}\pm\sqrt{\frac{G^2M^2m^2}{E^2}+\frac{2L^2}{mE}}\right]$

对椭圆 $r_+=a+c$，$r_-=a-c$

$\therefore \begin{cases} a=-\frac{GMm}{2E} \\ c=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{G^2M^2m^2}{E^2}-\frac{2L^2}{mE}} \end{cases}$

得偏心率 $\varepsilon=\frac{c}{a}=\sqrt{1-\frac{2|E|L^2}{G^2M^2m^3}}$

结论：椭圆半长轴 a 只与能量有关，与角动量L无关.

L的大小只影响椭圆的离心率.

对圆轨道，动能 $E_k=\frac{mv_0^2}{2}=E-U(r)=-\frac{GMm}{2r}+\frac{GMm}{r}=\frac{|U(r)|}{2}$ (可由牛II导出)

1. a反比于总能量|E|

2. 圆轨道 $\varepsilon=0 \Rightarrow \frac{2|E|L^2}{G^2M^2m^3}=1$，$B=0$

$a=r \Rightarrow E=-\frac{GMm}{r}$

No.

Date

刚体的定轴转动

1. 转动惯量 I

1.1 刚体定轴转动时的动能为

$$E_k = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i (\omega R_i)^2 = \frac{1}{2} I \omega^2,$$

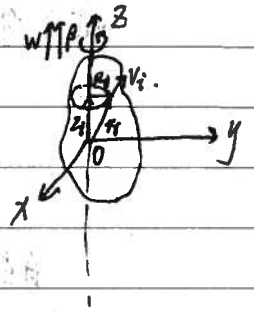
其中 $I = \sum_i m_i R_i^2$，是由刚体物质分布和转轴位置确定的动力学量，称为转动惯量.

1.2 刚体定轴转动时角动量为

$$\vec{L} = \sum_i \vec{r_i} \times (m_i \vec{v_i}) = \sum_i \vec{R_i} \times (m_i \vec{v_i}) + \sum_i \vec{z_i} \times (m_i \vec{v_i}) = \vec{L_z} + \vec{L_{xy}}$$

我们关心的是 $\vec{L_z} = \sum_i R_i m_i \omega R_i$.

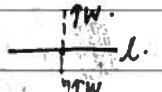
即 $L_z = I\omega$.



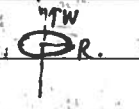
1.3 $I = \sum_i m_i R_i^2$，$E_k = \frac{1}{2} I \omega^2$，$L_z = I\omega$

2. 常见物体的转动惯量

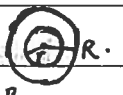
匀质细杆 $I_c = \frac{1}{12} m l^2$



圆环(非匀质) $I_O = mR^2$

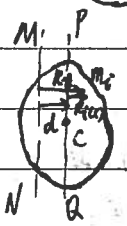


匀质圆盘 $I_O = \int_0^R \left(\frac{d(\pi r^2)}{\pi R^2} m\right) r^2 = \frac{1}{2} m R^2$



2.1. 平行轴定理

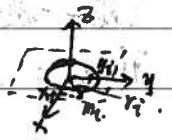
$$\begin{aligned} I_{MN} &= \sum_i m_i \vec{R_i} \cdot \vec{R_i} \\ &= \sum_i m_i R_i^2(C) + 2\sum_i m_i \vec{R_i}(C) \cdot \vec{d} + \sum_i m_i d^2 \\ &= I_c + 2m \cdot \vec{R_c}(C) + md^2 \\ &= I_c + md^2 \end{aligned}$$



即刚体对轴MN的转动惯量等于刚体对过质心的平行轴的I加上质心对MN轴的转动惯量之和.

2.2. 垂直轴定理(平板刚体).

从平板刚体某一点为坐标原点建立oxyz坐标系.



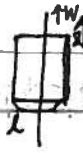
则 $I_x + I_y = \sum_i m_i y_i^2 + \sum_i m_i x_i^2$

$= \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2)$

$= \sum_i m_i r_i^2 = I_z$

即 $I_x + I_y = I_z$

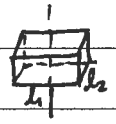
2.3 刚体沿转轴进行延展，转动惯量I的形式不变.



