第1章 数学物理中的偏微分方程

二阶常系数线性偏微分方程

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + 2\sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

其中 $a_{ij} = a_{ji}$.

若 $f \equiv 0$，则称方程是齐次的；若不是，则称其为非齐次的。

三个典型方程：

波动方程：$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta_3 u + f(t,x,y,z)$

热传导方程：$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta_3 u + f(t,x,y,z)$ （$f = \frac{g}{c\rho}$；g热源密度，c比热）

泊松方程：$\Delta_3 u = f(x,y,z)$

定解问题
- 泛定方程：描述一个物理过程的偏微分方程
- 定解条件
  - 初始条件：$u|_{t=0}$, $u_t|_{t=0}$, $\cdots$ | 初始问题(Cauchy问题)；
  - 边界条件：$(\alpha \frac{\partial u}{\partial n} + \beta u)|_S = \varphi(x,y,z)$ | $\alpha=0$，第一类边界条件(Dirichlet条件)
  - 其中 α, β, φ 为已知函数， | $\beta=0$，第二类边界条件 (Neumann条件)
  - $\alpha, \beta \ge 0$，$\alpha^2+\beta^2 \ne 0$ | $\alpha, \beta \ne 0$，第三类边界条件 (Robin条件)

*边界条件示例

热传导方程：1° $u|_S = \mu(t,x,y,z)$，μ为S上物体温度

2° $\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_S = -\frac{q(t,x,y,z)}{k}$，q：向外的热流密度，k：热传导系数

3° $(k\frac{\partial u}{\partial n} + hu)|_S = h\theta$，$\theta$：介质在表面处的温度，h：热交换系数

波动方程：1° $u(t,0) = \mu(t)$，$u(t,l) = \nu(t)$，μ,ν：端点运动规律

2° $u_x(t,0) = -\frac{\mu(t)}{T}$，$u_x(t,l) = \frac{\nu(t)}{T}$，$\mu,\nu$：端点在u方向上受的外力

T：弦上张力.

3° $(Tu_x - ku)|_{x=0} = -\mu(t)$，$(Tu_x + ku)|_{x=l} = \nu(t)$，$\mu,\nu$同2°.

*适定性 (Hadamard意义下)：

定解问题的解存在、唯一、稳定。

达朗贝尔公式 (无界弦自由振动问题的通解)

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} \\ u(0,x) = \varphi(x), \quad u_t(0,x) = \psi(x) \end{cases}$$

解：1° 一维齐次波动方程通解 $u = f(x-at) + g(x+at)$

2° 由初始条件 $\begin{cases} f(x) + g(x) = \varphi(x), \\ -af'(x) + ag'(x) = \psi(x) \end{cases} \Rightarrow -f(x) + g(x) = \frac{1}{a}\int_0^x \psi(\xi)d\xi + C$

$\therefore f(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) - \frac{1}{2a}\int_0^x \psi(\xi)d\xi - \frac{1}{2}C$

No.

Date

$g(x)=\frac{1}{2}\varphi(x)+\frac{1}{2a}\int_0^x\psi(\xi)d\xi+\frac{1}{2}C$

∴解为 $u(t,x)=\frac{1}{2}\left(\varphi(x-at)+\varphi(x+at)\right)+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi$

广义解：当 $\varphi(x)\in C^2$，$\psi(x)\in C^1$ 时，达朗贝尔公式所确定的函数是一维波动方程初始问题的解。

当 $\varphi(x),\psi(x)\in C$ 时，在任意有限区间 $[-r,r]$ 上，由 Weierstrass 定理，存在无穷可微函数列 $\{\varphi_n(x)\}$ 及 $\{\psi_n(x)\}$ 分别一致收敛于 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$。

则当 n 充分大时，

$$u_n(t,x)=\frac{1}{2}\left(\varphi_n(x-at)+\varphi_n(x+at)\right)+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi_n(\xi)d\xi$$

可以看作初始问题的近似解。

称形式解

$$u(t,x)=\frac{1}{2}\left(\varphi(x-at)+\varphi(x+at)\right)+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi$$

为初始问题在连续函数类中的广义解。

叠加原理：1°（线性组合）

记二阶线性微分算子

$$L\equiv\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}+2\sum_{i=1}^{n}b_i\frac{\partial}{\partial x_i}+C$$

若 u_i 满足线性方程（线性定解条件）

$$Lu_i=f_i\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

则 $u=\sum_{i=1}^{n}C_iu_i$ 满足方程（定解条件）

$$Lu=\sum_{i=1}^{n}C_if_i$$

2°（级数）

若 u_i 满足 $Lu_i=f_i\quad(i=1,2,\cdots)$

且级数 $u=\sum_{i=1}^{+\infty}C_iu_i$ 收敛，且满足 L 中出现的偏导数与 Σ 交换的条件（如 u_i 的这些偏导数连续，相应的级数一致收敛。）

则 u 满足线性方程（定解条件）

$$Lu=\sum_{i=1}^{+\infty}C_if_i$$

3°（积分）

若 $u(M,M_0)$ 满足 $Lu=f(M,M_0)$，其中 M 为自变量组，M_0 为参数组

且积分 $U(M)=\int_V u(M,M_0)dM_0$ 收敛，且满足 L 中出现的偏导数与 $\int$ 交换的条件（如 u 的这些偏导数连续，相应的积分一致收敛。）

则 $U(M)$ 满足方程（定解条件）$LU=\int_V f(M,M_0)dM_0$

No.

Date

齐次化原理：1°（波动方程）

已知齐次方程的柯西问题

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial t^2} w = L w & (M \in R^3, t > \tau) \\ w|_{t=\tau} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial t}|_{t=\tau} = f(\tau, M) \end{cases}$$

的解为 $w(t, M; \tau)$

则非齐次方程的柯西问题

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u = L u + f(t, M) & (M \in R^3, t > 0) \\ u|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

的解为 $u = \int_0^t w(t, M; \tau)\, d\tau$

2°（热传导方程）

已知柯西问题

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} w = L w & (M \in R^3, t > \tau) \\ w|_{t=\tau} = f(\tau, M) \end{cases}$$

的解为 $w(t, M; \tau)$

则柯西问题

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u = L u + f(t, M) & (M \in R^3, t > 0) \\ u|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

的解为 $u = \int_0^t w(t, M; \tau)\, d\tau$