第8章　平面问题的极坐标解法

8.1 力学方程组

1° 几何方程

$$\nabla\vec{u} = \left(\vec{e}_r\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\vec{e}_\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\left(u_r\vec{e}_r + u_\theta\vec{e}_\theta\right)$$

$$= \vec{e}_r\vec{e}_r\frac{\partial u_r}{\partial r} + \vec{e}_r\vec{e}_\theta\frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r}\vec{e}_\theta\left(\frac{\partial u_r}{\partial\theta}\vec{e}_r + u_r\vec{e}_\theta\right)$$

$$+ \frac{1}{r}\vec{e}_\theta\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}\vec{e}_\theta + u_\theta(-\vec{e}_r)\right)$$

$$= \vec{e}_r\vec{e}_r\frac{\partial u_r}{\partial r} + \vec{e}_r\vec{e}_\theta\frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \vec{e}_\theta\vec{e}_r\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\theta} - \frac{1}{r}u_\theta\right)$$

$$+ \vec{e}_\theta\vec{e}_\theta\left(\frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}\right)$$

代入张量形式的几何方程 $\Gamma = \frac{1}{2}(\nabla\vec{u} + \vec{u}\nabla)$ 得

$$\begin{cases} \varepsilon_r = \dfrac{\partial u_r}{\partial r} \\ \varepsilon_\theta = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u_\theta}{\partial\theta} + \underline{\dfrac{u_r}{r}} \\ \varepsilon_{r\theta} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_\theta}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u_r}{\partial\theta} \underline{- \dfrac{u_\theta}{r}}\right) \end{cases}$$

附加项
(由坐标基导数非零引起)

2° 平衡方程

$$\nabla\cdot\vec{T} = \left(\vec{e}_r\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\vec{e}_\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\cdot\left(\sigma_r\vec{e}_r\vec{e}_r + \sigma_\theta\vec{e}_\theta\vec{e}_\theta + \tau_{r\theta}\vec{e}_r\vec{e}_\theta + \tau_{\theta r}\vec{e}_\theta\vec{e}_r\right)$$

$$= \frac{\partial\sigma_r}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial r}\vec{e}_\theta + \frac{1}{r}\vec{e}_\theta\cdot\left(\sigma_r\vec{e}_\theta\vec{e}_r + \frac{\partial\sigma_\theta}{\partial\theta}\vec{e}_\theta\vec{e}_\theta + \sigma_\theta\vec{e}_\theta(-\vec{e}_r) + \tau_{r\theta}\vec{e}_\theta\vec{e}_\theta + \frac{\partial\tau_{\theta r}}{\partial\theta}\vec{e}_\theta\vec{e}_r + \tau_{\theta r}\vec{e}_\theta\vec{e}_\theta\right)$$

$$= \vec{e}_r\left(\frac{\partial\sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r}{r} - \frac{\sigma_\theta}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\tau_{\theta r}}{\partial\theta}\right)$$

$$+ \vec{e}_\theta\left(\frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_\theta}{\partial\theta} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r}\right)$$

代入平衡方程 $\nabla\cdot\vec{T} + \vec{f} = 0$ 得

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\sigma_r}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial\theta} + \underline{\dfrac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r}} + f_r = 0 \\ \dfrac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\sigma_\theta}{\partial\theta} + \underline{\dfrac{2\tau_{r\theta}}{r}} + f_\theta = 0 \end{cases}$$

附加项
(由坐标基导数非零引起)

3° 本构关系

因弹性体是各向同性的，极坐标下的本构关系与直角坐标下的本构关系有相同的形式。

应力表示的本构关系：

$$\begin{cases} \varepsilon_r = \frac{1}{E}(\sigma_r - \nu\sigma_\theta) \\ \varepsilon_\theta = \frac{1}{E}(\sigma_\theta - \nu\sigma_r) \\ \varepsilon_{r\theta} = \frac{1+\nu}{E}\tau_{r\theta} \end{cases}$$

应变表示的本构关系：

$$\begin{cases} \sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_r + \nu\varepsilon_\theta) \\ \sigma_\theta = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_\theta + \nu\varepsilon_r) \\ \tau_{r\theta} = \frac{E}{1+\nu}\varepsilon_{r\theta} \end{cases}$$

对平面应变问题，需作代换 $E' = \frac{E}{1-\nu^2}$，$\nu' = \frac{\nu}{1-\nu}$

4° Airy 应力函数

由"应力函数"一节知，Airy应力函数与应力张量间满足关系：

$$\vec{T} = \nabla \times \vec{k}\vec{k}(-U) \times \nabla$$

对平面问题，$\nabla = \vec{e}_r\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\vec{e}_\theta\frac{\partial}{\partial\theta}$，得

$$\vec{T} = \left\{(\vec{e}_r\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\vec{e}_\theta\frac{\partial}{\partial\theta}) \times [\vec{e}_k\vec{e}_k(-U)]\right\} \times (\vec{e}_r\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\vec{e}_\theta\frac{\partial}{\partial\theta})$$

$$= \vec{e}_r\vec{e}_r\left(\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial\theta^2}\right) + \vec{e}_\theta\vec{e}_\theta\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}$$

$$+ \vec{e}_r\vec{e}_\theta\left[-\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial\theta}\right)\right] + \vec{e}_\theta\vec{e}_r\left[-\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial\theta}\right)\right]$$