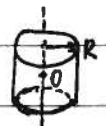
匀质平板：$I_c = \frac{1}{12} m l^2$ (源自匀质细杆)

No.

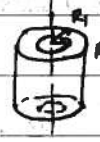
Date



匀质长方体：$I_0 = \frac{1}{12}m(l_1^2+l_2^2)$（源自匀质平板）.

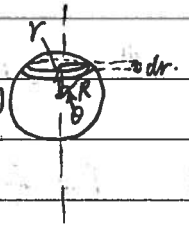


薄圆筒：$I_0 = mR^2$（源自圆环）



匀质圆筒：$I_0 = \frac{1}{2}m(R_1^2+R_2^2)$（源自同心圆片）

附：匀质薄球壳：环状部分面积 $S = 2\pi\sqrt{R^2-r^2}\cdot\frac{dr}{\sin\theta}$（作圆的垂直面面积）



面密度 $\sigma = \frac{m}{4\pi R^2}$

$$I_0 = \int_{-R}^{R}(S\sigma)\sqrt{R^2-r^2}$$
$$= \frac{2}{3}mR^2.$$

有厚度的匀质球壳：

$$I_0 = \int_{R_2}^{R_1}\frac{2}{3}\left(\frac{d(\frac{4}{3}\pi r^3)}{\frac{4}{3}\pi(R_1^3-R_2^3)}m\right)r^2$$
$$= \frac{2}{5}m\frac{R_1^5-R_2^5}{R_1^3-R_2^3}$$

特别的匀质球体的 $I_0 = \frac{2}{5}mR^2$

3. 动力学规律

质心运动定理：$\vec{F}_{合外} = m\vec{a}_c$.

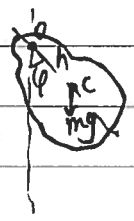
动能定理：$E_k = \frac{1}{2}I\omega^2$；$W_{外} = \Delta E_k$.

转动定理：$\vec{M}_{外z} = \frac{d\vec{L}_z}{dt} = \frac{d I\vec{\omega}}{dt} = I\vec{\beta}$.

冲量矩：力矩在一段时间内对角动量的作用量.（$\vec{r}\times(\vec{F}dt) = \vec{r}\times\vec{I} = \vec{r}\times d\vec{p}$）

$$\vec{M}dt = d\vec{L} \qquad \int_{t_0}^{t}\vec{M}dt = \Delta\vec{L}$$

4. 复摆：形状、质量不均匀的绕某一固定点小角度摆动的物体称为复摆.（与单摆相对）



由转动定理 $\vec{h}\times m\vec{g} = (I_c+mh^2)\vec{\beta}$

$$\therefore -mgh\cdot\sin\varphi = (I_c+mh^2)\beta$$
$$\therefore \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{mh}{I_c+mh^2}g\varphi = 0.$$

∵对形如 $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$ 的方程

x解出来是随t周期性往复变化的函数，故可得出复摆的运动方程.

复摆的等效摆长：对单摆：$\frac{d^2\varphi}{dt^2}+\frac{g}{l}\varphi=0$.

∴复摆可看作是等效摆长为 $l=\frac{I_c+mh^2}{mh}$ 的单摆. $(l=h+\frac{I_c}{mh})$.

"可倒逆性"：令 $l(h)=l(h')$ 得，

$h'=h$ 或 $\frac{I_c}{mh}$. (这里恰好有 $h+\frac{I_c}{mh}=l$).

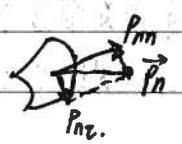
流体静力学

1.1 质量力：作用在每个流体微团上的力. 如重力、惯性力.

1.2 面力：任取一界面 ΔS，与之接触的流体或固体对它的作用力.

应力 $\vec{p}_n$：单位面积上所受的面力.

$\vec{p}_n=\lim_{\Delta S\to 0}\frac{\Delta\vec{P}}{\Delta S}=\frac{d\vec{P}}{dS}$



正应力 p_{nn}：如压强

切应力 $p_{n\tau}$：如接触流体间的摩擦力.

