No.
Date

刚体运动学

①(角速度) 参考系 i 中，坐标基 i 与 e 的变换关系：

$$e = iQ,$$

其中 $Q_{ij} = \vec{i}_i \cdot \vec{e}_j$.

则 $\dot{e} = i\dot{Q} = eQ^T\dot{Q}$，

其中 $Q^T\dot{Q}$ 是一个反对称矩阵，称为角速度矩阵。

角速度矩阵 $Q^T\dot{Q} = \begin{bmatrix} 0 & -w_3 & w_2 \\ w_3 & 0 & -w_1 \\ -w_2 & w_1 & 0 \end{bmatrix}$

角速度向量 $\vec{w} \equiv e \cdot [w_1, w_2, w_3]^T$

关于角速度向量的讨论：

向量：1° 有大小，有方向的量

2° 满足平行四边形加法法则

3° 用其表达的物理规律具有坐标变换不变性。

伪向量(赝向量，轴向量)：仅满足条件1°,2°的量

(例如：角速度向量，动量矩向量，力矩向量)

极向量：满足条件1°,2°,3°的量 (例如：速度向量，加速度向量)

结论：在只使用右手系的限制下，伪向量可以视为极向量。

结论：1° 有限角位移不是向量；

2° 无穷小位移或角速度是向量(伪向量)。

角速度合成定理：基 e 相对基 i 的角速度为 $\vec{w}$，基 i 相对基 i' 的角速度为 $\vec{\Omega}$，

基 e 相对基 i' 的角速度为 $\vec{w}'$。

则 $\vec{w}' = \vec{w} + \vec{\Omega}$

(证明：$e = iP$， $\dot{e} = eP^T\dot{P}$

$i = i'Q$， $\dot{i} = iQ^T\dot{Q}$

$e = i'QP$， $\dot{e} = i'\dot{Q}P + i'Q\dot{P}$

$= iQ^T\dot{Q}P + eP^T\dot{P}$

$\therefore \dot{e}\xi^e = iQ^T\dot{Q}P\xi^e + eP^T\dot{P}\xi^e$

$= iQ^T\dot{Q}\xi^i + eP^T\dot{P}\xi^e$

$\therefore \vec{v} = \vec{w}' \times \vec{r} = (\vec{w} + \vec{\Omega}) \times \vec{r}$)

No.

Date

② (运动关系) 在参考系 τ 中，与刚体固连的坐标系为 e.

1° 定点运动： $\vec{r} = e\xi^e$ ，其中 $\xi^e = [\xi, \eta, \zeta]^T$，为刚体上点在基 e 下的坐标。

$\vec{v} = \dot{e}\xi^e = eQ^T\dot{Q}\xi^e = \vec{\omega}\times\vec{r}$

$\vec{a} = \vec{\varepsilon}\times\vec{r} + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$，其中 $\vec{\varepsilon} = \dot{\vec{\omega}}$

2° 平面运动： $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}'$

$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{\omega}\times\vec{r}'$

$\vec{a} = \vec{a}_0 + \vec{\varepsilon}\times\vec{r}' + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}')$

其中 $\vec{a}_0$ —— 牵连加速度，$\vec{\varepsilon}\times\vec{r}' + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}')$ —— 相对加速度.

结论： $\vec{\omega}^* = \vec{\omega}$

即刚体相对于任意一个平动参考系的角速度都是相同的。

3° 一般运动： $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}'$

$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{\omega}\times\vec{r}'$

$\vec{a} = \vec{a}_0 + \vec{\varepsilon}\times\vec{r}' + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}')$

4° 复合运动：(此时 e 不再是固连坐标系)

绝对速度与相对速度间关系：

$\frac{d_1}{dt}\vec{r} = \frac{d_2}{dt}\vec{r} + \vec{\omega}_{21}\times\vec{r}$

其中 $\vec{\omega}_{21}$ 为参考系 2 相对参考系 1 的角速度。

绝对速度 $\vec{v} = \frac{d_1}{dt}\vec{r}$ ，相对速度 $\vec{v}_r = \frac{d_2}{dt}\vec{r}$

上式可简化为：

$\vec{v} = \vec{v}_r + \vec{\omega}\times\vec{r}$

速度合成公式：

$\vec{v} = \vec{v}_r + \vec{v}_e$

其中 $\vec{v}_r$ —— 相对速度，$\vec{v}_e = \vec{v}_0 + \vec{\omega}\times\vec{r}'$ —— 牵连速度.

