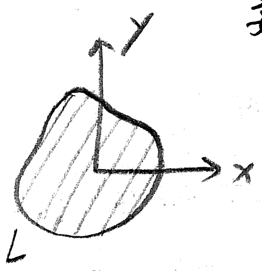
第七章 弹性力学平面问题的直角坐标解法

7.1 平面应力和平面应变

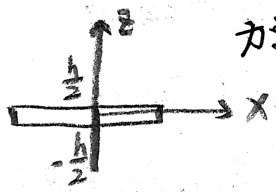
①平面应力

物理背景：薄平板受到平行于板面，沿厚度均匀分布的载荷。



数学表达：

$$\begin{cases} \vec{t}=0 & (z=\pm\frac{h}{2}) \\ \vec{t}=(t_x,t_y,0) & ((x,y)\in L) \\ \vec{f}=(f_x,f_y,0) & (\Omega) \end{cases}$$



力学方程组：

设 $\sigma_z=\tau_{xz}=\tau_{yz}=0$ (Ω)

且 $\sigma_x,\sigma_y,\tau_{xy}$ 仅是 x,y 的函数

1° 本构关系：

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x-\nu\sigma_y) \\ \varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y-\nu\sigma_x) \\ \varepsilon_{xy} = \frac{1+\nu}{E}\tau_{xy} \\ \varepsilon_z = \frac{-\nu}{E}(\sigma_x+\sigma_y) \\ \varepsilon_{zx}=0 \\ \varepsilon_{zy}=0 \end{cases}$$

反解可得应变表示的本构关系

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x+\nu\varepsilon_y) \\ \sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_y+\nu\varepsilon_x) \\ \tau_{xy} = \frac{E}{1+\nu}\varepsilon_{xy} \end{cases}$$

2° 平衡方程：

$$\begin{cases} \frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}+f_x=0 \\ \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+f_y=0 \end{cases}$$

3° 应变协调方程：

所有应力分量均只与 x,y 相关，由本构方程知，所有应变分量也只跟 x,y 有关.

$$
\begin{cases}
\varepsilon_{11,22}+\varepsilon_{22,11}=2\varepsilon_{12,12}\\
\varepsilon_{22,33}+\varepsilon_{33,22}=2\varepsilon_{23,23}\\
\varepsilon_{33,11}+\varepsilon_{11,33}=2\varepsilon_{31,31}\\
\varepsilon_{11,23}+\varepsilon_{23,11}=\varepsilon_{12,13}+\varepsilon_{13,12}\\
\varepsilon_{22,31}+\varepsilon_{31,22}=\varepsilon_{23,21}+\varepsilon_{21,23}\\
\varepsilon_{33,12}+\varepsilon_{12,33}=\varepsilon_{31,32}+\varepsilon_{32,31}
\end{cases}
$$

应力协调方程：

$$\nabla^2(\sigma_x+\sigma_y)+(1+\nu)\left(\frac{\partial f_x}{\partial x}+\frac{\partial f_y}{\partial y}\right)=0$$

f 为常量时有

$$\nabla^2(\sigma_x+\sigma_y)=0$$

上式中，对 z 求导的项为 0，ε_{xz}、ε_{yz} 也为 0. 得到

$$
\begin{cases}
\varepsilon_{11,22}+\varepsilon_{22,11}=2\varepsilon_{12,12}\\
\varepsilon_{33,22}=0\\
\varepsilon_{33,11}=0\\
\varepsilon_{33,12}=0
\end{cases}
$$

这就是平面应力问题的应变协调方程。(我们常常忽略后面三个方程)

② 广义平面应力

- 数学表述：

$$
\begin{cases}
\vec{t}=0 & (z=\pm\frac{h}{2})\\
\vec{f}=0 & (\Omega)
\end{cases}
$$

- 问题简化：在 $z=\pm\frac{h}{2}$ 处，$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x}=\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}=0$

由平衡方程分式

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial \sigma_z}{\partial z}=0$$

$$\therefore \left.\frac{\partial \sigma_z}{\partial z}\right|_{z=\pm\frac{h}{2}}=0$$

设 $\frac{\partial \sigma_z}{\partial z}$ 在板内变化不大，则 $\sigma_z\approx 0 \quad (\Omega)$

由平衡方程分式

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}=0$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z}=0$$

定义沿z向的平均量，$\overline{\sigma_{ij}} = \frac{1}{h}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{ij} dz$.

则
$$\begin{cases} \frac{\partial \overline{\sigma_x}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{\tau_{xy}}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{\tau_{xz}}}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial \overline{\tau_{xy}}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{\sigma_y}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{\tau_{yz}}}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

又 $\frac{\partial \overline{\tau_{xz}}}{\partial z} = \frac{1}{h}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} dz = \frac{1}{h} \tau_{xz}\Big|_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} = 0$

同理 $\frac{\partial \overline{\tau_{yz}}}{\partial z} = 0$

$\therefore$
$$\begin{cases} \frac{\partial \overline{\sigma_x}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{\tau_{xy}}}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial \overline{\tau_{xy}}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{\sigma_y}}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

同样引入平均量 $\overline{\varepsilon_x}$，$\overline{\varepsilon_y}$，$\overline{\varepsilon_{xy}}$. 可以得到如下结果.

力学方程组：

$\overline{\sigma_z} \approx 0$ ，$\overline{\tau_{xz}} = 0$ ，$\overline{\tau_{yz}} = 0$

$\overline{\sigma_x}$，$\overline{\sigma_y}$，$\overline{\tau_{xy}}$ 都只是 x, y 的函数.

1° 平衡方程：

$$\begin{cases} \frac{\partial \overline{\sigma_x}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{\tau_{xy}}}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial \overline{\tau_{xy}}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{\sigma_y}}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

2° 本构关系

$$\begin{cases} \overline{\varepsilon_x} = \frac{1}{E}(\overline{\sigma_x} - \nu \overline{\sigma_y}) \\ \overline{\varepsilon_y} = \frac{1}{E}(\overline{\sigma_y} - \nu \overline{\sigma_x}) \\ \overline{\varepsilon_{xy}} = \frac{1+\nu}{E} \overline{\tau_{xy}} \end{cases}$$

③ 平面应变

物理背景：长柱体受到垂直于母线，沿母线均匀分布的载荷。

半逆法假设： u, v 只是 x, y 的函数， $w=0$ (Ω).

力学方程组：1° 几何方程

$$
\begin{cases}
\varepsilon_x = \dfrac{\partial u}{\partial x} \\
\varepsilon_y = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\
\varepsilon_{xy} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x}\right) \\
\varepsilon_z = 0 \\
\varepsilon_{xz} = 0 \\
\varepsilon_{yz} = 0
\end{cases}
$$

2° 本构关系

$$
\begin{cases}
\varepsilon_x = \dfrac{1}{E}\left(\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)\right) \\
\varepsilon_y = \dfrac{1}{E}\left(\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)\right) \\
0 = \dfrac{1}{E}\left(\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)\right) \\
\varepsilon_{xy} = \dfrac{1+\nu}{E}\tau_{xy} \\
0 = \dfrac{1+\nu}{E}\tau_{xz} \\
0 = \dfrac{1+\nu}{E}\tau_{yz}
\end{cases}
$$

记 $E' = \dfrac{E}{1-\nu^2}$ ， $\nu' = \dfrac{\nu}{1-\nu}$ ，则有

$$
\begin{cases}
\varepsilon_x = \dfrac{1}{E'}(\sigma_x - \nu'\sigma_y) \\
\varepsilon_y = \dfrac{1}{E'}(\sigma_y - \nu'\sigma_x) \\
\varepsilon_{xy} = \dfrac{1+\nu'}{E'}\tau_{xy}
\end{cases}
$$