得到应力分量与应力函数间关系

$$\begin{cases} \sigma_r = \underbrace{\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r}}_{} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial\theta^2} \\ \sigma_\theta = \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} \\ \tau_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial\theta}\right) \end{cases}$$

← 附加项

将应力分量代入应力协调方程(见6°)，可得应力函数 U 满足 $\nabla^2\nabla^2 U = 0$

原弹性力学问题转化为了双调和方程的边值问题。

5° 应变协调方程　$\left(\nabla \times (\Gamma \times \nabla) = -\vec{k}\vec{k} L_{33} \right) = 0$

$$\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)\varepsilon_r + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varepsilon_\theta}{\partial r}\right) - \frac{2}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\varepsilon_{r\theta}}{\partial\theta}\right) = 0$$

6° 应力协调方程.

无体力或体力为常值时，平面问题应力协调方程的直角坐标形式为

$$\nabla^2(\sigma_x + \sigma_y) = 0$$

对平面问题，$\tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$，此时 $\sigma_x + \sigma_y$ 是不变量.

所以，对于极坐标，应力协调方程为

$$\nabla^2(\sigma_r + \sigma_\theta) = 0$$

其中 $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}$

8.2 轴对称应力

如果各应力呈轴对称分布，也就是与 θ 无关，则应力函数 $U = U(r)$.

双调和方程变为 $\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)^2 U = 0$

化简得 $r^4 U^{(4)} + 2r^3 U^{(3)} - r^2 U^{(2)} + r U^{(1)} = 0$

这是一个四阶 Euler 方程。

引入变换 $r = e^t$，得 $\frac{d^4U}{dt^4} - 4\frac{d^3U}{dt^3} + 4\frac{d^2U}{dt^2} = 0$

通解为 $U = At + Bte^{2t} + Ce^{2t} + D$

作反变换 $t = \ln r$，得通解

$$U = A\ln r + Br^2\ln r + Cr^2 + D$$

由应力与应力函数的关系可得应力场

$$\begin{cases} \sigma_r = \frac{1}{r}\frac{dU}{dr} = \frac{A}{r^2} + B(1 + 2\ln r) + 2C \\ \sigma_\theta = \frac{d^2U}{dr^2} = -\frac{A}{r^2} + B(3 + 2\ln r) + 2C \\ \tau_{r\theta} = 0 \end{cases}$$

位移场：由几何方程和本构关系可得

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial u_r}{\partial r} = \frac{1}{E}\Big[(1+\nu)\frac{A}{r^2} + (1-3\nu)B + 2(1-\nu)B\ln r + 2(1-\nu)C\Big] \\
&\frac{u_r}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} = \frac{1}{E}\Big[-(1+\nu)\frac{A}{r^2} + (3-\nu)B + 2(1-\nu)B\ln r + 2(1-\nu)C\Big] \\
&\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} = 0
\end{aligned}\right.$$

积分第1式，得

$$u_r = \frac{1}{E}\Big[-(1+\nu)\frac{A}{r} + (1-3\nu)Br + 2(1-\nu)Br(\ln r - 1) + 2(1-\nu)Cr\Big] + f(\theta)$$

代入第2式，得

$$\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} = \frac{4Br}{E} - f(\theta)$$

积分得

$$u_\theta = \frac{4Br\theta}{E} - \int f(\theta)d\theta + g(r)$$

将上述 u_r, u_θ 代入第3式，得

$$\frac{1}{r}\frac{df(\theta)}{d\theta} + \frac{dg(r)}{dr} - \frac{g(r)}{r} + \frac{1}{r}\int f(\theta)d\theta = 0$$

或者 $$g(r) - r\frac{dg(r)}{dr} = \frac{df(\theta)}{d\theta} + \int f(\theta)d\theta$$

所以
$$\left\{\begin{aligned}
&g(r) - r\frac{dg(r)}{dr} = F \\
&\frac{df(\theta)}{d\theta} + \int f(\theta)d\theta = F
\end{aligned}\right.$$
（F是常数）

得到通解
$$\left\{\begin{aligned}
&g(r) = Hr + F \\
&f(\theta) = I\sin\theta + k\cos\theta
\end{aligned}\right.$$

位移场为

$$\left\{\begin{aligned}
&u_r = \frac{1}{E}\Big[-(1+\nu)\frac{A}{r} + (1-3\nu)Br + 2(1-\nu)Br(\ln r - 1) + 2(1-\nu)Cr\Big] + I\sin\theta + k\cos\theta \\
&u_\theta = \frac{4Br\theta}{E} + Hr + I\cos\theta - k\sin\theta
\end{aligned}\right.$$

注：上述位移场表示，应力轴对称、不一定有位移轴对称。

2° 如果 应力轴对称、物体几何形状轴对称、受力(或几何约束)轴对称，则位移轴对称。

在不考虑刚体位移下，上述系数满足 $B=H=I=K=0$.