加速度： $\vec{a} = (\vec{a}_r + \vec{\omega}\times\vec{v}_r) + (\vec{a}_0 + \vec{\varepsilon}\times\vec{r}' + \vec{\omega}\times\vec{v}_r + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}'))$

$= \vec{a}_r + (2\vec{\omega}\times\vec{v}_r) + (\vec{a}_0 + \vec{\varepsilon}\times\vec{r}' + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}'))$

$= \vec{a}_r + \vec{a}_c + \vec{a}_e$

其中 $\vec{a}_r$ —— 相对加速度，

$\vec{a}_c = 2\vec{\omega}\times\vec{v}_r$ —— 科氏加速度，

$\vec{a}_e = \vec{a}_0 + \vec{\varepsilon}\times\vec{r}' + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}')$ —— 牵连加速度。

刚体运动学

③(欧拉角)　我们引入三个欧拉角来表示两个坐标系间的相对位置。

(ψ,θ,φ) 分别为进动角、章动角和自转角。

(x,y,z) 惯性坐标架
$\downarrow \psi$
(n,m,z)
$\downarrow \theta$
(n,s,ζ) 章动坐标架
$\downarrow \varphi$
(ξ,η,ζ) 固连坐标架

中间变换矩阵：

$$(n,m,z)=(x,y,z)\cdot P_{进动}$$
$$(n,s,\zeta)=(n,m,z)\cdot P_{章动}$$
$$(\xi,\eta,\zeta)=(n,s,\zeta)\cdot P_{自转}$$

其中
$$P_{进动}=\begin{pmatrix}\cos\psi & \sin\psi & 0\\ -\sin\psi & \cos\psi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$
$$P_{章动}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & \sin\theta\\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$$
$$P_{自转}=\begin{pmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi & 0\\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

变换矩阵：

$$(\xi,\eta,\zeta)=(x,y,z)\,P$$

其中
$$P=P_{进动}\cdot P_{章动}\cdot P_{自转}$$
$$=\begin{pmatrix}\cos\varphi\cos\psi-\sin\varphi\cos\theta\sin\psi, & -\sin\varphi\cos\psi-\cos\varphi\cos\theta\sin\psi, & \sin\theta\sin\psi\\ \cos\varphi\sin\psi+\sin\varphi\cos\theta\cos\psi, & -\sin\varphi\sin\psi+\cos\varphi\cos\theta\cos\psi, & -\sin\theta\cos\psi\\ \sin\varphi\sin\theta, & \cos\varphi\sin\theta, & \cos\theta\end{pmatrix}$$

角速度：

$$\vec{\omega}=\dot{\psi}\,\vec{z}^{\,0}+\dot{\theta}\,\vec{n}^{\,0}+\dot{\varphi}\,\vec{\zeta}^{\,0}$$ （角速度合成定理）

其中
$$\vec{z}^{\,0}=(\vec{\xi}^{\,0}\sin\varphi+\vec{\eta}^{\,0}\cos\varphi)\sin\theta+\vec{\zeta}^{\,0}\cos\theta$$
$$\vec{n}^{\,0}=\vec{\xi}^{\,0}\cos\varphi-\vec{\eta}^{\,0}\sin\varphi$$

故
$$\vec{\omega}=[\vec{\xi}^{\,0},\vec{\eta}^{\,0},\vec{\zeta}^{\,0}]\begin{bmatrix}\dot{\psi}\sin\varphi\sin\theta+\dot{\theta}\cos\varphi\\ \dot{\psi}\cos\varphi\sin\theta-\dot{\theta}\sin\varphi\\ \dot{\varphi}+\dot{\psi}\cos\theta\end{bmatrix}$$

No.