反解得应变表示的本构关系.

$$
\begin{cases}
\sigma_x = \dfrac{E'}{1-\nu'^2}(\varepsilon_x + \nu'\varepsilon_y) \\
\sigma_y = \dfrac{E'}{1-\nu'^2}(\varepsilon_y + \nu'\varepsilon_x) \\
\tau_{xy} = \dfrac{E'}{1+\nu'}\varepsilon_{xy} \\
\sigma_z = \dfrac{\nu'E'}{1-\nu'^2}(\varepsilon_x + \varepsilon_y), \quad \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0
\end{cases}
$$

可以看出，平面应变的本构方程中有关 $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_{xy}$；$\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ 的方程在变量替换后，与平面应力的相应方程形式相同。

3° 平衡方程

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + f_x = 0 \\ \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \dfrac{\partial \sigma_y}{\partial y} + f_y = 0 \end{cases}$$

与平面应力问题相同。

4° 协调方程

应变

应力协调方程：

$\nabla^2(\sigma_x+\sigma_y)+(1+\nu)\nabla\cdot f=0$

$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_{xy}$ 均与 z 无关，$\varepsilon_z, \varepsilon_{zx}, \varepsilon_{zy}$ 均为 0，于是 6 个应变协调方程只剩下一个。

$$\varepsilon_{11,22} + \varepsilon_{22,11} = 2\varepsilon_{12,12}$$

7.2 应力函数

在无体力的情形下，平面应力/应变问题的平衡方程为：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \dfrac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

存在函数 A，B，使得（注：$A(x,y), B(x,y)$）

$$\sigma_x = \frac{\partial A}{\partial y}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial A}{\partial x}$$

$$\tau_{xy} = \frac{\partial B}{\partial y}, \quad \sigma_y = -\frac{\partial B}{\partial x}$$

由于 τ_{xy} 的一致性，有 $-\dfrac{\partial A}{\partial x} = \dfrac{\partial B}{\partial y}$，所以存在函数 φ，使得（$\varphi(x,y)$）

$$A = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad B = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}.$$

因此，

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}.$$

τ_{xy} 应用"弹性力学"的定义。

① 平面应力问题

本构方程化为：

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \dfrac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y) = \dfrac{1}{E}\left(\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \nu\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right) \\ \varepsilon_y = \dfrac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_y) = \dfrac{1}{E}\left(\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \nu\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}\right) \\ \varepsilon_{xy} = \dfrac{1+\nu}{E}\tau_{xy} = -\dfrac{1+\nu}{E}\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \end{cases}$$

代入应变协调方程 $\varepsilon_{11,22}+\varepsilon_{22,11}=2\varepsilon_{12,12}$ 得

$$\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4\varphi}{\partial y^4}=0$$

即 $\nabla^2\nabla^2\varphi=0$

又由应变协调方程 $\varepsilon_{33,22}=\varepsilon_{33,11}=\varepsilon_{33,12}=0$

和本构关系 $\varepsilon_z=\frac{-\nu}{E}(\sigma_x+\sigma_y)=\frac{-\nu}{E}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right)$ 得

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\nabla^2\varphi)=\frac{\partial^2}{\partial y^2}(\nabla^2\varphi)=\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}(\nabla^2\varphi)=0$$

这一节给出了弹性力学平面问题的提法：

$$\begin{cases}\nabla^2\nabla^2\varphi=0 & (G)\\ \varphi\text{的边值条件} & (\partial G)\end{cases}$$

由应力函数，可求得各应力分量：

$$\sigma_x=\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2},\ \sigma_y=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}$$

$$\tau_{xy}=-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}$$

再由本构关系和几何方程可得应变和位移。

我们将不再区分平面应力/应变，及广义平面应力问题。

所以，无体力的平面应力问题的应力函数满足：

$$\begin{cases}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\nabla^2\varphi)=0\\ \frac{\partial^2}{\partial y^2}(\nabla^2\varphi)=0\\ \frac{\partial^2}{\partial x\partial y}(\nabla^2\varphi)=0\end{cases}$$

若体力有势，记 $\vec{f}=-\nabla V$，

由应力协调方程得出应力函数满足：

$$\nabla^2\nabla^2\varphi=(+1+\nu)\nabla^2V$$

若记 $\begin{cases}\sigma_x=\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+V\\ \sigma_y=\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+V\\ \tau_{xy}=-\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}\end{cases}$，则有 $\nabla^2\nabla^2\phi=(-1+\nu)\nabla^2V$ 且 $\varphi=\phi+\frac{1}{2}V(x^2+y^2)$ （但ϕ不满足7-3）

② 平面应变问题.

若体力为常数，则问题可化为：

1° $\begin{cases}\vec{f}=(f_x,f_y)\\ \tilde{T}_1=(\tilde{T}_x(x,y),\tilde{T}_y(x,y))\end{cases}$

特解：$\begin{cases}\sigma_x=-f_x x\\ \sigma_y=-f_y y\\ \tau_{xy}=0\end{cases}$

（面力$\tilde{T}$由特解决定）

2° $\begin{cases}\vec{f}=0\\ \tilde{T}_2=\tilde{T}-\tilde{T}_1\end{cases}$ 用应力函数解法

~~[illegible]~~本构方程（前3个）与平面应力问题有相同形式，应变协调方程仅有一个：~~[illegible]~~

$$\varepsilon_{11,22}+\varepsilon_{22,11}=2\varepsilon_{12,12}.$$

相似地，可得无体力的平面应变问题的应力函数满足：

$$\nabla^2\nabla^2\varphi=0$$

（注：双调和方程的定解条件为给定 $\varphi|_{\partial G}$、$\frac{\partial\varphi}{\partial n}|_{\partial G}$.）

7-3 应力函数的性质

1° 同一问题的应力函数可以相差一个线性函数。

$$\varphi_1-\varphi_2=Ax+By+C$$

2° 应力函数一阶偏导数在边界上的值由边界上载荷的主向量确定。

$$\nabla\varphi|_{A_1}-\nabla\varphi|_{A_0}=\vec{R}e^{i\frac{\pi}{2}}$$

3° 应力函数在边界上的值由边界上载荷的主矩确定。

$$\varphi|_{A_1}=M_1+\varphi|_{A_0}+(x_1-x_0)\frac{\partial\varphi}{\partial x}\Big|_{A_0}+(y_1-y_0)\frac{\partial\varphi}{\partial y}\Big|_{A_0}$$

4° 单连通区域内，应力函数单值；多连通区域内，应力函数可能不单值.

但应力场总是单值的

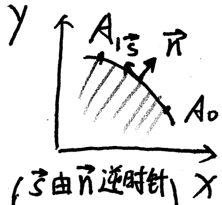
证明: 1° $\because \sigma_x = \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}$, $\sigma_y = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}$, $\tau_{xy} = -\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}$

$\therefore$ φ 改变一个线性函数，应力场不变. □.

应力函数解法中，坐标架受严格限制:
1° y轴由x轴逆时针转90°得到
2° 从参考点出发，绕边界沿逆时针方向转到各点.
(否则全出错!)