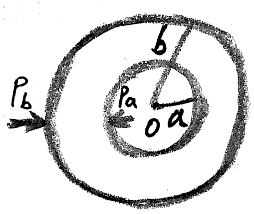
应力场：
$$\begin{cases} \sigma_r = \dfrac{A}{r^2}+2C \\ \sigma_\theta = -\dfrac{A}{r^2}+2C \\ \tau_{r\theta}=0 \end{cases}$$

位移场：
$$\begin{cases} u_r = \dfrac{1}{E}\left[-(1+\nu)\dfrac{A}{r}+2(1-\nu)Cr\right] \\ u_\theta = 0 \end{cases}$$

3° 上述位移场是针对平面应力问题的。对于平面应变问题，需作代换
$E'=\dfrac{E}{1-\nu^2}$，$\nu'=\dfrac{\nu}{1-\nu}$.

8.3 厚壁圆筒受均匀分布压力作用

厚壁圆管内外半径分别为 a, b，
筒受内压 p_a，外压 p_b.



这是一个无体力的平面应变问题，
原弹性力学边值问题变成应力函数的边值问题：

$$\begin{cases} \nabla^2\nabla^2 U = 0 & (a\le r\le b) \\ \sigma_r(a,\theta)=-p_a, & \tau_{r\theta}(a,\theta)=0 \\ \sigma_r(b,\theta)=-p_b, & \tau_{r\theta}(b,\theta)=0 \end{cases}$$

这是一个应力轴对称问题，解法同8.2.

应用8.2 注2°的结果，待定系数满足

$$\begin{cases} \dfrac{A}{a^2}+2C=-p_a \\ \dfrac{A}{b^2}+2C=-p_b \end{cases}$$
解得
$$\begin{cases} A=\dfrac{a^2b^2}{b^2-a^2}(p_b-p_a) \\ C=\dfrac{a^2p_a-b^2p_b}{2(b^2-a^2)} \end{cases}$$

得应力场
$$\begin{cases} \sigma_r=\dfrac{a^2}{b^2-a^2}\left(1-\dfrac{b^2}{r^2}\right)p_a-\dfrac{b^2}{b^2-a^2}\left(1-\dfrac{a^2}{r^2}\right)p_b \\ \sigma_\theta=\dfrac{a^2}{b^2-a^2}\left(1+\dfrac{b^2}{r^2}\right)p_a-\dfrac{b^2}{b^2-a^2}\left(1+\dfrac{a^2}{r^2}\right)p_b \\ \tau_{r\theta}=0 \end{cases}$$

注：1° 对有圆孔的无限大板在无穷远处受双向拉伸的情况，

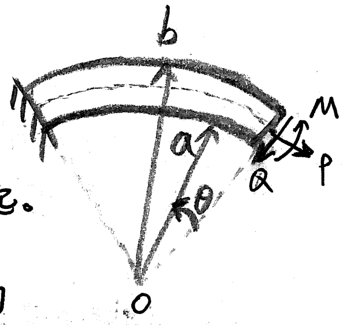
可令 $b\to\infty$，$p_a=0$，且记 $p_\infty=-p_b$.

则应力场为
$$\begin{cases}\sigma_r=\left(1-\dfrac{a^2}{r^2}\right)p_\infty\\ \sigma_\theta=\left(1+\dfrac{a^2}{r^2}\right)p_\infty\\ \tau_{r\theta}=0\end{cases}$$

定义应力集中系数 $k=\dfrac{(\sigma_\theta)_{max}}{p_\infty}$，

则 $k=2$，在 $r=a$ 达到.

8.4 曲梁



矩形截面曲梁内外半径分别为 a,b.

端部受轴力 P，剪力 Q、弯矩 M.

曲率中心 O 为坐标原点，极角从右端量起。

这是一个无体力的平面应力问题，转化为应力函数的边值问题：

$$\begin{cases}\nabla^2\nabla^2 U=0\\ \sigma_r(a,\theta)=0\ ,\quad \tau_{r\theta}(a,\theta)=0\\ \sigma_r(b,\theta)=0\ ,\quad \tau_{r\theta}(b,\theta)=0\\ \int_a^b\sigma_\theta(r,0)\,dr=P\ ,\\ \int_a^b\tau_{r\theta}(r,0)\,dr=Q\ ,\\ \int_a^b\sigma_\theta\left(r-\dfrac{a+b}{2}\right)dr=-M\end{cases}$$

应力函数：应力函数可以表示为 P,Q,M 的线性函数

$$U(r,\theta)=P\,U_1(r,\theta)+Q\,U_2(r,\theta)+M\,U_3(r,\theta)$$

其中，
$$\begin{cases}U_1=f(r)\cos\theta-\dfrac{a+b}{2}g(r)\\ U_2=-f(r)\sin\theta\\ U_3=g(r)\end{cases}$$

推导见 [王] P259.

注：1° 理解方法：
$$\begin{cases}M：\text{应力轴对称}\\ Q：M(\theta)=-Q\sin\theta \qquad \text{(回想应力函数的性质3)}\\ P：U_1(r,\theta+\frac{\pi}{2})=U_2(r,\theta)-\dfrac{a+b}{2}U_2(r,\theta)\end{cases}$$

①纯弯曲

这是一个轴对称应力问题.