Date

④（几何方法） 定瞬心线（空间极迹）：瞬心在固定系中的轨迹。

动瞬心线（本体极迹）：瞬心在固连系中的轨迹。

结论：把定瞬心线和动瞬心线分别想像成某个刚体的边缘，由于它们在接触点处的相对速度为0，则刚体的运动好像是动瞬心线刚体在定瞬心线刚体上作纯滚动。

$\therefore \vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_c + \vec{a}_e$

其中 $\vec{a}_r$ —— 相对加速度，

$\vec{a}_c = 2\vec{\omega}\times\vec{v}_r$ —— 科氏加速度

$\vec{a}_e = \vec{a}_0 + \vec{\varepsilon}\times\vec{r}' + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}')$ —— 牵连加速度。

刚体动力学

二阶张量 $T = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix}$

并矢 $\vec{u}\vec{v}$

两个坐标系之间的坐标变换为一个二阶张量

张量坐标变换：已知 $e' = eP$（e、e'为列向量），则

$S = PS'P^T$ （$\vec{a}\vec{b} = (P\vec{a}')(\vec{b}'P^T) = PS'P^T$）

定理：如果一个量具有将一个矢量变为另外一个矢量的能力，那么，这个量一定是一个二阶张量

关系式：$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ipq} = \delta_{jp}\delta_{kq} - \delta_{jq}\delta_{kp}$

刚体定点运动的动量矩：

$$\vec{G} = [\Sigma(mr^2)I - \Sigma m(\vec{r}\vec{r}^T)]\vec{\omega} = J\vec{\omega}$$

建立固联坐标系 e，有 $\vec{r} = e\cdot[\xi,\eta,\zeta]^T$，

$\vec{\omega} = e\cdot[\omega_\xi,\omega_\eta,\omega_\zeta]^T$

则 $J = \begin{bmatrix} \Sigma[m(\eta^2+\zeta^2)], & -\Sigma(m\xi\eta), & -\Sigma(m\xi\zeta) \\ -\Sigma(m\xi\eta), & \Sigma[m(\xi^2+\zeta^2)], & -\Sigma(m\eta\zeta) \\ -\Sigma(m\xi\zeta), & -\Sigma(m\eta\zeta), & \Sigma[m(\xi^2+\eta^2)] \end{bmatrix}$

$J_\xi = \Sigma[m(\eta^2+\zeta^2)]$ ， $J_{\xi\eta} = \Sigma(m\xi\eta)$

刚体定点运动的动能：

$$T = \frac{1}{2}\vec{\omega}\cdot J\cdot\vec{\omega}$$

No.

Date · ·

平行轴定理：已知关于质心C的某一坐标系下的惯量矩阵，那么，在质心坐标系中某点$P(a,b,c)$处建立的与质心相平行的坐标系的惯量矩阵为

$$J^{(P)} = J^{(C)} + M\begin{bmatrix} b^2+c^2 & -ab & -ac \\ -ab & a^2+c^2 & -bc \\ -ac & -bc & a^2+b^2 \end{bmatrix}$$

对任意轴的转动惯量：

由 $J' = PJP^T$，$(e' = e P^T)$

其中 $e_1' = e \cdot [\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma]^T$

得 $J_x = J_\xi \cos^2\alpha + J_\eta \cos^2\beta + J_\zeta \cos^2\gamma - 2J_{\xi\eta}\cos\alpha\cos\beta - 2J_{\eta\zeta}\cos\beta\cos\gamma - 2J_{\zeta\xi}\cos\gamma\cos\alpha$.