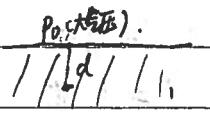
2. 静止流体的应力及其特性.

2.1. 静止流体不受切向力.

2.2. 压强 p 与小面元的法向（取向）$\vec{n}$ 无关.（运动流体也满足此条）.

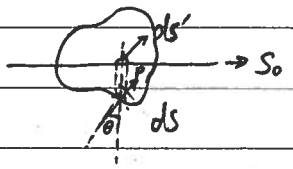
2.3 等深位置的压力相等

$p=p_0+\rho g d$.



2.4 阿基米德原理证明.

平行于水平面的力相互抵消，在 ds 上垂直于水平面的力 $df=\vec{p}\,ds\cdot\cos\theta$



$\vec{p}=\vec{p}_0+\rho g d$

∴ $df=\vec{p}_0 ds\cdot\cos\theta+\rho dv\cdot g=\vec{p}_0 ds'+g\cdot dm$

∴ 水下 $f=\int df=p_0\cdot S_0+G_{排}$ （$G_{排}$ 为排开液体之重量）.

水上 $f'=p_0 S_0$.

由 $f'+G=f$. 故 $G=G_{排}$. □.

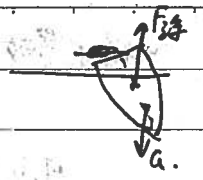
2.5. 浮体姿态的稳定性分析.

浮心：浮力"作用"在被排开的同体积液块的质心上（等同于几何中心，因内质量分布均匀），称为浮心。

No.

Date

当浮心高于重心时，浮体平衡.

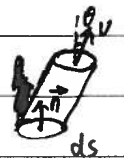


连续性原理、伯努利方程

1. 流量　在流体内任取面元 dS，法线 $\vec{n}$.

1.1. 体积流量

$$dQ_T = \frac{V\cos\theta \cdot dt \cdot ds}{dt} = V\cos\theta\, ds.$$

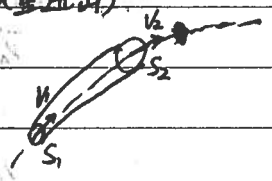


2. 连续性原理.

在流动区域内任取一细小流管，两横截面 S_1, S_2.

流体作定常流动，细流管所含质量守恒（无质量进出）

则 $\rho_1 V_1 S_1 = \rho_2 V_2 S_2$.



3. 伯努利方程.

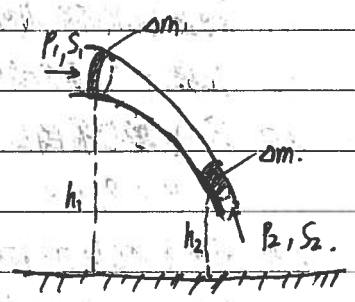
3.1. 适用对象：常T, P下，液体或低速流动的气体的定常流动.

3.2. 任取一段细流管"所包含的流体"系统，则

(1) S_1, S_2 移动距离.

$$\Delta l_1 = V_1 \Delta t$$

$$\Delta l_2 = V_2 \Delta t$$



(2)

(3) 机械能的增量

$$\Delta E_k = \frac{1}{2}(V_2^2 - V_1^2)\Delta m.$$

$$\Delta E_p = g(h_2 - h_1)\Delta m.$$

(4) 外力作功

$$\Delta A_1 = P_1 S_1 \cdot \Delta l_1$$

$$\Delta A_2 = -P_2 S_2 \Delta l_2.$$

(5) 若能忽略相邻流层相对运动产生的能量损耗（如粘性耗散），则

$$\Delta A_1 + \Delta A_2 = \Delta E_k + \Delta E_p.$$

No.

Date

(6) 全流管横截面收缩于0，则.

$$\frac{p_1}{\rho_1}+\frac{1}{2}v_1^2+gh_1=\frac{p_2}{\rho_2}+\frac{1}{2}v_2^2+gh_2. \quad (*)$$

(*)式称为伯努利方程，即

$$\frac{p_1}{\rho_1}+\frac{1}{2}v_1^2+gh_1=\text{常量}.$$

3.3. 特殊情形.