应力场 $\begin{cases} \sigma_r = \dfrac{A}{r^2} + B(1+2\ln r) + 2C \\ \sigma_\theta = -\dfrac{A}{r^2} + B(3+2\ln r) + 2C \\ \tau_{r\theta} = 0 \end{cases}$

代入边界条件得

$$\begin{cases} \dfrac{A}{a^2} + 2B\ln a + B + 2C = 0 \\ \dfrac{A}{b^2} + 2B\ln b + B + 2C = 0 \\ b\left(\dfrac{A}{b^2} + 2B\ln b + B + 2C\right) - a\left(\dfrac{A}{a^2} + 2B\ln a + B + 2C\right) = 0 \\ A\ln\dfrac{b}{a} - B(b^2-a^2) - B(b^2\ln b - a^2\ln a) - C(b^2-a^2) = M \end{cases}$$

解得 $\begin{cases} A = -\dfrac{4M}{N}a^2b^2\ln\dfrac{b}{a} \\ B = -\dfrac{2M}{N}(b^2-a^2) \\ C = \dfrac{M}{N}[b^2-a^2+2(b^2\ln b - a^2\ln a)] \end{cases}$

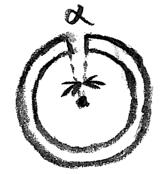
其中 $N = (b^2-a^2)^2 - 4a^2b^2\left(\ln\dfrac{b}{a}\right)^2$

应力场为

$$\begin{cases} \sigma_r = -\dfrac{4M}{N}\left(\dfrac{a^2b^2}{r^2}\ln\dfrac{b}{a} + b^2\ln\dfrac{r}{b} - a^2\ln\dfrac{r}{a}\right) \\ \sigma_\theta = -\dfrac{4M}{N}\left(-\dfrac{a^2b^2}{r^2}\ln\dfrac{b}{a} + b^2\ln\dfrac{r}{b} - a^2\ln\dfrac{r}{a} + b^2 - a^2\right) \\ \tau_{r\theta} = 0 \end{cases}$$

注: 1° 位移场也可套用8-2节结论得出, 形式较繁且没必要, 故略去。

位移场中的常数 H, I, K 由梁的约束条件确定。



楔形位错

2° 有小角度缺口的圆环初应力问题:

不完整环具有小切口, 切口圆心角为 α, 焊接成整环。

环向位移 $u_\theta = \alpha r$

由曲梁纯弯曲问题的位移场知, $\theta = 2\pi$ 的端面环向位移

$u_\theta = \dfrac{8Br\pi}{E}$, 得 $B = \dfrac{\alpha E}{8\pi}$.

由 $B = -\dfrac{2M}{N}(b^2-a^2)$ 得

预应力为力矩 $M = -\dfrac{\alpha E}{8\pi}\dfrac{(b^2-a^2)^2 - 4a^2b^2\left(\ln\frac{b}{a}\right)^2}{2(b^2-a^2)}$

② 切向力

设应力函数 $U = f(r)\sin\theta$

应力场：由双调和方程 $\nabla^2\nabla^2 U = 0$ 得

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} - \frac{1}{r^2}\right)^2 U = 0$$

先求 $\nabla^2 U$，
再求 $\nabla^2(\nabla^2 U)$，
这样不容易出错

展开得

$$f'''' + \frac{2}{r}f''' - \frac{3}{r^2}f'' + \frac{3}{r^3}f' - \frac{3}{r^4}f = 0$$

引入变换 $r = e^t$ 得

$$f^{(4)} - 4f^{(3)} + 2f^{(2)} + 4f^{(1)} - 3f = 0$$

解得 $f(t) = e^t,\ te^t,\ e^{-t},\ e^{3t}$

作反变换 $t = \ln r$ 得

$$f(r) = r,\ r\ln r,\ \frac{1}{r},\ r^3$$

通解为

$$f(r) = Ar + \frac{B}{r} + Cr^3 + Dr\ln r$$

由应力与应力函数间关系，得应力场

$$\begin{cases} \sigma_r = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial U}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} \\ \quad = \left(-\dfrac{2B}{r^3} + 2Cr + \dfrac{D}{r}\right)\sin\theta \\ \sigma_\theta = \dfrac{\partial^2 U}{\partial r^2} \\ \quad = \left(\dfrac{2B}{r^3} + 6Cr + \dfrac{D}{r}\right)\sin\theta \\ \tau_{r\theta} = -\dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial U}{\partial \theta}\right) \\ \quad = \left(\dfrac{2B}{r^3} - 2Cr - \dfrac{D}{r}\right)\cos\theta \end{cases}$$

代入应力边条件，得

$$\begin{cases} -2B + 2a^4C + a^2D = 0 \\ -2B + 2b^4C + b^2D = 0 \\ \left(\dfrac{1}{b^2} - \dfrac{1}{a^2}\right)B + (b^2 - a^2)C + \left(\ln\dfrac{b}{a}\right)D = -Q \end{cases}$$

解得
$$\begin{cases} B = -\dfrac{Q}{2k}a^2b^2 \\ C = \dfrac{Q}{2k} \\ D = -\dfrac{a^2+b^2}{k}Q \end{cases}$$
其中 $k = a^2 - b^2 + (a^2 + b^2)\ln\dfrac{b}{a}$