惯量椭球：过刚体上一点O的任意轴OA的转动惯量为J'，在OA上取一点$M(\xi,\eta,\zeta)$使$|\overrightarrow{OM}| = \frac{k}{\sqrt{J'}}$ $(k\in R)$，则M点的轨迹为一椭球面，即

$$J_\xi \xi^2 + J_\eta \eta^2 + J_\zeta \zeta^2 - 2J_{\xi\eta}\xi\eta - 2J_{\eta\zeta}\eta\zeta - 2J_{\zeta\xi}\zeta\xi = k^2$$

（OM的方向余弦：$\cos\alpha = \frac{\xi}{R}$，$\cos\beta = \frac{\eta}{R}$，$\cos\gamma = \frac{\zeta}{R}$，

其中 $R = \sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}$

则 $J' = J_\xi \frac{\xi^2}{R^2} + J_\eta \frac{\eta^2}{R^2} + J_\zeta \frac{\zeta^2}{R^2} - 2J_{\xi\eta}\frac{\xi\eta}{R^2} - 2J_{\eta\zeta}\frac{\eta\zeta}{R^2} - 2J_{\zeta\xi}\frac{\zeta\xi}{R^2}$）

惯量主轴：通过恰当的坐标变换，总可以找到椭球面的三个极轴方向，使得椭球方程变换为 $J_1x^2 + J_2y^2 + J_3z^2 = k^2$。

通过寻找惯量矩阵的特征值和特征方向，可以求得三个主方向。

主轴表示的刚体动量矩和动能：

$$\vec{G} = e\cdot[J_1\omega_1, J_2\omega_2, J_3\omega_3]^T$$

$$T = \frac{1}{2}(J_1\omega_1^2 + J_2\omega_2^2 + J_3\omega_3^2)$$

刚体定点运动的动力学方程

动量矩定理 $\vec{L} = \frac{\tilde{d}}{dt}\vec{G} + \vec{\omega}\times\vec{G}$

$\vec{\omega}$：固连系角速度

欧拉方程：

$$\begin{cases} J_1\dot{\omega}_1 + (J_3 - J_2)\omega_2\omega_3 = L_1 \\ J_2\dot{\omega}_2 + (J_1 - J_3)\omega_3\omega_1 = L_2 \\ J_3\dot{\omega}_3 + (J_2 - J_1)\omega_1\omega_2 = L_3 \end{cases}$$

1° 不受外力矩（欧拉情况）

$$\begin{cases} J_1\dot{\omega}_1 + (J_3 - J_2)\omega_2\omega_3 = 0 \\ J_2\dot{\omega}_2 + (J_1 - J_3)\omega_3\omega_1 = 0 \\ J_3\dot{\omega}_3 + (J_2 - J_1)\omega_1\omega_2 = 0 \end{cases}$$

两个首次积分

$J_1\omega_1^2 + J_2\omega_2^2 + J_3\omega_3^2 =$ 常量　（机械能守恒）$= 2T$

$J_1^2\omega_1^2 + J_2^2\omega_2^2 + J_3^2\omega_3^2 =$ 常量　（动量矩大小守恒）$= G^2$

几何方法（潘索方法）：

① 惯量椭球方程：$J_1\xi^2 + J_2\eta^2 + J_3\zeta^2 =$ 常量，令常量 $= 2T$.

由上可知，$\vec{\omega}$ 端点在惯量椭球表面上。

以中心为固定点 O，在点 $S = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ 处的切平面方程为

$$J_1\omega_1\xi + J_2\omega_2\eta + J_3\omega_3\zeta = 2T$$

则 O 点到切平面距离为 $\overline{OQ} = \frac{2T}{\sqrt{(J_1\omega_1)^2 + (J_2\omega_2)^2 + (J_3\omega_3)^2}} = \frac{2T}{G} =$ 常量.

又 $\overrightarrow{OQ}$ 的方向为 $(J_1\omega_1, J_2\omega_2, J_3\omega_3)$，是 $\vec{G}$ 的方向，而 $\vec{G}$ 在惯性系内守恒.