3.3.1. $v_1=v_2$ 时.

$$p_2=p_1+\rho g(h_1-h_2)$$ 重力势能减少不产生动能.

No.

Date

振动

1. 定义：某物理量的周期性变化，

2. 振动的分类标准.

2.1. 振动规律

简谐振动，非简谐振动.

2.2. 系统结构

线性振动，非线性振动.

3. 简谐振动

能用时间的余弦函数表述的振动。

3.1. 简谐振动的基本特征. $\ddot{x}+\omega^2 x=0$.

(本征) 固有频率： $f=\frac{1}{T}$.

角频率： $\omega=2\pi f$.

振动方程： $x=A\cos(\omega t+\phi)$

A — 振幅， ϕ 初相位.

初相位与振幅由运动的 x_0, v_0 (初位置，初速度) 确定.

$$A^2=x_0^2+\frac{v_0^2}{\omega^2} \quad \text{(能量守恒)}$$

$$\tan\phi=-\frac{v_0}{x_0\omega}$$

3.2. 简谐振动的运动特性.

3.2.1. 几何表示法

振动曲线 ($x\sim t$)； 旋转矢量法。(逆时针旋转).

3.2.2. 简谐振动能量变化的特点.

$$\left.\begin{aligned} E_k &= \frac{1}{2}m\dot{x}^2=\frac{1}{2}m\omega^2A^2\sin^2(\omega t+\varphi) \\ E_p &= \frac{1}{2}kx^2=\frac{1}{2}m\omega^2A^2\cos^2(\omega t+\varphi) \end{aligned}\right\}$$ 简谐振动. (同周期，反相位) (角频率翻倍)

$$E=E_k+E_p=\frac{1}{2}m\omega^2A^2=\frac{1}{2}kA^2.$$

一个周期内 E_k, E_p 的平均量 (对 t).

$$\overline{E_k}=\frac{1}{T}\int_0^T E_k\,dt=\frac{E}{2}$$

$$\overline{E_p}=\frac{E}{2}.$$

3.3. 振动合成.

3.3.1. 同方向，同频率.

$x_1 = A_1\cos(\omega t+\phi_1)$, $x_2 = A_2\cos(\omega t+\phi_2)$

$x = x_1+x_2 = (A_1\cos\phi_1 + A_2\cos\phi_2)\cos\omega t - (A_1\sin\phi_1 + A_2\sin\phi_2)\sin\omega t$.

$\therefore x = A\cos(\omega t+\phi)$.

$$A = \sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\phi_1-\phi_2)}$$

$$\tan\phi = \frac{A_1\sin\phi_1 + A_2\sin\phi_2}{A_1\cos\phi_1 + A_2\cos\phi_2}.$$

3.3.2. 同方向，不同频率.

$x_1 = A\cos(\omega_1 t+\phi)$, $x_2 = A\cos(\omega_2 t+\phi)$

$$x = x_1+x_2 = \left(2A\cos\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t\right)\right)\cos\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t+\phi\right).$$

可以看成：振幅变化，为 $2A\cos(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t)$ 的振动

合振动强弱随时间作周期变化的现象为拍，强弱程度变化频率为拍频.

$$f_{拍} = \frac{|\omega_1-\omega_2|}{2\pi}.$$

3.3.3. 方向相互垂直，同频率.

$x = A_x\cos(\omega t+\phi_x)$, $y = A_y\cos(\omega t+\phi_y)$

消去 t 得，轨迹方程为

$$\frac{x^2}{A_x^2} + \frac{y^2}{A_y^2} - 2\frac{xy}{A_xA_y}\cos(\phi_x-\phi_y) = \sin^2(\phi_x-\phi_y)$$

当 $\phi_x-\phi_y = k\pi$ 时，是一直线.

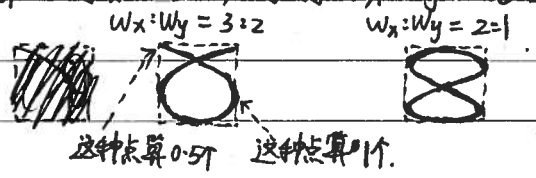
当 $\phi_x-\phi_y \neq k\pi$ 时，为正椭圆或斜椭圆，称为椭圆振动.