得应力场：

$$\begin{cases} \sigma_r = \frac{Q}{K}\left(\frac{a^2b^2}{r^3} + r - \frac{a^2+b^2}{r}\right)\sin\theta \\ \sigma_\theta = \frac{Q}{K}\left(-\frac{a^2b^2}{r^3} + 3r - \frac{a^2+b^2}{r}\right)\sin\theta \\ \tau_{r\theta} = \frac{Q}{K}\left(-\frac{a^2b^2}{r^3} - r + \frac{a^2+b^2}{r}\right)\cos\theta \end{cases}$$

位移场：

由平面应力问题的本构方程和几何方程，得

$$\begin{cases} \frac{\partial u_r}{\partial r} = \frac{\sin\theta}{E}\left[-(1+\nu)\frac{2B}{r^3} + (1-3\nu)2Cr + (1-\nu)\frac{D}{r}\right] \\ \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta} + \frac{u_r}{r} = \frac{\sin\theta}{E}\left[(1+\nu)\frac{2B}{r^3} + (3-\nu)2Cr + (1-\nu)\frac{D}{r}\right] \\ \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\theta} - \frac{u_\theta}{r} = \frac{2(1+\nu)}{E}\cos\theta\left(\frac{2B}{r^3} - 2Cr - \frac{D}{r}\right) \end{cases}$$

积分第一式，得

$$u_r = \frac{\sin\theta}{E}\left[(1+\nu)\frac{B}{r^2} + (1-3\nu)Cr^2 + (1-\nu)D\ln r\right] + f(\theta)$$

代入第二式，并积分得

$$u_\theta = -\frac{\cos\theta}{E}\left[(1+\nu)\frac{B}{r^2} + (5+\nu)Cr^2 + (1-\nu)D(1-\ln r)\right]$$
$$-\int f(\theta)d\theta + g(r)$$

将 u_r, u_θ 代入第三式得

$$f'(\theta) + \int f(\theta)d\theta + \frac{4D}{E}\cos\theta = g(r) - rg'(r)$$

所以
$$\begin{cases} f'(\theta) + \int f(\theta)d\theta + \frac{4D}{E}\cos\theta = F \\ g(r) - rg'(r) = F \end{cases}$$

通解为
$$\begin{cases} f(\theta) = -\frac{2D}{E}\theta\cos\theta + K\sin\theta + L\cos\theta \\ g(r) = Hr + F \end{cases}$$

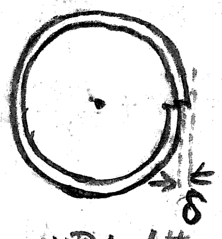
得位移场

$$u_r = -\frac{2D}{E}\theta\cos\theta + \frac{\sin\theta}{E}\left[(1+\nu)\frac{B}{r^2} + (1-3\nu)Cr^2 + (1-\nu)D\ln r\right]$$
$$+ K\sin\theta + L\cos\theta$$

$$u_\theta = \frac{2D}{E}\theta\sin\theta - \frac{\cos\theta}{E}[(1+\nu)\frac{B}{r^2} + (5+\nu)Cr^2 - (1+\nu)D - (1-\nu)D\ln r$$
$$+ K\cos\theta - L\sin\theta + Hr$$

其中 K、L、H 对应刚体位移（平移、转动）

注：1° 有径向错位的圆环初应力问题.



圆环沿径向切开，错开δ长度后焊接起来。

径向错位 $u_r\big|_0^{2\pi}=\delta$

由切向力下曲梁的位移场知

$$u_r\big|_0^{2\pi}=-\frac{4\pi D}{E}$$

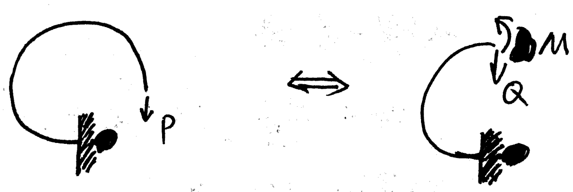
$$\therefore D=-\frac{\delta E}{4\pi}$$

由 $D=-\frac{a^2+b^2}{k}Q$ 得

预应力为切向力

$$Q=E\frac{a^2-b^2+(a^2+b^2)\ln\frac{b}{a}}{4\pi(a^2+b^2)}\delta$$

③ 法向力



$$\begin{cases}Q=P\\ M=-P\frac{a+b}{2}\end{cases}$$

如图所示，曲梁受法向力的问题可以转化为纯弯曲和切向力问题的叠加。Q, M 的取值已给出。

记纯弯曲问题中的待定系数有下标"1"，切向力问题中的待定系数有下标"2"。

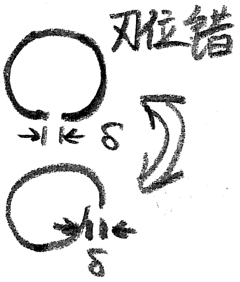
原问题的结果可由"1"、"2"的结果相加，并作代换 $\theta\to\theta+\frac{\pi}{2}$ 得出。

应力场：

$$\begin{cases}\sigma_r=\left[\frac{A_1}{r^2}+B_1(1+2\ln r)+2C_1\right]+\left[-\frac{2B_2}{r^3}+2C_2r+\frac{D_2}{r}\right]\cos\theta\\ \sigma_\theta=\left[-\frac{A_1}{r^2}+B_1(3+2\ln r)+2C_1\right]+\left[\frac{2B_2}{r^3}+6C_2r+\frac{D_2}{r}\right]\cos\theta\\ \tau_{r\theta}=-\left[\frac{2B_2}{r^3}-2C_2r-\frac{D_2}{r}\right]\sin\theta\end{cases}$$