2° 夹角与沿边界线的导数间满足:

$$\begin{cases} \cos\langle \vec{n},\vec{x}\rangle = \frac{dy}{ds} \\ \cos\langle \vec{n},\vec{y}\rangle = -\frac{dx}{ds} \end{cases}$$



($\vec{s}$由$\vec{n}$逆时针转90°得到。)

边界条件

$$\begin{cases} \sigma_x \cos\langle \vec{n},\vec{x}\rangle + \tau_{xy}\cos\langle \vec{n},\vec{y}\rangle = t_x \\ \tau_{xy}\cos\langle \vec{n},\vec{x}\rangle + \sigma_y \cos\langle \vec{n},\vec{y}\rangle = t_y \end{cases}$$

得到
$$\begin{cases} \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}\frac{dx}{ds} = t_x \\ -\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}\frac{dy}{ds} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\frac{dx}{ds} = t_y \end{cases}$$

即
$$\begin{cases} \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) = t_x \\ \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) = -t_y \end{cases}$$

所以
$$\begin{cases} \left.\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right|_{A_0}^{A_1} = \int_{A_0}^{A_1} t_x\, ds = R_x \\ \left.\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|_{A_0}^{A_1} = -\int_{A_0}^{A_1} t_y\, ds = -R_y \end{cases}$$

得到应力函数一阶偏导数的边界值

$$\begin{cases} \left.\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|_{A_1} - \left.\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|_{A_0} = -R_y \\ \left.\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right|_{A_1} - \left.\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right|_{A_0} = R_x \end{cases}$$

或形式上的记为

$$\nabla\varphi|_{A_1} - \nabla\varphi|_{A_0} = \vec{R}e^{i\frac{\pi}{2}}$$

其中 $\vec{R}$表示A_0到A_1边界段上载荷的主向量.(沿逆时针过渡)

由性质1°,可取参考点A_0处的梯度为零,则表达式简化为

$$\nabla\varphi|_{A_1} = \vec{R}e^{i\frac{\pi}{2}}$$

注: 若顺时针旋转(保持平面右手系不变)，则需加个负号。

3° $\because$ $$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{dy}{ds}$$

$$= \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\Big|_{A_0} - \int_0^s t_y ds\right)\frac{dx}{ds} +$$

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\Big|_{A_0} + \int_0^s t_x ds\right)\frac{dy}{ds}$$

$\therefore$ $$\varphi\Big|_{A_0}^{A_1} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\Big|_{A_0}\cdot(x_1 - x_0) + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\Big|_{A_0}\cdot(y_1 - y_0)$$

$$+ \int_0^{s_1}\left(-\frac{dx}{ds}\int_0^s t_y ds + \frac{dy}{ds}\int_0^s t_x ds\right) ds$$

$$= (x_1 - x_0)\frac{\partial\varphi}{\partial x}\Big|_{A_0} + (y_1 - y_0)\frac{\partial\varphi}{\partial y}\Big|_{A_0}$$

$$+ \left[-x\int_0^s t_y ds + y\int_0^s t_x ds\right]\Big|_0^{s_1}$$

$$- \int_0^{s_1}(-x t_y + y t_x) ds$$

$$= (x_1 - x_0)\frac{\partial\varphi}{\partial x}\Big|_{A_0} + (y_1 - y_0)\frac{\partial\varphi}{\partial y}\Big|_{A_0}$$

$$- \int_0^{s_1}\left[(x_1 - x)t_y - (y_1 - y)t_x\right] ds$$

$$= M_1 + (x_1 - x_0)\frac{\partial\varphi}{\partial x}\Big|_{A_0} + (y_1 - y_0)\frac{\partial\varphi}{\partial y}\Big|_{A_0}$$

其中M_1为以A_1为参考点，$\overset{\frown}{A_0A_1}$段上载荷的主矩.

得到应力函数的边界值

$$\varphi\Big|_{A_1} = M_1 + \varphi\Big|_{A_0} + (x_1 - x_0)\frac{\partial\varphi}{\partial x}\Big|_{A_0} + (y_1 - y_0)\frac{\partial\varphi}{\partial y}\Big|_{A_0}$$

如果依据性质1°，将参考点A_0处的应力函数值及其一阶偏导数取为零，即 $\varphi|_{A_0} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\Big|_{A_0} = \frac{\partial\varphi}{\partial y}\Big|_{A_0} = 0$，则上述表达简化为

$$\varphi\Big|_{A_1} = M_1 \quad ,$$

其中M_1为以A_1为参考点，$\overset{\frown}{A_0A_1}$段上载荷的主矩.

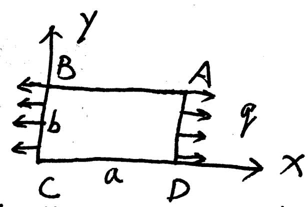
A_0沿逆时针方向转到A_1. M_1以z轴方向为正方向.

~~注：上述一种特殊~~

注：1°若顺时针旋转（保持平面右手系不变），则需加负号。

2°如果题中用左手系，则重新建系，用右手系。

例题：简单拉伸



弹性体在端面AD、BC上受到均匀拉力q. 假设弹性体在z方向的尺寸很薄，或很厚，则问题成为平面应力/应变问题。假设弹性体不受体力，则问题归结为求解应力函数φ.

接下来求解应力函数的边界条件。

取A点为参考点，令 $\varphi|_A = \nabla\varphi|_A = 0$.

AB段上： $\vec{t}=0$，由性质2°、3°得

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=0 \ , \ \frac{\partial\varphi}{\partial y}=0 \ , \ \varphi=0$$

BC段上： $\vec{t}=-q\hat{x}$，可得

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=0 \ , \ \frac{\partial\varphi}{\partial y}=-q(b-y) \ , \ \varphi=\frac{q}{2}(b-y)^2$$

CD段上： $\vec{t}=0$，可得

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=0 \ , \ \frac{\partial\varphi}{\partial y}=-qb \ , \ \varphi=\frac{q}{2}b^2$$

DA段上： $\vec{t}=q\hat{x}$，可得

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=0 \ , \ \frac{\partial\varphi}{\partial y}=-q(b-y) \ , \ \varphi=\frac{q}{2}(b-y)^2$$

应力函数问题为：

$$\begin{cases}
\nabla^2\nabla^2\varphi=0 & (G) \\
\varphi=\begin{cases} 0 & (\overline{AB}) \\ \frac{q}{2}(b-y)^2 & (\overline{BC},\overline{DA}) \\ \frac{q}{2}b^2 & (\overline{CD}) \end{cases} \\
\frac{\partial\varphi}{\partial x}=0 & (\overline{AB},\overline{BC},\overline{CD},\overline{DA}) \\
\frac{\partial\varphi}{\partial y}=\begin{cases} 0 & (\overline{AB}) \\ -q(b-y) & (\overline{BC},\overline{DA}) \\ -qb & (\overline{CD}) \end{cases}
\end{cases}$$

猜得 $\varphi=\frac{q}{2}(b-y)^2$，即为问题的解.

进而求得应力：
$$\begin{cases}\sigma_x = \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = q \\ \sigma_y = \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = 0 \\ \tau_{xy} = -\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} = 0\end{cases}$$

7.4 多项式解法

应力问题中，可以用一些多项式函数试探应力场的解.

1° 一次多项式（线性函数）

$$U = a_0 + a_1 x + b_1 y$$

对应应力场为零.

2° 二次多项式

$$U = a_2 x^2 + b_2 xy + c_2 y^2$$

对应应力场：

$$\begin{cases}\sigma_x = 2c_2 \\ \sigma_y = 2a_2 \\ \tau_{xy} = -b_2\end{cases}$$

即为常应力场.