3.3.4. 方向相互垂直，不同频率.

$x = A_x\cos(\omega_x t+\phi_x)$, $y = A_y\cos(\omega_y t+\phi_y)$

当 $\omega_x : \omega_y$ 为有理数（即整数比）时，轨道是有限的曲线段或闭合的曲线，曲线图称为李萨如图形。

根据李萨如图形判别 $\omega_x:\omega_y$ 的比值：



图形必然在一个 $2A_x \times 2A_y$ 的矩形内，而通过求图形与两相邻边的"切点"数目比，可以求 $\omega_x:\omega_y$. 计数时应把图形投影到 x（或y）方向上，来计算同一时间内点在 x（或y）方向上运动的趟数.

当 $\omega_x:\omega_y$ 为无理数时，图形不重复，无固定轨道.

No.

Date

振动的动力学性质

1. 保守系统：

2. 一维振动的产生：

2-1. 对 $F=k_n x^n$ （k_n为常数，n为正整数，x为振动偏离量）.

n为偶数，偏离力无法形成振动.

n为奇数，$F=k_1 x$ $\begin{cases} k_1<0 & \text{线性恢复力} \\ k_1>0 & \text{线性偏离力} \end{cases}$

$F=k_3 x^3$ $\begin{cases} k_3<0 & \text{非线性} \sim \\ k_3>0 & \sim \end{cases}$

2-2 一般来讲，恢复性保守力F，对其进行Taylor展开分析$x=0$附近的振动.

$$F(x)=k_1 x+k_2 x^2+k_3 x^3+\cdots \quad (F(0)=0).$$

3. 一维振动的势能 $E_p(x)$ $\quad (dE_p=-\vec{F}\cdot d\vec{x}\ ;\ E_p=E_p(0)-\int_0^x F(x)dx)$

E_p在$x=0$附近Taylor展开.

$$E_p=E_p(0)+\frac{d^2E_p}{dx^2}\Big|_0\cdot\frac{x^2}{2!}+\frac{d^3E_p}{dx^3}\Big|_0\cdot\frac{x^3}{3!}+\cdots$$

保守系统能量守恒 $\frac{1}{2}mv^2+E_p(x)=E_0$，对$t$求导.

$$mv\frac{dv}{dt}+\frac{d^2E_p}{dx^2}\Big|_0 x\cdot v+\frac{d^3E_p}{dx^3}\Big|_0\cdot\frac{x^2}{2!}v+\cdots=0$$

$$\therefore\quad \ddot{x}+\omega^2 x=0$$

No.

Date

复习笔记

2. 刚体

2.1. 质心

质心位矢：$\vec{r}_c = \dfrac{\iiint_\Omega \vec{r}\,dm}{m}$ （质心满足组合原理） (2.1)

质心速度：$\vec{v}_c = \dfrac{d\vec{r}_c}{dt} = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\iiint_\Omega \vec{r}\,dm}{m}\right) = \dfrac{\iiint_\Omega \vec{v}\,dm}{m}$ (2.2).

由(2.2)式得 $\vec{P}_c = \vec{P}$

$\therefore \quad \vec{F}_{合外} = \dfrac{d\vec{P}}{dt} = \dfrac{d\vec{P}_c}{dt} = m\vec{a}_c$

质心运动定理：$\vec{F}_{合外} = m\vec{a}_c$ （质心加速度由合外力决定，与内力无关）. (2.3).

每个子都有其片面性，每个力的效果都会综合的影响物体的动力学量.

质点系动力学量的分解 $(\vec{P}, E_k, \vec{L}) \longrightarrow (\vec{F}dt, \vec{F}\cdot d\vec{r}, \vec{r}\times\vec{p})$

$\vec{P} = \vec{P}_c$ (2.4)

$E_k = E_{kc} + E_k'$, $E_{kc} = \frac{1}{2}m\vec{v}_c^2$, $E_k' = \iiint_\Omega \frac{1}{2}v'^2 dm$ (2.5)

$\vec{L} = \vec{L}_c + \vec{L}_0'$, $\vec{L}_c = \vec{r}_c \times m\vec{v}_c$, $\vec{L}_0' = \iiint_\Omega \vec{r}_0' \times \vec{v}' dm$ (2.6).