位移场略去。

注：1° 有平行切口的圆环初应力问题



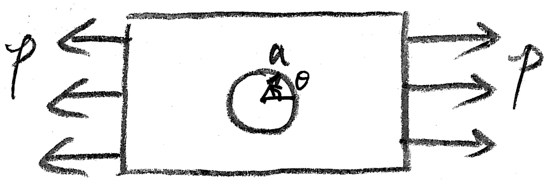
不完整圆环有小缺口，切口平行，距离为δ，焊接成整环。问题可以化为螺位错问题。

如图，原问题可以化为在另一个位置产生径向错位δ（向外）的预应力问题。预应力Q在此前已给出。

欲求整个环上的预应力分布，可由平衡关系得出。

8.5 具有圆孔的无限大平板之拉伸

一个相当大的薄板，中心有一个半径为a的小孔，在无穷远处有沿x方向的均匀拉力p.



直角坐标系下的应力边条件为

$$\begin{cases} \sigma_x(\pm\infty, y) = p \\ \sigma_y(\pm\infty, y) = 0 \\ \tau_{xy}(\pm\infty, y) = 0 \end{cases}$$

由应力分量对应关系

$$\begin{cases} \sigma_r = (\cos\theta, \sin\theta)\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} = \sigma_x\cos^2\theta + \sigma_y\sin^2\theta + \tau_{xy}\sin 2\theta \\ \sigma_\theta = (-\sin\theta, \cos\theta)\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} = \sigma_x\sin^2\theta + \sigma_y\cos^2\theta - \tau_{xy}\sin 2\theta \\ \tau_{r\theta} = (\cos\theta, \sin\theta)\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} = \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2}\sin 2\theta + \tau_{xy}\cos 2\theta \end{cases}$$

得到极坐标下的应力边条件为

$$\begin{cases} \sigma_r(+\infty, \theta) = p\cos^2\theta \\ \sigma_\theta(+\infty, \theta) = p\sin^2\theta \\ \tau_{r\theta}(+\infty, \theta) = -\frac{p}{2}\sin 2\theta \end{cases}$$

应力函数的边值问题可以写为 ~~（不提σ_θ的边条件）~~

$$\begin{cases} \nabla^2\nabla^2 U = 0 \\ \sigma_r(a, \theta) = 0, \quad \tau_{r\theta}(a, \theta) = 0 \\ \sigma_r(+\infty, \theta) = \frac{p}{2} + \frac{p}{2}\cos 2\theta, \quad \tau_{r\theta}(+\infty, \theta) = -\frac{p}{2}\sin 2\theta \end{cases}$$

将原问题分解为两个子问题：

(1)
$$\begin{cases}\nabla^2\nabla^2 U^{(1)}=0\\ \sigma_r^{(1)}(a,\theta)=0\ ,\ \tau_{r\theta}^{(1)}(a,\theta)=0\\ \sigma_r^{(1)}(+\infty,\theta)=\frac{p}{2}\ ,\ \tau_{r\theta}^{(1)}(+\infty,\theta)=0\end{cases}$$

(2)
$$\begin{cases}\nabla^2\nabla^2 U^{(2)}=0\\ \sigma_r^{(2)}(a,\theta)=0,\ \tau_{r\theta}^{(2)}(a,\theta)=0\\ \sigma_r^{(2)}(+\infty,\theta)=\frac{p}{2}\cos2\theta\ ,\ \tau_{r\theta}^{(2)}(+\infty,\theta)=\frac{-p}{2}\sin2\theta\end{cases}$$

应力场：第(1)个问题是厚壁圆筒 $b\to\infty$ 时的情况。

应力场
$$\begin{cases}\sigma_r^{(1)}=\frac{p}{2}\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right)\\ \sigma_\theta^{(1)}=\frac{p}{2}\left(1+\frac{a^2}{r^2}\right)\\ \tau_{r\theta}^{(1)}=0\end{cases}$$

对问题(2)，由应力边值的形式，可设 $U=f(r)\cos2\theta$

代入双调和方程，展开得

$$f''''+\frac{2}{r}f'''-\frac{9}{r^2}f''+\frac{9}{r^3}f'=0$$

通解为 $f(r)=Ar^2+Br^{-2}+Cr^4+D$

应力场为
$$\begin{cases}\sigma_r^{(2)}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial\theta^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r}\\ \qquad=-(2A+6Br^{-4}+4Dr^{-2})\cos2\theta\\ \sigma_\theta^{(2)}=\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}\\ \qquad=(2A+6Br^{-4}+12Cr^2)\cos2\theta\\ \tau_{r\theta}^{(2)}=-\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial\theta}\right)\\ \qquad=(2A-6Br^{-4}+6Cr^2-2Dr^{-2})\sin2\theta\end{cases}$$