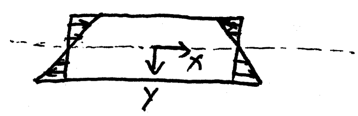
3° 三次多项式

$$U = a_3 x^3 + b_3 x^2 y + c_3 x y^2 + d_3 y^3$$

对应线性应力场.

比如 $U = d_3 y^3$，对应应力场为

$$\begin{cases}\sigma_x = 6d_3 y \\ \sigma_y = 0 \\ \tau_{xy} = 0\end{cases}$$



恰好是纯弯曲问题的应力场.（简支、悬臂均可）

4° 四次多项式

$$U = a_4 x^4 + b_4 x^3 y + c_4 x^2 y^2 + d_4 x y^3 + e_4 y^4$$

由于双调和方程的限制，要求

$$24a_4 + 8c_4 + 24e_4 = 0$$

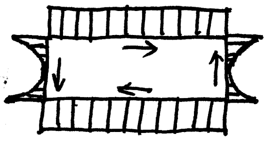
即通式化为

$$U = a_4 x^4 + b_4 x^3 y + c_4 x^2 y^2 + d_4 x y^3 - \left(a_4 + \frac{c_4}{3}\right) y^4$$

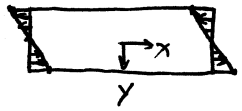
对应线性、抛物型应力场.

如取 $U = d_4 x y^3$，则应力场：

$$\begin{cases} \sigma_x = 6d_4 xy \\ \sigma_y = 0 \\ \tau_{xy} = -3d_4 y^2 \end{cases}$$



τ_{xy}



σ_x

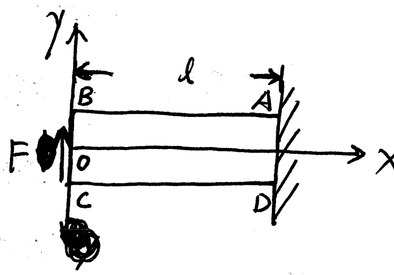
5° 五次多项式

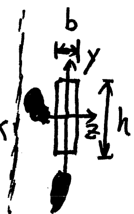
通式为 $U = a_5 x^5 + b_5 x^4 y + c_5 x^3 y^2 + d_5 x^2 y^3$

$- (5a_5 + c_5) x y^4 - \frac{1}{5}(b_5 + d_5) y^5$

7.5 算例

①悬臂梁一端受集中力作用





左视图

用应力函数解法解。
多项式

边界条件：(不完全)

$$\begin{cases} t_x = t_y = 0 & (\overline{AB}) \\ t_x = 0 \quad b\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} t_y dy = F & (\overline{BC}) \\ t_x = t_y = 0 & (\overline{CD}) \end{cases}$$

应力函数边条件：(不完全)

取O点为参考点，令 $\varphi|_O = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\Big|_O = \frac{\partial \varphi}{\partial y}\Big|_O = 0$.

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{F}{2b}, & \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0, & \varphi = -\frac{F}{2b}x & (\overline{CD}) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{F}{2b}, & \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0, & \varphi = \frac{F}{2b}x & (\overline{BA}) \text{（顺时针求值）} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0, & \varphi = 0 & & (\overline{BC}) \end{cases}$$

应力函数：

由 $\begin{cases} \varphi(x, \pm\frac{h}{2}) = \pm\frac{F}{2b}x \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, -\frac{h}{2}) = 0 \end{cases}$

可设 φ 为多项式 $\varphi(x,y) = x(Ay + Cy^3)$

得 $\begin{cases} -\frac{h}{2}A - \frac{h^3}{8}C = -\frac{F}{2b} \\ A + 3C(\frac{h^2}{4}) = 0 \end{cases}$

~~注意到各应力应为 y 的奇函数，而对 $\varphi = xy^2$，~~

~~$\sigma_x = 2x$，不满足要求~~

~~$\therefore B=0$.~~

进而求得 $\begin{cases} A = \dfrac{3F}{2hb} \\ C = -\dfrac{2F}{bh^3} \end{cases}$

应力函数为

$$\varphi = x\cdot\left(\frac{3F}{2bh}y - \frac{2F}{bh^3}y^3\right)$$

应力场：
$$\begin{cases} \sigma_x = -\dfrac{12F}{bh^3}xy \\ \sigma_y = 0 \\ \tau_{xy} = -\dfrac{3F}{2bh} + \dfrac{6F}{bh^3}y^2 \end{cases}$$

位移场：定义惯性矩 $I = \dfrac{bh^3}{12}$，力矩 $M = -Fx$

静矩 $S = \dfrac{bh^2}{8} - \dfrac{by^2}{2}$

则应力场可表示为

$$\begin{cases} \sigma_x = \dfrac{My}{I} \\ \sigma_y = 0 \\ \tau_{xy} = -\dfrac{FS}{bI} \end{cases}$$

利用本构关系和几何方程，有

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y) = -\dfrac{F}{EI}xy \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} = \dfrac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x) = \dfrac{\nu F}{EI}xy \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x}\right) = \dfrac{1+\nu}{E}\tau_{xy} = \dfrac{-F}{2\mu I}\left(\dfrac{h^2}{8} - \dfrac{y^2}{2}\right) \end{cases}$$

对前两式积分得

$$\begin{cases} u = -\dfrac{F}{2EI}x^2y + f(y) \\ v = \dfrac{\nu F}{2EI}xy^2 + g(x) \end{cases}$$

代入第3式得

$$\left(g'(x) - \frac{F}{2EI}x^2\right) + \left[f'(y) + \left(\frac{\nu F}{2EI} - \frac{F}{2\mu I}\right)y^2\right] = -\frac{Fh^2}{8\mu I}$$

可知上式左端两项分别为常数，设

$$\begin{cases} g'(x) - \dfrac{F}{2EI}x^2 = A \\ f'(y) + \left(\dfrac{\nu F}{2EI} - \dfrac{F}{2\mu I}\right)y^2 = B \end{cases}$$

则 $A+B = -\frac{Fh^2}{8\mu I}$

解得 $\begin{cases} g(x) = \frac{F}{6EI}x^3 + Ax + C \\ f(y) = \left(-\frac{\nu F}{6EI} + \frac{F}{6\mu I}\right)y^3 + By + D \end{cases}$

得到位移通解

$$\begin{cases} u = -\frac{F}{2EI}x^2y + \left(-\frac{\nu F}{6EI} + \frac{F}{6\mu I}\right)y^3 + By + D \\ v = \frac{\nu F}{2EI}xy^2 + \frac{F}{6EI}x^3 + Ax + C \end{cases}$$

代入不同的边条件,可以求得不同的位移场.

1) 边条件: $\begin{cases} u = v = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \end{cases}$ $\quad ((x,y) = (L,0))$

得到方程组 $\begin{cases} D = 0 \\ \frac{FL^3}{6EI} + AL + C = 0 \\ \frac{F}{2EI}L^2 + A = 0 \\ A + B = -\frac{Fh^2}{8\mu I} \end{cases}$

解得 $\begin{cases} A = -\frac{F}{2EI}L^2 \\ B = \frac{FL^2}{2EI} - \frac{Fh^2}{8\mu I} \\ C = \frac{FL^3}{3EI} \\ D = 0 \end{cases}$

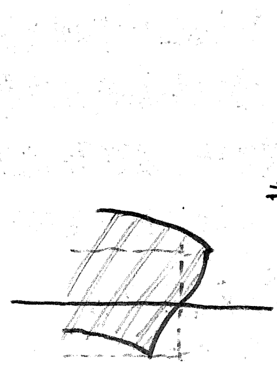
则中心线的挠度

$$V(x,0) = \frac{Fx^3}{6EI} - \frac{FL^2}{2EI}x + \frac{FL^3}{3EI}$$

端部挠度

$$V(0,0) = \frac{FL^3}{3EI}$$,这与材料力学的解一样。

~~2) 边条件~~



注: $\frac{\partial u}{\partial y}(L,0) < 0$,说明"固端"有转角.