∴ $\overrightarrow{OQ} = \frac{2T}{G^2}\vec{G} =$ 常量

∴ 切平面在~~惯性系~~参考系内是不变的，称为不变平面。

结论：不受外力矩的定点刚体，在运动过程中惯量椭球面总是和不变平面 P 相切，由固定点到切点的向量代表角速度向量。

② 本体极迹是椭球面 $J_1\xi^2 + J_2\eta^2 + J_3\zeta^2 = 2T$ 和

曲面 $J_1^2\xi^2 + J_2^2\eta^2 + J_3^2\zeta^2 = G^2$

的交线。

结论：刚体绕最大或最小惯量主轴的转动是稳定的。

No.

Date

2° 刚体绕固定轴作匀速转动

θ = 常量　φ = 常量　$\dot{\psi}$ = 常量

$$\begin{cases} \omega_1 = \omega \sin\theta \sin\varphi \\ \omega_2 = \omega \sin\theta \cos\varphi \\ \omega_3 = \omega \cos\theta \end{cases}$$

$\therefore \dot{\omega}_1 = \dot{\omega}_2 = \dot{\omega}_3 = 0$

$\therefore L_1 = (J_3 - J_2)\,\omega^2 \sin\theta \cos\theta \cos\varphi$

$L_2 = (J_1 - J_3)\,\omega^2 \sin\theta \cos\theta \sin\varphi$

$L_3 = (J_2 - J_1)\,\omega^2 \sin^2\theta \sin\varphi \cos\varphi$

3° 莱沙尔坐标系

当 $J_1 = J_2$ 时，记 $Ons\zeta$ $[O; \vec{n}^0, \vec{s}^0, \vec{e}_3]$ 为莱沙尔坐标架

莱沙尔坐标架相对惯性系的角速度

$$\vec{\Omega} = \dot{\psi}\vec{k} + \dot{\theta}\vec{n}^0$$

坐标 $\vec{\Omega} = [n^0, s^0, e_3][\dot{\theta}, \dot{\psi}\sin\theta, \dot{\psi}\cos\theta]^T$

刚体角速度 $\vec{\omega} = [n^0, s^0, e_3][\dot{\theta}, \dot{\psi}\sin\theta, \dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi}]^T$

动量矩 $\vec{G} = [n^0, s^0, e_3][J_1\dot{\theta}, J_1\dot{\psi}\sin\theta, J_3(\dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi})]^T$

$$\vec{\Omega} \times \vec{G} = [n^0, s^0, e_3] \begin{bmatrix} J_3\dot{\psi}\sin\theta(\dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi}) - J_1\dot{\psi}^2 \sin\theta\cos\theta \\ J_1\dot{\theta}\dot{\psi}\cos\theta - J_3\dot{\theta}(\dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi}) \\ 0 \end{bmatrix}$$

动力学方程

$$\begin{cases} J_1\ddot{\theta} - J_1\dot{\psi}^2 \sin\theta\cos\theta + J_3\dot{\psi}\sin\theta(\dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi}) = L_n & (3.1) \\ J_1\ddot{\psi}\sin\theta + 2J_1\dot{\theta}\dot{\psi}\cos\theta - J_3\dot{\theta}(\dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi}) = L_s & (3.2) \\ J_3 \frac{d}{dt}(\dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi}) = L_\zeta & (3.3) \end{cases}$$

4° 重力作用下轴对称刚体的定点运动（拉格朗日情况）

$\vec{L} = [n^0, s^0, e_3][mga\sin\theta, 0, 0]^T$

首次积分

$$\begin{cases} \dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi} = \omega_3 = \text{常量} & (\text{由 } 3.3) & (4.1) \\ J_1\dot{\psi}\sin^2\theta + J_3\omega_3\cos\theta = G_z = \text{常量} & ((3.2)\times\sin\theta \text{ 和 } 4.1) & (4.2) \\ \frac{1}{2}J_1\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}J_1\dot{\psi}^2\sin^2\theta + mga\cos\theta = h = \text{常量} & ((4.1)\times\dot{\theta} + (4.2)\times\dot{\psi}\sin\theta) & (4.3) \end{cases}$$

规则进动发生的必要条件 $J_3\omega_3 \geq 2\sqrt{mgaJ_1\cos\theta_0}$