定性理论

定理 8.4　李雅普诺夫的稳定性判据：

1) 若 $V(x,y)$ 定正，且 V 关于微分方程 $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x,y) \\ \frac{dy}{dt} = g(x,y) \end{cases}$

对 t 的全导数 $\left.\frac{dV}{dt}\right|_{方程} = \frac{\partial V}{\partial x} f(x,y) + \frac{\partial V}{\partial y} g(x,y)$ 定负，

则微分方程的零解是渐近稳定的。

2) 若 $V(x,y)$ 定正，且 $\left.\frac{dV}{dt}\right|_{方程}$ 常负，则方程的零解稳定。

3) 若 $V(x,y)$ 定正，且 $\left.\frac{dV}{dt}\right|_{方程}$ 定正，则方程的零解不稳定。

定理 8.6　已知非线性系统 $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax+by+\varphi(x,y) \\ \frac{dy}{dt} = cx+dy+\psi(x,y) \end{cases}$ 的线性化系统为

$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax+by \\ \frac{dy}{dt} = cx+dy \end{cases}$，且线性化系统以 $(0,0)$ 为初等奇点（无零特征根），

(1) 若条件A成立 且 $(0,0)$ 是焦点

(2) 若条件A、B成立 且 $(0,0)$ 是鞍点或两向结点

(3) 若条件 A^* 成立 且 $(0,0)$ 是单向结点

(4) 若条件 A^*、B成立 且 $(0,0)$ 是星形结点

则原系统与其线性化系统在奇点 $(0,0)$ 附近有相同的定性结构。

条件A：$\varphi(x,y)$、$\psi(x,y) = o(r)$，当 $r \to 0$.

条件 A^*：$\varphi(x,y)$、$\psi(x,y) = o(r^{1+\varepsilon})$，当 $r \to 0$，$(\varepsilon > 0)$

条件B：$\varphi(x,y)$ 和 $\psi(x,y)$ 在原点的一个小邻域内对 x 和 y 连续可微。