此多项式解对应"固端"图像大致如左。

2) 边条件：
$$\begin{cases} u=v=0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=0 \end{cases} \qquad ((x,y)=(L,0))$$

可得线性方程组

$$\begin{cases} D=0 \\ \dfrac{FL^3}{6EI}+AL+C=0 \\ \dfrac{-FL^2}{2EI}+B=0 \\ A+B=-\dfrac{Fh^2}{8\mu I} \end{cases}$$

解得
$$\begin{cases} A=-\dfrac{FL^2}{2EI}-\dfrac{Fh^2}{8\mu I} \\ B=\dfrac{FL^2}{2EI} \\ C=\dfrac{FL^3}{3EI}+\dfrac{Fh^2L}{8\mu I} \\ D=0 \end{cases}$$

中心线挠度

$$v(x,0)=\frac{Fx^3}{6EI}+\left(-\frac{FL^2}{2EI}-\frac{Fh^2}{8\mu I}\right)x+\frac{FL^3}{3EI}+\frac{Fh^2L}{8\mu I}$$

端部挠度

$$v(0,0)=\frac{FL^3}{3EI}+\frac{Fh^2L}{8\mu I}$$

上式第二项由剪力引起。

注：$\frac{\partial v}{\partial x}(L,0)<0$.

注：1° 由上述计算可知，题中给出的多项式解只是一个近似解，无法满足所有边界条件（应力、位移）。这是因为多项式函数太简单，没有太多自由度（待定系数），只能满足部分约束。虽然给出的应力函数是所提出的应力函数问题的一个精确解，但所提的应力函数问题只反映了原边值问题的部分边界条件，无法保证求得的一个解就是真实解，这说明了多项式解的不精确性。（Saint-Venant 边条件也是不精确的原因.）

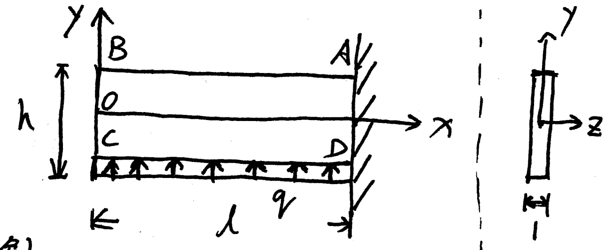
2° 对于悬臂梁和简支梁，常用多项式应力函数解法。

3° 可以看出，梁厚 b 对应力场无影响，可以设其为 1.

4° 应力函数中 y 的部分只设两项，因为所有边条件只能定下两个系数。

② 悬臂梁受均布载荷作用.

用多项式解法解。



左视图

边界条件：(不完全)

$$\begin{cases} t_x(x,\frac{h}{2})=0\ , & t_y(x,\frac{h}{2})=0 \quad (\overline{AB}) \\ \underline{t_x(0,y)=0}\ , & t_y(0,y)=0 \quad (\overline{BC}) \\ t_x(x,-\frac{h}{2})=0\ , & t_y(x,-\frac{h}{2})=q \quad (\overline{CD}) \end{cases}$$

应力函数：

由 $\begin{cases} \sigma_y(x,\frac{h}{2})=0 \\ \sigma_y(x,-\frac{h}{2})=-q \end{cases}$ ，假设 $\sigma_y=f_0(y)$

则 $\sigma_y=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=f_0(y)$

应力函数应有形式

$$\varphi=\frac{1}{2}f_0(y)x^2+f_1(y)x+f_2(y)$$

应力函数满足双调和方程 $\nabla^2\nabla^2\varphi=0$，得

$$\frac{1}{2}f_0^{(4)}x^2+f_1^{(4)}x+\left(f_2^{(4)}+2f_0^{(2)}\right)=0 \quad (G)$$

得 $\begin{cases} \frac{1}{2}f_0^{(4)}=0 \\ f_1^{(4)}=0 \\ f_2^{(4)}+2f_0^{(2)}=0 \end{cases}$

解得 $\begin{cases} f_0(y)=Ay^3+By^2+Cy+D \\ f_1(y)=Ey^3+Fy^2+Gy+H \\ f_2(y)=-\frac{A}{10}y^5-\frac{B}{6}y^4+Ky^3+Ly^2+Oy+S \end{cases}$

以O点为参考点，取 $\varphi|_0=\frac{\partial\varphi}{\partial x}|_0=\frac{\partial\varphi}{\partial y}|_0=0$，

则应力函数形式为

$$\varphi=\frac{1}{2}(Ay^3+By^2+Cy+D)x^2+(Ey^3+Fy^2+Gy)x+(-\frac{A}{10}y^5-\frac{B}{6}y^4+Ky^3+Ly^2)$$

应力场：
$$
\begin{cases}
\sigma_x = \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = \dfrac{1}{2}(6Ay+2B)x^2+(6Ey+2F)x \\
\qquad\qquad +(-2Ay^3-2By^2+6ky+2L) \\
\sigma_y = \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = Ay^3+By^2+Cy+D \\
\tau_{xy} = -\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} = -(3Ay^2+2By+C)x-(3Ey^2+2Fy+G)
\end{cases}
$$

由边界条件 $\tau_{xy}(0,y)=0$ 得

$$E=F=G=0$$

由边界条件
$$
\begin{cases}
\tau_{xy}(x,\frac{h}{2})=0 \\
\tau_{xy}(x,-\frac{h}{2})=0 \\
\sigma_y(x,\frac{h}{2})=0 \\
\sigma_y(x,-\frac{h}{2})=-q
\end{cases}
$$
得

$$A=-\frac{2q}{h^3},\quad B=0,\quad C=\frac{3q}{2h},\quad D=-\frac{q}{2}$$

然而剩下的边条件 $\sigma_x(0,y)=0$ 不可能同时满足，故

放松为
$$
\begin{cases}
N=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\sigma_x(0,y)dy=0 \\
M=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}+y\sigma_x(0,y)dy=0
\end{cases}
$$

解得 $k=-\dfrac{q}{10h}$，$L=0$

得到受均布载荷悬臂梁的近似应力场

$$
\begin{cases}
\sigma_x = \dfrac{-6q}{h^3}yx^2+\dfrac{4q}{h^3}y^3-\dfrac{3q}{5h}y \\
\sigma_y = \dfrac{-2q}{h^3}y^3+\dfrac{3q}{2h}y-\dfrac{q}{2} \\
\tau_{xy} = \left(\dfrac{6q}{h^3}y^2-\dfrac{3q}{2h}\right)x
\end{cases}
$$

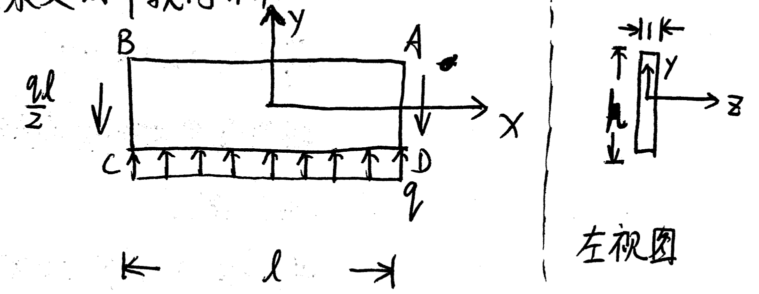
注：1° $\sigma_y=f_0(y)$ 的假设是一种在远离固端处的近似处理，