（E_k' 为资用能）

质心系下的动力学关系（设定惯性力 $\vec{F}_{惯} = m_i(-\vec{a}_c)$）

动能定理：$W_{内} + W_{外} = \Delta E_k$ (2.7)

角动量定理：$\vec{M}_{惯} + \vec{M}_{外} = \dfrac{d\vec{L}}{dt}$, $\vec{M}_{惯} = \vec{r}_c \times m(-\vec{a}_c)$

当质心C在原点时，$\vec{M}_{外} = \dfrac{d\vec{L}}{dt}$ (2.8).

2.2. 刚体定轴转动

转动惯量 $I = \int_C R^2 dm$ （球壳 $I_0 = \frac{2}{5}m\dfrac{R_1^5 - R_2^5}{R_1^3 - R_2^3}$） (2.9)

转动动能 $E_k = \frac{1}{2}I\omega^2$ (2.10)

角动量 $\vec{L}_z = I\vec{\omega}$ (2.11).

平行轴定理 $I = I_c + md^2$ (2.12)

(平板类)垂直轴定理 $I_z = I_x + I_y$ (2.13)

No.

Date

质心运动定理 $\vec{F}_{外} = m\vec{a}_c$ (2-14)

动能定理 $W_{外} = \Delta E_k$, $E_k = \frac{1}{2}I\omega^2$ (2-15)

转动定理 $\vec{M} = I\vec{\beta}$ (2-16)

2-3 刚体平面平行运动.

瞬心. $\vec{R}_{MA} = \frac{\vec{\omega}\times\vec{v}_A}{\omega^2}$

惯性系 $\begin{cases} 运动定理 & \vec{F}_{外} = m\vec{a}_c \\ 动能定理 & W_{外} = \Delta E_k, \quad E_k = \frac{1}{2}mv_c^2 + \frac{1}{2}I_c\omega^2 \end{cases}$

质心系 $\begin{cases} 转动定理 & M_{外} = I_c\beta \\ 动能定理 & W_{外} = \Delta E_k, \quad E_k = \frac{1}{2}I_c\omega^2 \end{cases}$

质心系定轴转动定理（质心系角动量定理 + 转动定理）

转动定理有两个，解决问题时要看需要哪一个转动定理；有时要推导某些量间的关系，甚至要两个转动定理都用.

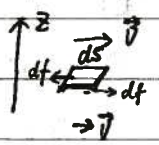
3. 流体

3-1. 无粘性定常流动的伯努利方程.（稳定流动）

$$P + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g h = 常量. \quad (3\text{-}1)$$

（连续性定理 $\iint_{D_1} \vec{v}\cdot d\vec{S} = \iint_{D_2} \vec{v}\cdot d\vec{S}$）

3-2. 粘滞定律.



速度梯度: $\frac{dv}{dz}$

粘度—η，面元面积—ds

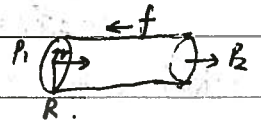
粘力 $df = \eta\frac{dv}{dz}ds$ (3-2)

（其中粘度 η 单位为 kg/(m·s)，或 Pa·s）

3-3 泊肃叶公式

水平管道中粘性流体的定常流动，我们欲求其（通过整截面的）流量，已经管半径 R，取一长为 L 的一段，两端压力分别为 P_1, P_2，流体粘度为 η.

由合外力为0（定常流动），有



$$(P_1 - P_2)\pi r^2 = -\eta\frac{dv}{dr}\cdot 2\pi r L$$

积分可得 $v(r) = \frac{P_1 - P_2}{4\eta L}(R^2 - r^2)$

∴ 流量 $Q = \int_0^R v\,ds = \frac{P_1 - P_2}{8\eta L}\pi R^4$ (3-3)

（ds：微圆环面积）

3.4 粘性流体中运动物体的受力.