由应力边条件，解得

$$A=-\frac{p}{4}\ ,\ B=-\frac{p}{4}a^4$$

$$C=0\ ,\ D=\frac{p}{2}a^2$$

得应力场
$$\begin{cases}\sigma_r^{(2)}=\frac{p}{2}\left[1+3\left(\frac{a}{r}\right)^4-4\left(\frac{a}{r}\right)^2\right]\cos2\theta\\ \sigma_\theta^{(2)}=-\frac{p}{2}\left[1+3\left(\frac{a}{r}\right)^4\right]\cos2\theta\\ \tau_{r\theta}^{(2)}=-\frac{p}{2}\left[1-3\left(\frac{a}{r}\right)^4+2\left(\frac{a}{r}\right)^2\right]\sin2\theta\end{cases}$$

原问题的应力场为

$$\begin{cases} \sigma_r = \frac{p}{2}\left[1-\left(\frac{a}{r}\right)^2\right] + \frac{p}{2}\left[1+3\left(\frac{a}{r}\right)^4-4\left(\frac{a}{r}\right)^2\right]\cos 2\theta \\ \sigma_\theta = \frac{p}{2}\left[1+\left(\frac{a}{r}\right)^2\right] - \frac{p}{2}\left[1+3\left(\frac{a}{r}\right)^4\right]\cos 2\theta \\ \tau_{r\theta} = -\frac{p}{2}\left[1-3\left(\frac{a}{r}\right)^4+2\left(\frac{a}{r}\right)^2\right]\sin 2\theta \end{cases}$$

（σ_θ 的边条件自动成立）

在边界 $r=a$ 上，环向应力

$$\sigma_\theta = p(1-2\cos 2\theta)$$

最大环向应力

$$(\sigma_\theta)_{max} = \sigma_\theta\left(a, \pm\frac{\pi}{2}\right) = 3p$$

应力集中系数

$$k = \frac{(\sigma_\theta)_{max}}{p} = 3$$

注：1° 在 x 向拉伸，y 向压缩时，$\sigma_\theta = p(1-2\cos 2\theta) - p(1+2\cos 2\theta)$

$$= -4p\cos 2\theta$$

$|(\sigma_\theta)_{max}| = 4p$　（在 $\theta = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, -\frac{\pi}{2}$ 均可达到）

应力集中系数 $k=4$

2° 在 x 向、y 向均拉伸时，$\sigma_\theta = p(1-2\cos 2\theta) + p(1+2\cos 2\theta)$

$$= 2p$$

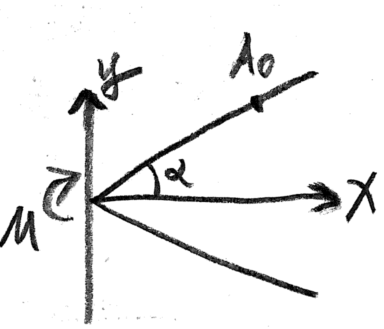
应力集中系数 $k=2$.

此问题也可用厚壁圆筒解答。

8.6 楔体

① 集中力偶

楔的张角为 2α，坐标原点为其顶点，x 轴为楔的对称轴。集中力偶 M 作用在顶点。



应力函数：在边界 $\theta=\alpha$ 上任取一点 A_0，作为参考点，令 $\varphi|_{A_0} = \nabla\varphi|_{A_0} = 0$.

则应力函数函数边条件为

$$\begin{cases} \varphi(r,\alpha) = 0, & \frac{\partial\varphi}{\partial r}(r,\alpha) = 0, & \frac{\partial\varphi}{\partial\theta}(r,\alpha) = 0 \\ \varphi(r,-\alpha) = -M, & \frac{\partial\varphi}{\partial r}(r,-\alpha) = 0, & \frac{\partial\varphi}{\partial\theta}(r,-\alpha) = 0 \end{cases}$$

∵在边界上，应力函数与 r 无关．

∴设 $\varphi=\varphi(\theta)$

双调和函数化为

$$\varphi''''+4\varphi''=0$$

通解为 $\varphi(\theta)=A+B\theta+C\cos2\theta+D\sin2\theta$

代入应力函数边条件

$$\begin{cases} A+B\alpha+C\cos2\alpha+D\sin2\alpha=0 \\ A-B\alpha+C\cos2\alpha-D\sin2\alpha=-M \\ B-2C\sin2\alpha+2D\cos2\alpha=0 \\ B+2C\sin2\alpha+2D\cos2\alpha=0 \end{cases}$$

解得 $A=-\dfrac{M}{2}$，$B=\dfrac{-M\cos2\alpha}{\sin2\alpha-2\alpha\cos2\alpha}$

$C=0$，$D=\dfrac{M}{2(\sin2\alpha-2\alpha\cos2\alpha)}$

应力函数为

$$\varphi(\theta)=-\frac{M}{2}-\frac{M\cos2\alpha}{\sin2\alpha-2\alpha\cos2\alpha}\theta+\frac{M\sin2\theta}{2(\sin2\alpha-2\alpha\cos2\alpha)}$$