这不是唯一的假设方式，且导致了此后的边条件无法同时满足、

2° 上述解是近似解，因为没有考虑固端边条件（位移边条件），

且对应力边条件还做了放松。

③ 简支梁受均布载荷作用



用基于材料力学解的应力函数法解。

边界条件：

$$
\begin{cases}
t_x(x,-\frac{h}{2})=0,\ t_y(x,-\frac{h}{2})=q & (\overline{CD}) \\
t_x(x,-\frac{h}{2})=0,\ t_y(x,-\frac{h}{2})=0 & (\overline{AB}) \\
t_x(\frac{l}{2},y)=0,\ \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} t_y(\frac{l}{2},y)dy=-\frac{ql}{2} & (\overline{DA}) \\
t_x(-\frac{l}{2},y)=0,\ \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} t_y(-\frac{l}{2},y)dy=-\frac{ql}{2} & (\overline{BC})
\end{cases}
$$

材料力学解：

在给定梁截面的轴力、剪力、弯矩时，依据材料力学的平截面假设，正应力 σ_x 呈线性分布；由平衡方程知，矩形截面上切应力 τ_{xy} 呈抛物线分布；且材料力学认为在 y 方向上，材料没有正应变，$\sigma_y=0$.

易知梁截面上剪力、弯矩分布为：

$$
\begin{cases}
Q_y=-qx \\
M_z=-\frac{q}{2}(\frac{l^2}{4}-x^2)
\end{cases}
$$

(下端受拉为正)

且轴力总为零.

代入应力关系

$$
\begin{cases}
\sigma_x=+\frac{M_z}{I}y \\
\tau_{xy}=+\frac{Q_y}{2I}(\frac{h^2}{4}-y^2)
\end{cases}
$$

得应力场

$$
\begin{cases}
\sigma_x=\frac{q}{2I}y(\frac{l^2}{4}-x^2) \\
\tau_{xy}=-\frac{qx}{2I}(\frac{h^2}{4}-y^2) \\
\sigma_y=0
\end{cases}
$$

应力函数：材料力学解中 $\sigma_y=0$ 显然是不正确的，因为

$$\sigma_y\left(x,-\frac{h}{2}\right)=-q.$$

我们利用材料力学解中 σ_x, τ_{xy} 的形式，试探出应力函数.

由
$$\begin{cases}\sigma_x = Ay+Bx^2y\\ \tau_{xy}=Cx+Dxy^2\end{cases}$$
得

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=Ay+Bx^2y\\[2mm] \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}=-Cx-Dxy^2\end{cases}$$

所以
$$\varphi=\frac{A}{6}y^3+\frac{B}{6}x^2y^3+f_1(x)y+f_2(x)$$

由第二个方程，得

$$Bxy^2+f_1'(x)=-Cx-Dxy^2$$

$$\therefore\begin{cases}B=-D\\ f_1(x)=-\dfrac{C}{2}x^2+E\end{cases}$$

应力函数形式为

$$\varphi=\frac{A}{6}y^3+\frac{B}{6}x^2y^3+\left(-\frac{C}{2}x^2+E\right)y+f_2(x)$$

然而上式不可能满足双调和方程，故引入一个修正多项式函数 $\psi(x,y)$，并忽略线性部分. 则

$$\varphi=\frac{A}{6}y^3+\frac{B}{6}x^2y^3-\frac{C}{2}x^2y+f_2(x)+\psi(x,y)$$

其中，设 $f_2(x)$ 至多为3次多项式. (因为 $\psi(x,y)$ 可以包含 x 的高次多项式.)

代入双调和方程，得

$$\frac{\partial^4\psi}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4\psi}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4\psi}{\partial y^4}=-4By$$

它的一种最简单的解答为

$$\psi(x,y)=\frac{F}{24}x^4y+\frac{H}{120}y^5+\frac{K}{12}x^2y^3$$

且 $F+2K+H=-4B$

函数中已经有 x^2y 项，系数 K 是多余的，忽略掉.

应力函数有形式

$$\varphi = \frac{A}{6}y^3 + \frac{B}{6}x^2y^3 - \frac{C}{2}x^2y + f_2(x) + \frac{F}{24}x^4y - \frac{(4B+F)}{120}y^5$$

应力场：

$$\sigma_x = Ay + Bx^2y - \frac{4B+F}{6}y^3$$

$$\sigma_y = \frac{B}{3}y^3 - Cy + f_2''(x) + \frac{F}{2}x^2y$$

$$\tau_{xy} = -Bxy^2 + Cx - \frac{F}{6}x^3$$

由边条件

$$\begin{cases} \tau_{xy}(x, \pm\frac{h}{2}) = 0 \\ \sigma_y(x, \frac{h}{2}) = 0 \\ \sigma_y(x, -\frac{h}{2}) = -q \end{cases}$$

得

$$\begin{cases} (-\frac{B}{4}h^2 + C)x - \frac{F}{6}x^3 = 0 \\ \frac{B}{24}h^3 - \frac{C}{2}h + f_2''(x) + \frac{F}{4}hx^2 = 0 \\ -\frac{B}{24}h^3 + \frac{C}{2}h + f_2''(x) - \frac{F}{4}hx^2 = -q \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} -\frac{B}{4}h^2 + C = 0 \\ -\frac{F}{6} = 0 \\ f_2''(x) = -\frac{q}{2} \\ \frac{B}{24}h^3 - \frac{C}{2}h - \frac{q}{2} = 0 \end{cases}$$

解得 $B = -\frac{6q}{h^3}$，$C = -\frac{3q}{2h}$，$F = 0$，$f_2''(x) = -\frac{q}{2}$

应力场化为

$$\begin{cases} \sigma_x = Ay - \frac{6q}{h^3}x^2y + \frac{4q}{h^3}y^3 \\ \sigma_y = -\frac{2q}{h^3}y^3 + \frac{3q}{2h}y - \frac{q}{2} \\ \tau_{xy} = \frac{6q}{h^3}xy^2 - \frac{3q}{2h}x \end{cases}$$

现在，边条件
$$\begin{cases}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\tau_{xy}\left(\frac{l}{2},y\right)dy=-\frac{ql}{2}\\ \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\tau_{xy}\left(-\frac{l}{2},y\right)dy=+\frac{ql}{2}\end{cases}$$
已自动满足，但边条件
$$\sigma_x\left(\pm\frac{l}{2},y\right)=0$$
不可能成立。故转化为放松边条件：
$$\begin{cases}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\sigma_x\left(\pm\frac{l}{2},y\right)dy=0\\ \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}y\,\sigma_x\left(\pm\frac{l}{2},y\right)dy=0\end{cases}$$
得 $A=\frac{3ql^2}{2h^3}-\frac{3q}{5h}$

应力场为
$$\begin{cases}\sigma_x=\frac{6q}{h^3}\left(\frac{l^2}{4}-x^2\right)y+q\frac{y}{h}\left(4\frac{y^2}{h^2}-\frac{3}{5}\right)\\ \sigma_y=-\frac{q}{2}\left(1+\frac{y}{h}\right)\left(1-\frac{2y}{h}\right)^2\\ \tau_{xy}=-\frac{6q}{h^3}x\left(\frac{h^2}{4}-y^2\right)\end{cases}$$

注：1° 上述结果中，τ_{xy} 与材力结果一样，σ_x 的第二项为修正项。

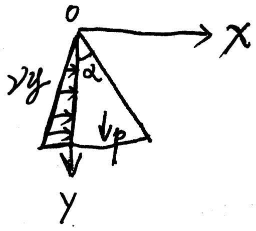
2° 解法中对修正多项式函数 $\psi(x,y)$ 的选择没有充分的理由，完全可以引入四次多项式项。

3° 上述放松边条件可以看成 Saint-Venant 边条件。在简支附近截开，新的隔离体在 x 向上的合力为零，反映为 σ_x 主矢量为零；合力矩为零，反映为 σ_x 主矩约为零。故在 Saint-Venant 问题的视角下，上述解答还是相当准确的。

4° 用此法，即基于材料力学解的应力函数通解，过程繁琐，还无法对修正函数的选择作出合理的解释，并不适合解题。简支梁问题的一般解法见⑥.