粘性阻力 $f_v = 4\pi r\eta v$ (半径为r, 平动速度为v的球体)

($f \propto S = 4\pi r^2$, $f \propto \eta \frac{v}{r}$ ($\eta \frac{v}{r}$), 相乘即得)

纵向压差阻力.

$$f_p = 2\pi r\eta v$$

斯托克斯公式 (球体) $f = f_v + f_p = 6\pi r\eta v$ (3.4).

4. 振动

4.1 简谐振动

动力学方程 $\ddot{x} + w^2 x = 0$ (4.1)

角频率 w, 频率 $f = \frac{w}{2\pi}$ ($w \propto f$) (对弹簧 $w = \sqrt{\frac{k}{m}}$, 单摆 $w = \sqrt{\frac{g}{l}}$)

振动方程: $x = A\cos(wt + \phi)$ (4.2)

$A^2 = x_0^2 + \frac{v_0^2}{w^2}$, $tg\phi = -\frac{v_0}{x_0 w}$

能量关系 $E = E_k + E_p$, $E \propto A^2$

$\overline{E_k} = \overline{E_p} = \frac{1}{2}E$

4.2 同方向振动合成.

同频率: $x_1 = A_1\cos(wt + \phi_1)$, $x_2 = A_2\cos(wt + \phi_2)$

$x = x_1 + x_2 = A\cos(wt + \phi)$, (4.3)

$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\phi_1 - \phi_2)}$, $\tan\phi = \frac{A_1\sin\phi_1 + A_2\sin\phi_2}{A_1\cos\phi_1 + A_2\cos\phi_2}$

不同频率: $x_1 = A\cos(w_1 t + \phi)$, $x_2 = A\cos(w_2 t + \phi)$

$x = x_1 + x_2 = 2A\cos(\frac{w_1 - w_2}{2}t)\cos(\frac{w_1 + w_2}{2}t + \phi)$ (4.4)

w_1, w_2 相接近时, 出现拍现象, 拍频 $f = |f_1 - f_2|$

No.

Date

5. 波动

5-1. 平面简谐波的数学表述（沿X轴正向传播的波）

$$\xi(x,t) = A\cos[\omega(t-\frac{x}{u})+\phi] \qquad (5\cdot1)$$

波速—u，波长—$\lambda = \frac{2\pi u}{\omega}$

注：若为左行波，则相应换为 $t+\frac{x}{u}$。

波数—$k = \frac{2\pi}{\lambda}$（"空间角频率"）（2π长度内的波数）

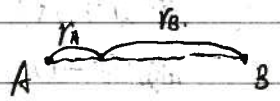
$$\xi(x,t) = A\cos(\omega t - kx + \phi) \qquad (5\cdot2)$$

$$\xi(\vec{r},t) = A\cos(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} + \phi) \qquad (5\cdot3)$$

其中 $\vec{k}$ 为矢量化的波数：$\vec{k} = k\vec{i}$

5-2. 干涉

干涉振幅变化的空间周期为 $\frac{\lambda}{2}$，这是显然的。



半波损失：波从波疏介质传到波密介质时反射波有半个波长的损失，即反射波相位反相。

5-3. 反射（驻波）

振幅相同的相干平面波，分别沿X轴正、负方向传播。

$\xi_1 = A\cos(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}x + \phi_1)$；$\xi_2 = A\cos(\omega t + \frac{2\pi}{\lambda}x + \phi_2)$

合振动 $\xi = 2A\cos(\frac{2\pi}{\lambda}x + \frac{\phi_2-\phi_1}{2})\cos(\omega t + \frac{\phi_1+\phi_2}{2})$

为驻波，振幅随空间周期性变化，周期 $\frac{\lambda}{2}$。

5-4. 多普勒

(1) 以向右为正方向，波源与接收器的速度分别为 V_A，V_B。波速为 u。

则接收器接收到的频率为（接收器在右）

$$\nu = \frac{u-V_B}{u-V_A}\nu_0$$

(2)

$$\nu = \frac{u-V_B\cos\phi}{u}\nu_0$$