No.

Date

二次方程的进一步分析

对二次方程

$$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey=f$$

有：

① 二次方程的标准式为 $ax^2+bxy+cy^2=f$，对应图像为中心对应图形.

proof: if (x,y) on the graph, then $(-x,-y)$ is also on it:

$$a(-x)^2+b(-x)(-y)+c(-y)^2$$

$$=ax^2+bxy+cy^2=F$$

② 一次项为平移项，a,b,c 唯一确定二次图形的形状（不包括大小）.

proof: move (h,k), we get

$$a(x-h)^2+b(x-h)(y-k)+c(y-k)^2=f$$

then, $ax^2+bxy+cy^2+(-2ah-bk)x+(-bh-2ck)y = f-(ah^2+bhk+ck^2)$

make $\begin{cases} d=-2ah-bk \\ e=-bh-2ck \end{cases}$

then

$$\begin{pmatrix}h\\k\end{pmatrix}=\frac{1}{b^2-4ac}\begin{pmatrix}-2c & b\\ b & -2a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}d\\e\end{pmatrix}$$

③ 对二次方程，旋转前后 $a+c=a'+c'$。当旋转角满足 $\tan 2\theta=\frac{b}{a-c}$ 时，方程交叉项 $b'=0$，此时二次图形对称轴平行于坐标轴（$a'c'=0$ 时除外）。

proof: 逆时针旋转 θ 角，有

将坐标系

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}$$

代入 $ax^2+bxy+cy^2=f$ 得

$$(a\cos^2\theta+b\cos\theta\sin\theta+c\sin^2\theta)u^2+[b\cos2\theta-(a-c)\sin2\theta]uv+$$
$$(a\sin^2\theta-b\sin\theta\cos\theta+c\cos^2\theta)v^2=f$$

No.

Date . .

$\therefore \quad a' = a\cos^2\theta + b\cos\theta\sin\theta + c\sin^2\theta$

$b' = b\cos 2\theta - (a-c)\sin 2\theta$

$c' = a\sin^2\theta - b\sin\theta\cos\theta + c\cos^2\theta$.

$\therefore \quad a'+c' = a+c$,

令 $b'=0$ 有, $\tan 2\theta = \dfrac{b}{a-c}$

~~④ 二次图形 对称轴~~

④ 对二次图形, x轴到其对称轴的到角为

$$\theta = \frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{b}{a-c}, \ (+\tfrac{k}{2}\pi)$$ (抛物线会有特殊对待)