④ 三角形水坝

如图所示三角形水坝，左侧受压，水坝和水的容重分别为 ρ, ν.



用多项式解法 + 量纲分析法.

由叠加原理，应力可写为由重力产生的部分和由液压产生的部分，这两部分分别正比于 ρ, ν，又由此平面问题中的应力仅与 x, y 相关，故任一应力分量总可分解为

$$\rho N_1(\alpha, x, y) \quad 和 \quad \nu N_2(\alpha, x, y)$$

? 由量纲分析知，N_1, N_2 的量纲为[长度]。在假设应力场为多项式的前提下，可知 N_1, N_2 只能是 x, y 的一次函数.（无常数项）

所以，应力函数为三次多项式，

$$U = \frac{A}{6}x^3 + \frac{B}{2}x^2 y + \frac{C}{2}xy^2 + \frac{D}{6}y^3$$

它满足双调和方程.

应力场为：

$$\begin{cases} \sigma_x = Cx + Dy \\ \sigma_y = Ax + By - \rho y \quad (用叠加原理求解) \\ \tau_{xy} = -Bx - Cy \end{cases}$$

应力边条件为：

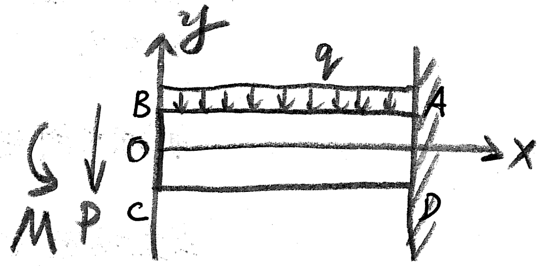
$$\begin{cases} \sigma_x(0, y) = -\nu y \\ \tau_{xy}(0, y) = 0 \\ (\cos\alpha, -\sin\alpha) \cdot (\sigma_x, \tau_{xy})^T \big|_{(x = y\tan\alpha)} = 0 \\ (\cos\alpha, -\sin\alpha) \cdot (\tau_{xy}, \sigma_y)^T \big|_{(x = y\tan\alpha)} = 0 \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} A = (\rho - 2\nu\cot^2\alpha)\cot\alpha \\ B = \nu\cot^2\alpha \\ C = 0 \\ D = -\nu \end{cases}$$

应力场为：
$$\begin{cases} \sigma_x = -\nu y \\ \sigma_y = (p\cot\alpha - 2\nu\cot^3\alpha)x + (\nu\cot^2\alpha - p)y \\ \tau_{xy} = -\nu x\cot^2\alpha \end{cases}$$

⑤悬臂梁弯曲问题的通解



矩形截面悬臂梁ABCD，受力矩M，剪力P，均布力q。梁的宽度为1，高h。

我们利用应力函数边值问题解法，求出满足上下端面边条件，左端面Saint-Venant边条件，的最简单的应力场。

应力函数边条件：

取C点为标准参考点（$\varphi|_C = \frac{\partial\varphi}{\partial x}|_C = \frac{\partial\varphi}{\partial y}|_C = 0$）

则有应力函数边条件

$$\begin{cases} \varphi(x,-\frac{h}{2}) = 0, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,-\frac{h}{2}) = 0, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y}(x,-\frac{h}{2}) = 0 \\ \varphi(x,\frac{h}{2}) = -(M+Px+\frac{1}{2}qx^2) \\ \frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,\frac{h}{2}) = -(P+qx), \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y}(x,\frac{h}{2}) = 0 \end{cases}$$

（这里$\frac{\partial\varphi}{\partial x}$自动满足）

（这里没有用到次要边条件）

应力函数：

猜 $\varphi = f_0(y) + f_1(y)x + \frac{1}{2}f_2(y)x^2$

则由 $\varphi(x,\frac{h}{2})$ 和 $\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x,\frac{h}{2})$ 得.

$$f_0(\tfrac{h}{2}) = -M, \quad f_1(\tfrac{h}{2}) = -P, \quad f_2(\tfrac{h}{2}) = -q$$

$$f_0'(\tfrac{h}{2}) = 0, \quad f_1'(\tfrac{h}{2}) = 0, \quad f_2'(\tfrac{h}{2}) = 0$$

由 $\varphi(x,-\frac{h}{2})$ 和 $\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x,-\frac{h}{2})$ 得

$$f_0(-\tfrac{h}{2}) = f_1(-\tfrac{h}{2}) = f_2(-\tfrac{h}{2}) = 0$$

$$f_0'(-\tfrac{h}{2}) = f_1'(-\tfrac{h}{2}) = f_2'(-\tfrac{h}{2}) = 0$$

由双调和方程得

$$\frac{x^2}{2}f_2^{(4)} + xf_1^{(4)} + f_0^{(4)} + 2f_2^{(2)} = 0$$

所以 $f_2^{(4)} = 0, \quad f_1^{(4)} = 0, \quad f_0^{(4)} = -2f_2^{(2)}$

积分得
$$\begin{cases} f_1 = C_1y^3 + C_2y^2 + C_3y + C_4 \\ f_2 = C_5y^3 + C_6y^2 + C_7y + C_8 \\ f_0 = -\frac{1}{10}C_5y^5 - \frac{C_6}{6}y^4 + C_9y^3 + C_{10}y^2 + C_{11}y + C_{12} \end{cases}$$

注意到
$$\begin{cases} f_1'(-\frac{h}{2}) = f_1'(\frac{h}{2}) = 0 \\ f_1(-\frac{h}{2}) = 0\,,\quad f_1(\frac{h}{2}) = -P \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_2'(-\frac{h}{2}) = f_2'(\frac{h}{2}) = 0 \\ f_2(-\frac{h}{2}) = 0\,,\quad f_2(\frac{h}{2}) = -q \end{cases}$$

可用用三次多项式插值求得

$$f_1 = -\frac{1}{2}P\left(1+3\frac{y}{h}-4\frac{y^3}{h^3}\right)$$

$$f_2 = -\frac{1}{2}q\left(1+3\frac{y}{h}-4\frac{y^3}{h^3}\right)$$

且 $f_0 = -\frac{q}{5h^3}y^5 + C_9y^3 + C_{10}y^2 + C_{11}y + C_{12}$

又由 $f_0'(-\frac{h}{2}) = f_0'(\frac{h}{2}) = 0$

$$f_0(-\frac{h}{2}) = 0\,,\quad f_0(\frac{h}{2}) = -M$$

可以令 $f_0 = -\frac{M}{2}\left(1+3\frac{y}{h}-4\frac{y^3}{h^3}\right) + \hat{f}(y)$

其中 $\hat{f}(y)$ 为首项系数为 $-\frac{q}{5h^3}$ 的五次多项式，四次项系数为 0，

则 $\hat{f}(\pm\frac{h}{2}) = \hat{f}'(\pm\frac{h}{2}) = 0$.