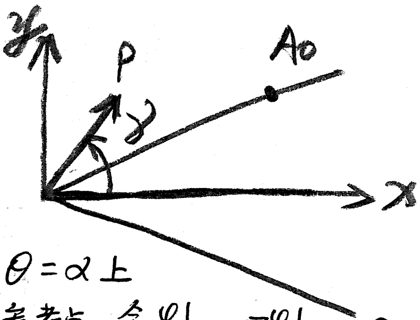
应力场：

$$\begin{cases} \sigma_r=\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\varphi}{\partial r} \\ \quad=\dfrac{-2M\sin2\theta}{r^2(\sin2\alpha-2\alpha\cos2\alpha)} \\ \sigma_\theta=\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}=0 \\ \tau_{r\theta}=-\dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right) \\ \quad=\dfrac{M(\cos2\theta-\cos2\alpha)}{r^2(\sin2\alpha-2\alpha\cos2\alpha)} \end{cases}$$

注：用应力函数边值问题的解法可以比较方便地猜出应力函数的形式。

② 集中力

同样一个楔，集中力 P 作用在顶点，角度为 γ。



应力函数：在边界 $\theta=\alpha$ 上

任取一点 A_0，作为参考点，令 $\varphi|_{A_0}=\nabla\varphi|_{A_0}=0$.

则应力函数边条件为

$$\begin{cases} \varphi(r,\alpha)=0, \quad \dfrac{\partial\varphi}{\partial r}(r,\alpha)=0, \quad \dfrac{\partial\varphi}{\partial\theta}(r,\alpha)=0 \\ \varphi(r,-\alpha)=-Pr\sin(\alpha+\gamma) \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial r}(r,-\alpha)=-P\sin(\alpha+\gamma) \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\varphi}{\partial\theta}(r,-\alpha)=P\cos(\alpha+\gamma) \end{cases}$$

$$\left[\text{即 } \frac{\partial\varphi}{\partial\theta}(r,-\alpha)=Pr\cos(\alpha+\gamma)\right]$$

由于边界上 φ, $\dfrac{\partial\varphi}{\partial\theta}$ 与 r 成正比，$\dfrac{\partial\varphi}{\partial r}$ 与 r 无关，设

$$\varphi=rf(\theta)$$

双调和方程化为

$$f''''+2f''+f=0$$

通解为 $f(\theta)=A\cos\theta+B\sin\theta+C\theta\cos\theta+D\theta\sin\theta$

（其中 $\varphi=Ar\cos\theta$ 与 $\varphi=Br\sin\theta$ 对应 $\varphi=x$ 与 $\varphi=y$，不产生应力）

代入应力函数边条件得

$$\begin{cases} A\cos\alpha+B\sin\alpha+C\alpha\cos\alpha+D\alpha\sin\alpha=0 \\ -A\sin\alpha+B\cos\alpha+C(\cos\alpha-\alpha\sin\alpha)+D(\sin\alpha+\alpha\cos\alpha)=0 \\ A\cos\alpha-B\sin\alpha-C\alpha\cos\alpha+D\alpha\sin\alpha=-P\sin(\alpha+\gamma) \\ A\sin\alpha+B\cos\alpha+C(\cos\alpha-\alpha\sin\alpha)-D(\sin\alpha+\alpha\cos\alpha)=P\cos(\alpha+\gamma) \end{cases}$$

解得 $C=\dfrac{P\sin\gamma}{2\alpha-\sin2\alpha}$，$D=-\dfrac{P\cos\gamma}{2\alpha+\sin2\alpha}$

A、B 不影响应力，所以不用求。

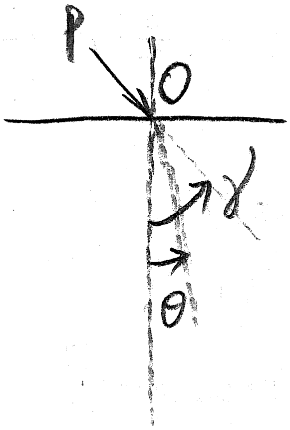
应力函数为（忽略了含 A、B 的项，边条件不再成立，但不影响应力）

$$\varphi=Pr\theta\left(\frac{\sin\gamma\cos\theta}{2\alpha-\sin2\alpha}-\frac{\cos\gamma\sin\theta}{2\alpha+\sin2\alpha}\right)$$

应力场：

$$\begin{cases} \sigma_r = \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\varphi}{\partial r} \\ \quad = -\dfrac{2P}{r}\left(\dfrac{\sin\gamma\sin\theta}{2\alpha-\sin2\alpha} + \dfrac{\cos\gamma\cos\theta}{2\alpha+\sin2\alpha}\right) \\ \sigma_\theta = \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} = 0 \\ \tau_{r\theta} = -\dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right) = 0 \end{cases}$$

注：1° Boussinesq问题



集中力作用在半平面边界上的问题称为Boussinesq问题。

α取$\frac{\pi}{2}$时的楔体受集中力作用的问题与Boussinesq问题相同。

应力场：

$$\begin{cases} \sigma_r = -\dfrac{2P}{\pi r}(\sin\gamma\sin\theta + \cos\gamma\cos\theta) \\ \sigma_\theta = \tau_{r\theta} = 0 \end{cases}$$

垂直于半平面边界时，

$$\begin{cases} \sigma_r = -\dfrac{2P\cos\theta}{\pi r} \\ \sigma_\theta = \tau_{r\theta} = 0 \end{cases}$$

平行于半平面边界时，

$$\begin{cases} \sigma_r = -\dfrac{2P\sin\theta}{\pi r} \\ \sigma_\theta = \tau_{r\theta} = 0 \end{cases}$$