可猜出 $f_0 = -\frac{M}{2}\left(1+3\frac{y}{h}-4\frac{y^3}{h^3}\right) - \frac{1}{80}qhy\left(1-\frac{4y^2}{h^2}\right)^2$

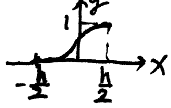
得到
$$\varphi = -\frac{1}{2}\left(M+Px+\frac{1}{2}qx^2\right)\left(1+3\frac{y}{h}-4\frac{y^3}{h^3}\right) - \frac{1}{80}qhy\left(1-\frac{4y^2}{h^2}\right)^2$$

应力场
$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{12y}{h^3}\left(M+Px+\frac{1}{2}qx^2\right) - q\left(\frac{4y^3}{h^3}-\frac{3y}{5h}\right) \\ \sigma_y = -\frac{1}{2}q\left(1+3\frac{y}{h}-4\frac{y^3}{h^3}\right) \\ \tau_{xy} = \frac{3}{2h}(P+qx)\left(1-4\frac{y^2}{h^2}\right) \end{cases}$$

注：1° 此法不适合解任何一类单独载荷问题，因为 φ 的求解太繁

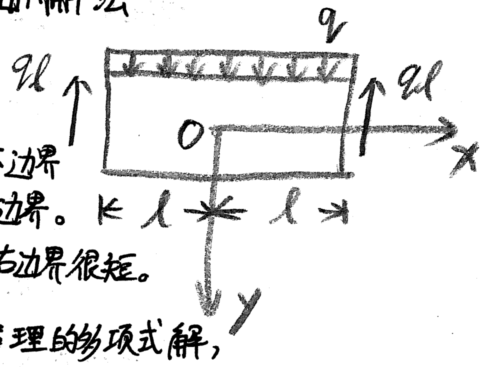
2° 此法给出的 φ 可以背下来，作为半逆法的假设直接用。

$$\varphi = C_1\left(M+Px+\frac{1}{2}qx^2\right)f(y) + C_2q\,g(y)$$

其中 $f(y)$ 满足 

，三次；$g(y) = y(y-\frac{h}{2})^2(y+\frac{h}{2})^2$，五次.

⑥ 简支梁受均布载荷作用的通用解法



如图所示简支梁，梁高h.

对于梁问题，我们称上下边界为主要边界，自由端面为次要边界。这是因为上下边界很长，左右边界很短。

我们为了求出一个最简单而又合理的多项式解，要求在主要边界上边条件严格成立，在次要边界上Saint-Venant边条件成立。

应力函数：在主要边界上，σ_y存在且几乎可以视为与x无关。(这是由载荷确定的)，故设 $\sigma_y = f_2(y)$。

应力函数有形式

$$\varphi = \frac{x^2}{2} f_2(y) + x f_1(y) + f_0(y)$$ (下标表征x次数)

这与⑤中的普通形式一样，都是x的二次函数，系数与y有关。

代入双调方程得

$$\frac{x^2}{2} f_2^{(4)} + x f_1^{(4)} + f_0^{(4)} + 2 f_2^{(2)} = 0$$

从得

$$\begin{cases} f_1^{(4)} = f_2^{(4)} = 0 \\ f_0^{(4)} = -2 f_2^{(2)} \end{cases}$$

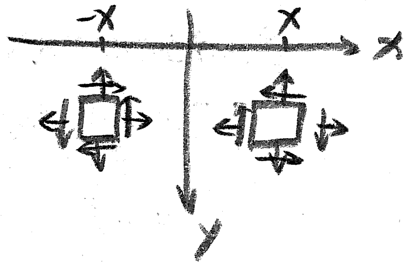
通解为

$$\begin{cases} f_2(y) = C_1 y^3 + C_2 y^2 + C_3 y + C_4 \\ f_1(y) = C_5 y^3 + C_6 y^2 + C_7 y + C_8 \\ f_0(y) = -\frac{C_1}{10} y^5 - \frac{C_2}{6} y^4 + C_9 y^3 + C_{10} y^2 + C_{11} y + C_{12} \end{cases}$$

应力场：直接转入应力场，抛去应力函数的形式。

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{x^2}{2}(6C_1 y + 2C_2) + x(6C_5 y + 2C_6) \\ \qquad -2C_1 y^3 - 2C_2 y^2 + 6C_9 y + 2C_{10} \\ \sigma_y = C_1 y^3 + C_2 y^2 + C_3 y + C_4 \\ \tau_{xy} = -x(3C_1 y^2 + 2C_2 y + C_3) - (3C_5 y^2 + 2C_6 y + C_7) \end{cases}$$

1° 由对称性知，σ_x、σ_y 是 x 的偶函数，τ_{xy} 是 x 的奇函数



从而 $C_5=C_6=C_7=0$

2° 由主要边界的应力边条件

$$\begin{cases} \sigma_y(x,\frac{h}{2})=0 \quad , \quad \sigma_y(x,-\frac{h}{2})=-q \\ \tau_{xy}(x,\pm\frac{h}{2})=0 \end{cases}$$

可得

$$\begin{cases} C_1\left(\frac{h}{2}\right)^3+C_2\left(\frac{h}{2}\right)^2+C_3\left(\frac{h}{2}\right)+C_4=0 \\ -C_1\left(\frac{h}{2}\right)^3+C_2\left(\frac{h}{2}\right)^2-C_3\left(\frac{h}{2}\right)+C_4=-q \\ 3C_1\left(\frac{h}{2}\right)^2+2C_2\left(\frac{h}{2}\right)+C_3=0 \\ 3C_1\left(\frac{h}{2}\right)-2C_2\left(\frac{h}{2}\right)+C_3=0 \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} C_1=-\frac{2q}{h^3} \\ C_2=0 \\ C_3=\frac{3q}{2h} \\ C_4=-\frac{q}{2} \end{cases}$$

现在，回代入应力场得

$$\begin{cases} \sigma_x=-\frac{6q}{h^3}x^2y+\frac{4q}{h^3}y^3+6C_9y+2C_{10} \\ \sigma_y=-\frac{2q}{h^3}y^3+\frac{3q}{2h}y-\frac{q}{2} \\ \tau_{xy}=\frac{6q}{h^3}xy^2-\frac{3q}{2h}x \end{cases}$$

3° 由次要边界的应力边条件（只用考虑一端），确定最后两个参数

$$\begin{cases} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\sigma_x(l,y)\,dy=0 \\ \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\tau_{xy}(l,y)\,dy=-ql \\ \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\sigma_x(l,y)\,y\,dy=0 \end{cases}$$

解得 $C_{10}=0$，$C_9=\frac{ql^2}{h^3}-\frac{q}{10h}$

最终的应力场形式为

$$\begin{cases}\sigma_x=\frac{6q}{h^3}(l^2-x^2)y+q\frac{y}{h}\left(4\frac{y^2}{h^2}-\frac{3}{5}\right)\\ \sigma_y=-\frac{q}{2}\left(1+\frac{y}{h}\right)\left(1-\frac{2y}{h}\right)^2\\ \tau_{xy}=-\frac{6q}{h^3}x\left(\frac{h^2}{4}-y^2\right)\end{cases}$$

不过，其实没必要化简"。

注：1° 简支梁与悬臂梁在通用解法下，差异表现为：

简支梁有很好的对称性，悬臂梁没有；

次要边条件有些区别。

而相似性则很明显，它们都需要在很长的主要边界上严格满足边界条件。